„Und warum marschiert er nicht gleich morgens früh in einen Brunnen oder einen Abgrund, je nachdem, wie es sich eben so ergibt, sondern scheint sich doch davor in Acht zu nehmen, so als meine er (eben) nicht, daß das Hineinfallen gleichermaßen nicht gut und gut ist!?“

Aristoteles

5. Folgerungsverhältnisse

Das erste Kapitel erläutert Zweck und Programm einer philosophischen Vorschule: Was immer sonst Philosophie sein mag, sie macht in jedem Falle jene konzeptiv-diskursive Basisausrüstung verfügbar, die für eine erfolgreiche Absolvierung kognitiver Geschäfte aller Art (wenn nicht unentbehrlich, so doch) in hohem Maße hilfreich ist (1). Die Bereitstellung der erwähnten Zurüstung wird eröffnet mit der Skizzierung des philosophischen Rahmenwerks: Die Konzepte von Redehandlung und Sprache, Wahrheit und Bedeutung finden kursorische Erläuterung (2). Die eigentliche ›Arbeit‹ setzt mit der Darstellung der Rationalen Grammatik ein: Im Zentrum steht die Grammatik von Sprachen erster Stufe, die atomaren Kategorien sowie die Prinzipien ihrer Zusammensetzung zu molekularen Gebilden (3). Die grammatische Begrifflichkeit bleibt für alle weiteren Entwicklungen vorausgesetzt, auch und insbesondere für die methodische Begriffsbildung (↑9-11). Der vierte Schritt dient der Gestaltung der Annahme- und der Folgerungshandlung und damit der Regulierung der Junktoren, der Quantoren und des Identitätsprädikators. Verbunden damit ist eine elementare Unterweisung in der Technik des Argumentierens (4).

Wer im Sinne der Grundregeln korrekt folgern kann, beherrscht damit noch keineswegs den <u>Folgerungsbegriff</u> und <u>verwandte Konzepte</u> wie etwa Konsistenz, Verträglichkeit, Entscheidbarkeit usf. Da jedoch auch diese Begriffe schon bei elementaren Verständigungen über konzeptiv-diskursive Problemlagen zum Einsatz kommen, sind sie in provisorischer Weise bereitzustellen und einzuüben (5.1). – Diskurse lassen sich in vielfacher Weise <u>vereinfachen</u>: So kann man durch eine Non-sequitur-Diagnose erkennen, dass jeder Ableitungsversuch scheitern wird, so kann man Beweise durch das Anziehen logisch-wahrer Aussagen, durch zulässige Regeln und durch Substitutionsregeln abkürzen (5.2). Mit Hilfe der bereitgestellten logischen Redemittel lässt sich der Einzigkeitsquantor definieren. Die zentrale Rolle der Einzigkeit für das Referieren veranlasst eine detaillierte Erörterung (5.3). Ein <u>Zusatz</u> nimmt den gelegentlichen Hinweis auf, dass es zur hier vorgestellten und fortlaufend benutzten klassischen Logik Alternativen gibt. Vornehmlich die traditionelle Konkurrenz zur klassischen Logik, die minimale und die intuitionistische Logik, finden Erörterung (Zusatz: Logischer Pluralismus). – <u>Literaturhinweise</u> zur Metalogik und zur Philosophie der Logik leiten das weitere Studium an (5.4).

5.1. Der Folgerungsbegriff und verwandte Konzepte

Wer den vierten Teil erfolgreich absolviert hat, beherrscht im Prinzipiellen die Folgerungshandlung, das korrekte Schließen. Um sich über die Folgerungsverhältnisse zu verständigen, jene Beziehungen, die durch Vollzug des Schließens entstehen können, benötigt man indes nicht nur den Folgerungsperformator, sondern auch den Folgerungsprädikator '..folgt-aus..', der den Folgerungsbegriff ausdrückt. Zunächst ist über Beispiele der Unterschied und der Zusammenhang zwischen Folgerungsakt und Folgerungsrelation herauszustellen. Dabei wird zugleich die (meta)logische Perspektive eingerichtet (5.1.1). – Die beiden Anschlussschritte dienen der informellen Darstellung (meta)logischer Konzepte. Zunächst ist zu erläutern, was unter 'Konsequenz', 'Äquivalenz' und 'logischer (In)Determiniertheit' sowie angeschlossenen Begriffen zu verstehen ist (5.1.2). Sodann können die Begriffe der Konsistenz, Verträglichkeit und Maximalkonsistenz erläutert werden (5.1.3). Eine Reihe von Unterscheidungen, die zur Anwendung der Konsistenzbegrifflichkeit i.b. und der (meta)logischen Konzepte i.a. beitragen, findet abschließend Erläuterung (5.1.4).

Bei den vorgenommenen Etablierungen handelt es sich um informelle Darlegungen; auf die begriffliche Bearbeitung muss insoweit verzichtet werden, als die geeigneten (klassensprachlichen) Redemittel erst zu einem späteren Zeitpunkt (und auch dort nur) in Anfängen bereitgestellt werden (↑13). Die Ausführungen zielen lediglich auf die durch exemplarische Vorführungen herbeigeführte intuitiv verlässliche Handhabung durch die Leserin.

5.1.1. Folgerungsakt versus Folgerungsrelation: Die (meta)logische Perspektive

Im Vollzug von Folgerungsakten ziehen wir aus gegebenen Aussagen Konsequenzen. In Betrachtung von Aussagenzusammenhängen untersuchen wir u.a., ob eine Aussage Konsequenz aus einer Aussagenklasse ist, ob Aussagenklassen harmonieren, ob eine Aussagenmenge konsistent ist, ob sie alle ihre Konsequenzen zum Element hat usf. Gefolgert wird auf allen Gebieten; mit Aussagenzusammenhängen befassen sich unter den gegebenen Rücksichten vornehmlich Logiker. Die damit angesprochenen Szenarien sind in ihrem Verhältnis anhand von zwei Beispielen zu erläutern.

Das erste Beispiel ist das wohlbekannte Rechts/Links-Szenario (↑1.1.1). Die dort gegebene Überlegung lässt sich mit den inzwischen entwickelten Mitteln z.B. so darstellen:

[1]	1	Da	A liegt links von B
	2	Da	A liegt rechts von B

3	Da	$\bigwedge x \bigwedge y$ (x liegt rechts von $y \rightarrow \neg$ y liegt rechts von x)
4	Also	$\bigwedge y$ (A liegt rechts von $y \rightarrow \neg$ y liegt rechts von A)
5	Also	A liegt rechts von B $\rightarrow \neg$ B liegt rechts von A
6	Also	$\neg$ B liegt rechts von A
7	Da	$\bigwedge u \bigwedge w$ (u liegt rechts von $w \leftrightarrow w$ liegt links von u)
8	Also	$\bigwedge w$ (B liegt rechts von $w \leftrightarrow w$ liegt links von B)
9	Also	B liegt rechts von A $\leftrightarrow$ A liegt links von B
10	Also	B liegt rechts von A
11	Also	B liegt rechts von A $\wedge \neg$ B liegt rechts von A

In den Zeilen 4-6 und 8-11 werden Folgerungen gezogen, signalisiert durch den Folgerungsperformator 'Also__'. – Macht man nun den u.a. durch Folgerungsakte hergestellten Diskurs zum Gegenstand der Analyse, dann formuliert man z.B. folgende Zusammenhänge: In der Zeile 11 findet sich <u>frei von Abhängigkeiten</u> eine <u>Kontradiktion</u>. Da diese Aussage eine <u>Konsequenz</u> aus der Klasse der angezogenen Aussagen ist, ergibt sich, dass diese Klasse <u>inkonsistent</u> ist. – Die unterstrichenen Redeteile sind (meta)logische Ausdrücke. Am Rande sei darauf aufmerksam gemacht, dass auch im (meta)logischen Kommentar angezogen und gefolgert wird: So signalisiert 'Da__' wie üblich das Anziehen und die Wendung 'ergibt sich__' markiert den Folgerungsakt. Das Folgern findet sich eben in <u>allen</u> Diskursen, damit aber auch in Diskursen über Diskurse.

Ü 1 Ergänzen Sie [1] zu einem kommentierten Beweis!

Das zweite Beispiel artikuliert eine aus ethischen Grundkursen geläufige Variante des moralischen Relativismus. Es ist typisch für Texte dieses Genres.

[2] Since right and wrong are relative to culture, there's no duty that binds universally. What's wrong in one culture is right in another; universal obligations are a myth. Relativism should fill us with toleration toward other cultures. We can't say that we're right and they're wrong. So everyone ought to respect the values of others.

(GENSLER, H.J.: Formal Ethics, London/New York 1996, p. 15 (auch dort als Beispiel)).

In der Folge ist es nicht um Interpretation und Würdigung dieser Überlegung zu tun, sondern um die Thematisierung einiger Akte, die in einem derartigen Projekt jedenfalls zu vollziehen wären. – Zunächst erfolgen in [2] argumentative Handlungen, vornehmlich Anziehungen und

Folgerungen. Man betrachte z.B. den ersten Satz (im Sinn der traditionellen Grammatik); die performative Analyse führt auf:

[3] Since Right and wrong are relative to culture

So There's no duty that binds universally

Jede umfassende Bewertung wird die Frage aufwerfen: Ist die Konklusion ›tatsächlich‹ eine Konsequenz aus der Prämisse. In Beantwortung dieser Frage wird man die betrachtete Aussage zunächst formatieren. Das lässt sich für die Konklusion z.B. mit

[4] $\neg\bigvee x$ (Duty(x) $\wedge$ Binds-universally(x))

leicht durchführen. Gleichgültig wie man die Prämisse formatiert: Man hat in jedem Falle noch Aussagen hinzuzufügen, die die Rede von 'right' und 'wrong' mit den Prädikatkonstanten 'Duty(..)' und 'Binds-universally(..)' verbinden. Erst auf einer so verstärkten Prämissenbasis dürfte die angezielte Konsequenzrelation bestehen.

Ü 2 Es dürfte im Geiste des erörterten Textes sein, die Aussage '$\neg\bigvee x$(Duty(x)$\wedge$Binds-universally(x))' mit Hilfe der Aussagen '$\bigwedge x$(Duty(x)$\rightarrow\bigvee y$(Culture(y)$\wedge$Relative-to(x,y)))' und '$\bigwedge x\bigwedge y$(Culture(x)$\wedge$Relative-to(y,x)$\rightarrow\neg$Binds-universally(y))' zu begründen. Führen Sie eine solche Begründung durch!

Die Lektüre des Textes zeitigt unmittelbar einen Inkonsistenzverdacht: Steht nicht der letzte Satz bzw. dessen Aussage im Widerspruch zu [4]? Die Tatsache, dass es keine universal bindenden Pflichten gibt, reimt sich nicht zusammen damit, dass jedermann die Werte der anderen respektieren soll – was offenkundig eine universal bindende Pflicht ist. Formatiert man die letzte Aussage, dann ergibt sich mit einigen naheliegenden Manipulationen:

[5] $\bigwedge z\bigwedge x\bigwedge y$ (Person(x) $\wedge$ Person(y) $\wedge$ $x \neq y$ $\wedge$ Value-of(z,y) $\rightarrow$ Ought-to-respect(x,z))

[4] und [5] bilden ersichtlich keine Kontradiktion. Um die in [2] mitgeteilte Aussagenklasse als inkonsistent qualifizieren zu können und so das unabweisbare Inkonsistenzgefühl begrifflich zu fassen, muss man eine Hinzufügung vornehmen, z.B.:

[6] $\bigwedge z\bigwedge x\bigwedge y$ (Person(x) $\wedge$ Person(y) $\wedge$ $x \neq y$ $\wedge$ Value-of(z,y) $\rightarrow$ Ought-to-respect(x,z)) $\rightarrow$ $\bigvee w$ (Duty(w) $\wedge$ Binds-universally(w))

Die Aussagenklasse {[4], [5], [6]} ist ersichtlich inkonsistent, insofern sowohl [4] als auch das Negatum von [4] aus ihr folgen. Die zuletzt genannte Aussage folgt mit SB aus [5] und [6]. Unter Aussage [6] sind also [4] und [5] unverträglich.

Der Text [2] stellt eine (gebrauchs- bzw. bildungssprachliche) Argumentation dar, in der, wie in allen Diskursen, gefolgert wird: Der Folgerungsakt durchzieht unser gesamtes Erkenntnisgeschäft. Auch in der (partiellen) Kommentierung werden selbstredend Folgerungshandlungen vollzogen. Allerdings enthalten die Aussagen, aus denen bzw. auf die geschlossen wird, (meta)logische Prädikatoren wie 'Folgerung', 'Kontradiktion', 'Verträglichkeit' usf. Folgern ist demnach eine Sache, das Sich-Verständigen über Folgerungsverhältnisse eine andere. Gefolgert wird in allen Diskursbereichen, die Thematisierung der Folgerungsverhältnisse fällt in die Logik. Insoweit man sich der (meta)logischen Begrifflichkeit bedient, macht man Anleihen im Vokabelsortiment des Logikers. In jeder Interpretation kognitiver Texte, in vielen Kontroversen, in jeder Konstruktion, Analyse und Kritik sprachlicher Systeme werden diese Redeteile offensichtlich benötigt. Aus diesem Grunde sind sie zumindest kursorisch bei einer Darstellung der Denkwerkzeuge zu berücksichtigen.

Die Wortzusammenstellung '(meta)logisch' ist so motiviert: Bezeichnet man die durch die Folgerungsregeln gegebenen Verhältnisse schon als logische, dann sind die sie thematisierenden Begriffe (meta)logische; anderenfalls artikuliert man mit logischen Konzepten die Folgerungsverhältnisse.

5.1.2. Konsequenz – Äquivalenz – Determiniertheit

Was ist hinreichend und notwendig dafür, dass eine Aussage Konsequenz aus einer Aussagenklasse ist? Man betrachte die Argumentation unter [1]. Die Kontradiktion in Zeile 11 soll eine Konsequenz aus den in den Zeilen 1 bis 3 und 7 angezogenen Aussagen sein: Sie wird aus diesen Aussagen durch Anwendung der logischen Regeln gewonnen. Stellte man die Anziehungen als Annahmen dar, dann wäre die Aussage von 11 in Abhängigkeit von den angenommenen Aussagen gewonnen. Wenn es also eine Ableitung einer Aussage aus angenommenen Aussagen gibt, dann soll die betrachtete Aussage Konsequenz der Klasse der angenommenen Aussage sein.

Diese Herangehensweise macht es nötig, zunächst das Ableitungskonzept zu charakterisieren. Einfachheitshalber unterbleibt hier wie in der Folge die ausdrückliche Bezugnahme auf den sprachlichen Rahmen; damit wird aus dem vierstelligen Prädikator '..ist in..Ableitung von..aus..' der dreistellige '..ist Ableitung von..aus..'. $\mathcal{A}$ <u>ist eine Ableitung von</u> Γ <u>aus</u> X genau dann, wenn $\mathcal{A}$ eine Sequenz ist, so dass für jedes Glied $\mathcal{A}_i$ von $\mathcal{A}$ gilt: $\mathcal{A}_i$ ist ein Annahmesatz gemäß der Annahmeregel AR oder $\mathcal{A}_i$ ist ein Folgerungssatz gemäß W, SE, SB, ..., IE, IB und Γ ist die im letzten Glied von $\mathcal{A}$ in Abhängigkeit von der Aussagenklasse *X* gewonnene Aussage. Man erinnere sich, dass Sequenzen – und damit dann auch Ableitungen – endliche Folgen sind.

Mit Hilfe des Ableitungskonzepts lässt sich nun (durch ›Wegbinden‹ der ersten Stelle) unmittelbar angeben, wann eine Aussage eine Konsequenz einer Aussagenklasse ist: Γ <u>ist Konsequenz</u> resp. <u>folgt aus</u> *X* genau dann, wenn es eine Ableitung $\mathcal{A}$ von Γ aus einer Unterklasse von *X* gibt. – Da der soeben charakterisierte Begriff in der Folge häufig Verwendung findet, wird er gemeinsam mit seinem Negatprädikator, wie üblich, durch '..$\vdash$..' bzw. '..$\nvdash$..' abgekürzt.

Wer zeigen will, dass eine Aussage Γ Konsequenz aus einer Aussagenklasse *X* ist, kann dies ›durch die Tat‹ tun, indem er eine Ableitung von Γ aus *X* vorlegt. So ist etwa die Kontradiktion in Zeile 11 von [1] eine Konsequenz der Klasse der Aussagen aus Zeile 1 bis 3 und 7; und so gilt – man erinnere sich an Übung 2 – auch: {'$\bigwedge x$ (Duty(x) $\rightarrow$ $\bigvee y$ (Culture(y) $\wedge$ Relative-to(x,y)))', '$\bigwedge x \bigwedge y$ (Culture(x) $\wedge$ Relative-to(y,x) $\rightarrow$ $\neg$ Binds-universally(y))'} $\vdash$ '$\neg$ $\bigvee x$ (Duty(x) $\wedge$ Binds-universally(x))'.

Das entscheidende Bestandstück der Charakterisierung sind die Annahmeregel, die Wiederholungsregel und die Regeln für die logischen Operatoren. Diese lassen sich auch als Eigenschaften des Folgerungsbegriffs lesen. So gilt etwa für beliebige Aussagenklassen *X*, *Y* und beliebige Aussagen A, B: Wenn $X \vdash \mathrm{A}$ und $Y \vdash \mathrm{B}$, dann $X \cup Y \vdash \mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$; wenn $X \vdash \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$ und $Y \vdash \mathrm{A}$, dann $X \cup Y \vdash \mathrm{B}$. Das erste Beispiel ist der (meta)logische Ausdruck von KE: Liegt eine Ableitung von A aus *X* vor und eine Ableitung von B aus *Y*, dann gibt es – eben über KE – eine Ableitung der Konjunktion aus A und B aus $X \cup Y$. Das zweite Beispiel ist analog der (meta)logische Ausdruck von SB.

Ü 3 Formulieren Sie den (meta)logischen Ausdruck von AB, UE und IE!

Die Folgerungsrelation ist in dem modifizierten Sinne <u>reflexiv</u>, dass alle Aussagen Δ, die Element einer Aussagenklasse *X* sind, auch zu ihren Konsequenzen zählen: Wenn $\Delta \in X$, dann $X \vdash \Delta$. Wegen $\Delta \in \{\Delta\}$ gilt insbesondere $\{\Delta\} \vdash \Delta$. Elementschaft garantiert Konsequenzschaft. – Folgt ferner die Subjunktion aus Δ und Γ aus *X*, dann folgt Γ aus $X \cup \{\Delta\}$ alleine. Auch die als <u>Deduktionstheorem</u> bekannte Umkehrung gilt: Wenn Γ Konsequenz aus $X \cup \{\Delta\}$ ist, dann ist die Subjunktion aus Δ und Γ Konsequenz aus *X* allein. Insgesamt gilt dann: $X \vdash \Delta \rightarrow \Gamma$ genau dann, wenn $X \cup \{\Delta\} \vdash \Gamma$.

Der im Folgenden dargestellte Zug der Folgerungsrelation wird oft als <u>Schnitt</u> bzw. <u>Cut</u> bezeichnet: Ist eine Aussage Γ Konsequenz aus $X \cup \{\mathrm{B}\}$ und folgt ferner B aus *Y*, dann folgt Γ aus

$X \cup Y$. Die Aussage B wird in der letzten Folgerungsbeziehung ›herausgeschnitten‹: Wenn $X \cup \{B\} \vdash \Gamma$ und $Y \vdash B$, dann $X \cup Y \vdash \Gamma$. – Folgt eine Aussage Γ aus einer Aussagenklasse Z, dann folgt Γ auch aus jeder Erweiterung von Z: Wenn $Z \vdash \Gamma$ und $Z \subseteq X$, dann $X \vdash \Gamma$. Das ist die Eigenschaft der Prämissenerweiterung resp. Monotonie. – Die Transitivität der Folgerungsrelation kann so ausgedrückt werden: Wenn alle Aussagen B einer Aussagenklasse X aus einer Aussagenklasse Y folgen und eine Aussage Γ ebenfalls aus X folgt, dann folgt Γ bereits aus Y: Wenn $Y \vdash B$ für alle $B \in X$ und $X \vdash \Gamma$, dann $Y \vdash \Gamma$. Eine Menge Y, aus der alle Elemente einer Klasse X folgen, kann X als Prämissenklasse ersetzen.

Schließlich ist noch die Endlichkeit festzuhalten. Folgt Δ aus einer beliebigen Aussagenklasse X, dann gibt es eine endliche Teilmenge Y von X, aus der Δ ebenfalls folgt: Wenn $X \vdash \Delta$, dann gibt es eine endliche Klasse $Z \subseteq X$ mit $Z \vdash \Delta$.

Mit Hilfe der Konsequenzschaft lässt sich der Begriff der (logischen) Äquivalenz definieren: Eine Aussage A ist einer Aussage B (logisch) äquivalent, wenn sowohl B eine Konsequenz aus der Einerklasse von A wie auch A eine Konsequenz aus der Einerklasse von B ist. Wählt man '..$\dashv\vdash$..' als Kürzel, dann ergibt sich: $A \dashv\vdash B$ genau dann, wenn sowohl $\{A\} \vdash B$ als auch $\{B\} \vdash A$.

Die Äquivalenz ist ebenfalls reflexiv: Für jede Aussage Δ gilt: $\Delta \dashv\vdash \Delta$. Ferner liegt Symmetrie vor: Für beliebige Aussagen A, B gilt: Wenn $A \dashv\vdash B$, dann $B \dashv\vdash A$. Die Transitivität liest sich so: Für beliebige Aussagen B, Γ, Δ gilt: Wenn $B \dashv\vdash \Gamma$ und $\Gamma \dashv\vdash \Delta$ gilt, dann gilt auch $B \dashv\vdash \Delta$. Ferner gilt die bei Ringbeweisen ausgenutzte Zirkeltransitivität. Für beliebige Aussagen A, B, Γ gilt: Wenn $\{A\} \vdash B$ und $\{B\} \vdash \Gamma$ und $\{\Gamma\} \vdash A$, dann sind A, B, Γ paarweise äquivalent, also $A \dashv\vdash B$, $B \dashv\vdash \Gamma$, $\Gamma \dashv\vdash A$ (↑5.3.4: [46], [47]).

Eine Aussage Γ soll logisch-wahr bzw. logisch-beweisbar sein genau dann, wenn es eine Ableitung von Γ aus der leeren Klasse gibt bzw. wenn Γ Konsequenz aus der leeren Klasse ist: Γ ist logisch-wahr genau dann, wenn $\emptyset \vdash \Gamma$. Als Abkürzung fungiere '$\vdash$..'. – Zwischen Konsequenz bzw. Äquivalenz von Aussagen einerseits und der logischen Wahrheit ihrer Subjunktion bzw. Bisubjunktion andererseits besteht folgender Zusammenhang: Eine Aussage B ist genau dann Konsequenz aus der Einerklasse aus einer Aussage A, wenn die Subjunktion aus A und B logisch-wahr ist: $\{A\} \vdash B$ genau dann, wenn $\vdash A \rightarrow B$. Zwei Aussagen sind genau dann logisch äquivalent, wenn ihre Bisubjunktion logisch-wahr ist: $A \dashv\vdash B$ genau dann, wenn $\vdash A \leftrightarrow B$.

Eine Aussage Δ ist logisch-falsch bzw. logisch-widerlegbar, wenn die Negation von Δ logisch-wahr ist. Logisch-determiniert sind genau die Aussagen, die logisch-wahr oder logisch-falsch sind. Alle übrigen Aussagen sind logisch-indeterminiert bzw. logisch-kontingent. – Es resultiert folgende Gliederung der Aussagen:

[7]

- Aussagen
  - logisch-determiniert
    - logisch-wahr
    - logisch-falsch
  - logisch-indeterminiert

Die Aussage 'es regnet $\vee$ $\neg$ es regnet' ist logisch-wahr, die Aussage '$\neg$ (es regnet $\vee$ $\neg$ es regnet)' ist logisch-falsch; demgegenüber ist die Aussage 'es regnet' logisch-kontingent: Über ihr Wahr- bzw. Falschsein kann nicht mit ausschließlich logischen Mitteln befunden werden. Sie hat mit der herrschenden Wetterlage zu tun.

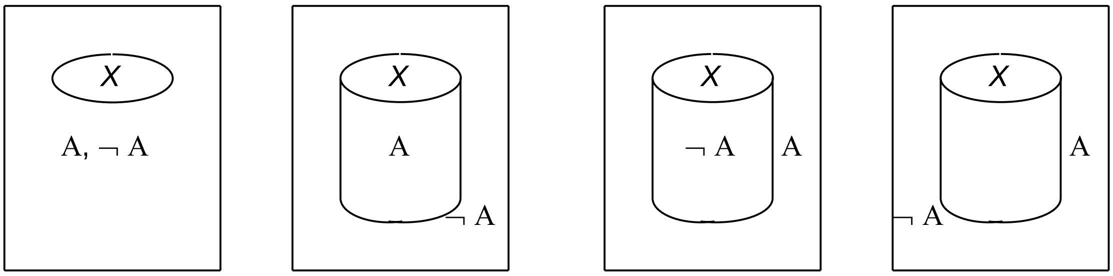
Ü 4 Geben Sie aus der Arithmetik, der Philosophie und einem Bereich Ihrer Wahl ein Beispiel für eine logisch-wahre, logisch-falsche, wahre logisch-indeterminierte und falsche logisch-indeterminierte Aussage.

Wegen Prämissenerweiterung gilt: Wenn eine Aussage Δ logisch-wahr ist, folgt sie aus einer beliebigen Aussagenklasse. Da die Negation einer logisch-falschen Aussage logisch-wahr und damit ohnehin gegeben ist, resultiert mit Ex-falso-quod-libet: Aus einer Klasse mit einer logisch-falschen Aussage folgt jede beliebige Aussage.

Die im vorangehenden Kapitel bewiesenen Theoreme sind logisch-wahre Aussagen(schemata), die unendlich viele logisch-wahre Instanzen überdecken. – Eine Aussage A ist entscheidbar durch (bzw. ist abhängig von) einer Aussagenklasse X, wenn A oder die Negation von A Konsequenz von X ist: $X \vdash \mathrm{A}$ oder $X \vdash \neg\mathrm{A}$. Unentscheidbarkeit (bzw. Unabhängigkeit) von A durch X liegt hingegen vor, wenn weder A noch die Negation von A aus X folgt: $X \nvdash \mathrm{A}$ und $X \nvdash \neg\mathrm{A}$. Logisch-wahre und logisch-falsche Aussagen sind von allen Aussageklassen abhängig: Logisch-wahre Aussagen folgen wegen Prämissenerweiterung aus allen Aussageklassen; und damit folgt auch die Negation logisch-falscher Aussagen aus allen Aussageklassen. Das eigentliche Anwendungsfeld des Begriffs sind also logisch-indeterminierte Aussagen. Da ferner inkonsistente Aussagenklassen jede Aussage entscheiden, ist das interessante Anwendungsfeld nochmals auf die konsistenten Aussagenklassen einzuschränken. Insgesamt ist das Konzept für logisch indeterminierte Aussagen und konsistente Aussagenklassen angelegt.

Es ist eine Aussage A Konsequenz einer Aussagenklasse *X* oder nicht; und es ist ferner die Negation von A Konsequenz einer Aussagenklasse *X* oder nicht. Damit sind vier Fälle zu unterscheiden: $X \vdash \mathrm{A}$ und $X \vdash \neg\mathrm{A}$, $X \vdash \mathrm{A}$ und $X \nvdash \neg\mathrm{A}$, $X \nvdash \mathrm{A}$ und $X \vdash \neg\mathrm{A}$, $X \nvdash \mathrm{A}$ und $X \nvdash \neg\mathrm{A}$. Das folgende Diagramm spiegelt die vier Möglichkeiten, dabei ist die gesamte elliptische Menge die Konsequenzenklasse von *X*; nur im ersten Fall ist die Konsequenzenklasse die Gesamtheit aller Aussagen:

[8]



Im ersten Fall ist *X* (in der unten eingeführten Terminologie) inkonsistent, in den drei anderen konsistent. In den beiden mittleren Fällen liegt (nicht triviale) Entscheidbarkeit vor, im letzten Unentscheidbarkeit.

Mit Hilfe des (einstelligen) Redundanzbegriffs greift man auf die Folgerungsverhältnisse innerhalb einer Aussagenklasse zu: Eine Aussagenklasse *X* ist (logisch) redundant resp. abhängig genau dann, wenn für wenigstens ein $\Delta \in X$ gilt, dass $X \setminus \{\Delta\} \vdash \Delta$; Δ folgt aus der Restklasse von *X*. Es ist *X* irredundant bzw. unabhängig, falls für kein $\Delta \in X$ gilt, dass $X \setminus \{\Delta\} \vdash \Delta$.

Beide Konzepte, Entscheidbarkeit und Redundanz, spielen v.a. bei der Untersuchung von Axiomensystemen eine Rolle. Hat man z.B. gezeigt, dass eine Aussage durch eine (konsistente) Axiomenklasse entschieden wird, dann kann man die Negation dieser Aussage (zweiter Fall) oder diese Aussage (dritter Fall) der Axiomenklasse nicht unter Konsistenzwahrung hinzufügen. Ist die Aussage hingegen unabhängig, dann entstehen durch ihre oder ihrer Negation Hinzufügung alternative Axiomenklassen. – Ist eine Axiomenklasse als redundant erwiesen, dann wird man das redundante Glied streichen. Erstangebote von Axiomensystemen sind häufig redundant und werden erst später irredundant gemacht.

Entscheidet eine Aussagenklasse alle Aussagen, dann ist sie deduktiv vollständig: *X* ist deduktiv-vollständig genau dann, wenn für alle Aussagen Δ gilt: Δ ist entscheidbar durch (abhängig von) *X*, d.h. $X \vdash \Delta$ oder $X \vdash \neg\Delta$.

Als deduktiv geschlossen bezeichnet man eine Aussagenklasse schließlich, wenn sie ihre sämtlichen Konsequenzen zum Mitglied hat: *X* ist deduktiv-geschlossen genau dann, wenn für alle Aussagen A gilt: Wenn $X \vdash \mathrm{A}$, dann $\mathrm{A} \in X$. Die deduktive Geschlossenheit kehrt also die

Reflexivität um. Eine Klasse ist damit genau dann deduktiv geschlossen, wenn sie mit ihrer Konsequenzenklasse zusammenfällt. Damit ist auch die Konsequenzenklasse einer beliebigen Menge deduktiv geschlossen. Deduktiv-geschlossene Klassen umfassen alle logischen Wahrheiten. Ferner ist die Konsequenzenklasse der Konsequenzenklasse einer Klasse mit der Konsequenzenklasse identisch; Iterierungen der Bildung von Konsequenzenklassen führen nicht zu einer gegenüber der Konsequenzenklasse neuen Klasse.

5.1.3. Konsistenz – Verträglichkeit – Maximalkonsistenz

Auf Basis des Konsequenzbegriffs sind konsistente Aussagenklassen bestimmbar als solche Mengen, für die es keine Aussagen dergestalt gibt, dass sowohl die Negation der Aussage als auch die Aussage selbst Konsequenz ist. Inkonsistent ist eine Aussagenklasse genau dann, wenn sie nicht konsistent ist, wenn es mithin eine Aussage gibt, die gemeinsam mit ihrer Negation aus der Klasse folgt. Formeller: *X* <u>ist konsistent</u> bzw. <u>widerspruchsfrei</u> genau dann, wenn es keine Aussage Δ gibt, so dass $X\vdash\Delta$ und $X\vdash\neg\Delta$. X <u>ist inkonsistent</u> bzw. <u>widersprüchlich</u> genau dann, wenn es eine Aussage Δ gibt, so dass $X\vdash\Delta$ und $X\vdash\neg\Delta$.

Eine Aussagenklasse *X* ist demnach genau dann inkonsistent, wenn jede beliebige Aussage Γ aus ihr folgt. X ist inkonsistent genau dann, wenn für alle Aussagen Δ gilt: $X\vdash\Delta$. – Sei X inkonsistent. Nach der Definition der Inkonsistenz gibt es dann eine Aussage Δ, so dass sowohl Δ wie auch $\neg\Delta$ aus X folgen. Sei $\Delta°$ eine solche. Damit folgt die Konjunktion aus $\Delta°$ und $\neg\Delta°$, also $\Delta°\wedge\neg\Delta°$ aus X. Wegen $\{\Delta°\wedge\neg\Delta°\}\vdash\Gamma$ für beliebiges Γ und der Transitivität der Konsequenzschaft folgt dann beliebiges Γ aus X. Folge umgekehrt beliebiges Γ aus X; dann gibt es auch ein Δ, so dass sowohl Δ wie auch die Negation von Δ aus X folgen.

<u>Kontradiktionen</u> sind erinnerlich Konjunktionen aus einer Aussage und ihrer Negation (↑1.1.1). Alle Kontradiktionen sind logisch-falsch, da ihre Negationen logisch-wahr sind. Eine Aussagenklasse ist, wie der vorangehenden Beweisskizze zu entnehmen, genau dann inkonsistent, wenn eine Kontradiktion aus ihr folgt. Obgleich jede inkonsistente Aussagenklasse trivialerweise Kontradiktionen zur Konsequenz hat, muss sie keineswegs solche Aussagen zum Element haben. Ebenso wenig muss eine inkonsistente Klasse eine Aussage und ihre Negation zum Mitglied haben. Inkonsistente Aussagenklassen, die eine Kontradiktion oder eine Aussage und ihre Negation zum Element haben, sind <u>oberflächeninkonsistent</u>. Besitzen solche Klassen endlich wenige Elemente, dann wird der Inkonsistenznachweis trivialisiert.

Ü 5 a) Weisen Sie mit Hilfe der Definition nach, dass die Aussagen aus Zeile 1 bis 3 und Zeile 7 unter [1] eine inkonsistente Menge darstellen. Handelt es sich um eine oberflächeninkonsistente Klasse?

b) Bilden Sie eine inkonsistente, aber nicht oberflächeninkonsistente Menge aus dem Bereich der Philosophie, die wenigstens eine quantifizierte Aussage enthält.

Eine Aussagenklasse ist genau dann konsistent, wenn sie wenigstens eine Aussage nicht zur Konsequenz hat: *X* ist konsistent genau dann, wenn es eine Aussage Δ gibt, so dass nicht $X \vdash \Delta$. Damit ist eine hinreichende und notwendige Bedingung für Konsistenz genannt: Man braucht nur von einer beliebig wählbaren Aussage zu zeigen, dass sie nicht Konsequenz aus der betrachteten Klasse ist, um deren Konsistenz nachzuweisen. Dieser Nachweisweg wird dann besonders aussichtsreich, wenn ein einfaches Verfahren zur Non-sequitur-Diagnose bereitsteht (↑5.2.1).

Man könnte Konsistenz auch mit Hilfe dieses Lemmas definieren und erhielte dann umgekehrt die obige Definition als beweisbare Aussage. Während die hier gewählte Definition – Ausschluss einer Aussage, die mit ihrer Negation aus der betrachteten Klasse folgt, – an die redepragmatischen Ursprünge der Begrifflichkeit erinnert, ist das Lemma allgemeiner gehalten; analog liegen die Verhältnisse bei der Inkonsistenz. – Gelegentlich spricht man den Ausschluss der Folgerbarkeit einer Aussage und ihrer Negation auch als 'Negationskonsistenz' an, während die Existenz einer nicht-folgerbaren Aussage als 'Konsistenz' geführt wird. Eine Aussagenklasse ist (in den hier betrachteten Sprachen) genau dann konsistent, wenn sie auch negationskonsistent ist.

Folgt jedes Element einer Aussagenklasse *X* aus einer Aussagenklasse *Y*, dann ist *X* im Falle der Konsistenz von *Y* konsistent und *Y* im Falle der Inkonsistenz von *X* seinerseits inkonsistent: Für alle Aussagenklassen *X*, *Y* gilt: Wenn für alle Aussagen $\mathrm{A} \in X$ gilt, dass $Y \vdash \mathrm{A}$, dann: Wenn *Y* konsistent ist, dann ist *X* konsistent; wenn *X* inkonsistent ist, dann ist auch *Y* inkonsistent. – Ferner sind die Teilklassen konsistenter Mengen konsistent und die Oberklassen inkonsistenter Klassen inkonsistent: Unter $X \subseteq Y$ gilt: Wenn Y konsistent ist, dann ist X konsistent. Wenn X inkonsistent ist, dann auch Y. Inkonsistenz vererbt sich ›nach oben‹, Konsistenz vererbt sich ›nach unten‹ weiter.

Eine Aussage folgt genau dann aus einer Aussagenklasse, wenn die Vereinigung dieser Klasse mit der Einerklasse aus der Negation dieser Aussage inkonsistent ist: $X \vdash \Delta$ gdw $X \cup \{\neg\Delta\}$ ist inkonsistent. So folgt aus Aussagenklassen der Art $\{\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}\}$ B mit (auf Regelebene gesprochen) KB. Damit ist $\{A \wedge B\} \cup \{\neg B\}$, also $\{A \wedge B, \neg B\}$ ersichtlich inkonsistent: Sowohl B als auch die Negation von B sind Konsequenz dieser Klasse.

Eine Aussagenklasse *X* ist verträglich mit resp. kompatibel mit resp. harmoniert mit resp. stimmt überein mit einer Aussagenklasse *Y* genau dann, wenn $X \cup Y$ konsistent ist. Inkonsistente Aussagenklassen harmonieren demzufolge mit keiner Aussagenklasse. Stehen umgekehrt Aussagenklassen in Harmonie, so sind beide konsistent. – Es ist hingegen *X* unverträglich mit resp. inkompatibel mit resp. in Disharmonie mit *Y*, falls $X \cup Y$ inkonsistent ist. Bei Beteiligung schon einer inkonsistenten Aussagenmenge resultiert Disharmonie. Umgekehrt darf jedoch aus der Inkompatibilität zweier Klassen nicht auf deren (jeweilige) Inkonsistenz geschlossen werden; diese kann gerade durch die Zusammenfügung von *X* und *Y* entstehen. (Un)Verträglichkeit von Aussagen A, B unter einer Aussagenklasse *X* ist genau dann gegeben, wenn die Vereinigung der Einerklassen beider Aussagen mit der Klasse (in)konsistent ist: A ist unter *X* mit B (un)verträglich genau dann, wenn $\{A\} \cup \{B\} \cup X$ (in)konsistent ist. Man vergleiche die Diskussion an Beispiel [2]: Die Aussagen [4] und [5] sind unter {[6]} unverträglich.

Maximalkonsistente Mengen sind die konsistenten Mengen, die durch Hinzufügung einer beliebigen Aussage, die ihnen nicht als Element angehört, in Inkonsistenz fallen. Genauer: *X* ist maximalkonsistent genau dann, wenn *X* konsistent ist und für alle Aussagen A mit $A \notin X$ gilt: $X \cup \{A\}$ ist inkonsistent. – Die maximalkonsistenten Klassen haben alle logisch-wahren Aussagen und keine logisch-falsche Aussage zum Element. Sie haben ferner die und nur die Aussagen zum Element, die aus ihnen folgen: Wenn *X* maximalkonsistent ist, dann ist eine beliebige Aussage $\Gamma \in X$, genau dann, wenn $X \vdash \Gamma$. Maximalkonsistente Klassen sind überdies deduktiv vollständig: Sei X maximalkonsistent. Nun ist $A° \in X$ oder $A° \notin X$. Im ersten Fall ist $X \vdash A°$, also $X \vdash A°$ oder $X \vdash \neg A°$, also ist X deduktiv vollständig. Im zweiten Fall ist $A° \notin X$, also $X \cup \{A°\}$ ist inkonsistent, also $X \vdash \neg A°$, also $X \vdash A°$ oder $X \vdash \neg A°$, also ist X deduktiv vollständig.

Umgekehrt gilt: Wenn *X* konsistent, deduktiv geschlossen und deduktiv vollständig ist, dann ist *X* maximalkonsistent. Schließlich sei noch der Satz von LINDENBAUM erwähnt: Zu jeder konsistenten Aussagenklasse *X* gibt es eine maximalkonsistente Oberklasse *Y*.

Eine Aussagenklasse ist maximalkonsistente Unterklasse einer Aussagenklasse genau dann, wenn die erstgenannte Klasse konsistent ist, Teilklasse der Zweitgenannten und nicht leer und wenn die Hinzufügung einer Formel, die der zweitgenannten, aber nicht der erstgenannten Klasse angehört, die Menge inkonsistent macht. Genauer: *X* ist maximalkonsistente Unterklasse von *Y* genau dann, wenn (1) $X \subseteq Y$ und $X \neq \emptyset$, (2) X ist konsistent und (3) für alle Aussagen Δ: Wenn $\Delta \in Y \setminus X$, dann $X \cup \{\Delta\}$ ist inkonsistent. – Während maximalkonsistente Mengen mit Blick auf beliebige Formeln definiert werden, ist hier der Rahmen durch die Oberklasse *Y* eingeschränkt, der die zur Inkonsistenz führende Aussage entnommen sein muss.

Wenn eine Aussagenmenge nicht leer und konsistent ist, dann hat sie sich selbst, aber auch nur sich selbst zur maximalkonsistenten Untermenge. Dieser Sachverhalt zeigt an, dass der neue Begriff mit Blick auf inkonsistente Oberklassen angelegt ist. Wenn *X* maximalkonsistente Untermenge von *Y* ist, dann gilt für jede *Y*-Aussage A: $\mathrm{A} \in X$ gdw $X \vdash \mathrm{A}$. Die Bildung maximalkonsistenter Untermengen hat nicht nur vornehmlich inkonsistente Oberklassen als intendierten Anwendungsbereich, sondern zielt zusätzlich auf Klassen mit endlich wenigen, fast überschaubar wenigen Mitgliedern: Die Vorgehensweise zur Bildung maximalkonsistenter Untermengen ist diese: (i) Bilde alle Teilklassen der inkonsistenten Ausgangsmenge Y, also die Potenzklasse von Y! (ii) Streiche die Menge selbst und die leere Klasse! (iii) Sortiere aus den so gewonnenen Teilklassen die konsistenten aus! (iv) Zeichne die maximalkonsistenten Teilklassen aus!

Die Bildung maximalkonsistenter Untermengen ist für die inkonsistente Klasse aus dem Links-Rechts-Beispiel vorzuführen. Dabei wird die Aussage aus Zeile 1 unter [1] mit ’I’, diejenige aus Zeile 2 mit ’II’, diejenige aus Zeile 3 mit ’III’ und diejenige aus Zeile 7 mit ’IV’ abgekürzt. Die Unterklassen von {I, II, III, IV} sind die Mengen $\emptyset$, {I, II, III, IV}, {II, III, IV}, {I, III, IV}, {I, II, IV}, {I, II, III}, {I, II}, {I, III}, {I, IV}, {II, III}, {II, IV}, {III, IV}, {I}, {II}, {III}, {IV}. Durch Streichung der beiden ersten werden die relevanten Unterklassen verfügbar.

Die verbleibenden Mengen sind auf Konsistenz zu untersuchen. Um diese Aufgabe abzukürzen, wird gezeigt, dass die vier dreielementigen Klassen konsistent sind. Alle übrigen Klassen lassen sich als Teilklassen derselben darstellen. Erweisen sich die betrachteten Gebilde als konsistent, dann auch ihre Teilklassen.

{II, III, IV} ist konsistent, wenn es wenigstens eine Aussage gibt, die nicht folgt. Ein Beispiel für eine solche Aussage wäre etwa gerade I, also ’A liegt links von B’, oder auch ’A=B’. Um etwa zu zeigen, dass I keine Konsequenz von {II, III, IV} ist, legt man eine Interpretation vor, die die Klasse erfüllt, aber etwa I falsch macht. Seien die natürlichen Zahlen das Universum der Interpretation und gelte folgende Deutung:

[9]	A	2
	B	1
	..liegt rechts von..	..>..
	..liegt links von..	..<..

[9] macht II, III, IV arithmetisch wahr; es gilt nämlich in der arithmetischen Sprache:

[10] $2 > 1$

$\bigwedge x \bigwedge y\ (x > y \rightarrow \neg\ y > x)$

$\bigwedge x \bigwedge y\ (x > y \leftrightarrow y < x)$

Insoweit ist die Aussagenklasse erfüllbar, d.h. sie besitzt eine Interpretation, die alle ihre Elemente wahr macht. Die Interpretation macht andererseits wenigstens eine Aussage, etwa I (mit dem Interpretans '2<1') oder auch 'A=B' (mit dem Interpretans '2=1') falsch. Diese ist also keine Konsequenz (↑5.2.1). – Analog wird gezeigt, dass die übrigen Dreierklassen konsistent sind.

Zum Nachweis der Maximalkonsistenz sei wiederum {II, III, IV} betrachtet. Gefordert ist, dass jede Aussage, die {I, II, III, IV} angehört, nicht aber {II, III, IV}, die letztgenannte Klasse inkonsistent macht. Da lediglich I der betrachteten Menge nicht angehört, kann sich die Untersuchung beschränken: Aus dem Inkonsistenznachweis ist bekannt, dass die Viererklasse inkonsistent ist. Analog kann für die übrigen Dreierklassen Maximalität gezeigt werden. Es sind damit {II, III, IV}, {I, III, IV}, {I, II, IV} und {I, II, III} die maximalkonsistenten Untermengen der Links-Rechts-Aussagenmenge.

Eine Aussage A ist unschuldiger Zuschauer von *X*, falls A *X*-Mitglied ist und jeder maximalkonsistenten Untermenge von *X* angehört: $A \in X$ und für alle *Z* gilt: Wenn *Z* maximalkonsistente Untermenge von *X* ist, dann ist $A \in Z$. Hingegen ist A Verdächtiger von *X*, falls A wenigstens einer maximalkonsistenten Untermenge nicht angehört: $A \in X$ und es gibt eine maximalkonsistente Untermenge *Z* von *X* mit $A \notin Z$.

Die beispielhaft betrachtete Menge enthält keine unschuldigen Zuschauer, sondern nur Verdächtige. Ein unschuldiger Zuschauer wäre etwa durch Hinzufügung der Aussagen 'A ist viereckig' oder auch 'B ist eckig' gegeben.

Ü 6 a) Zeigen Sie, dass die folgende Aussagenklasse inkonsistent ist:

I $\bigwedge x$ (MentalesPhänomen(x) $\rightarrow \neg$ PhysischesPhänomen(x))

II $\bigvee y \bigvee z$ (MentalesPhänomen(y) $\wedge$ PhysischesPhänomen(z) $\wedge$ Bewirkt(y,z))

III $\bigwedge u \bigwedge w$ (Bewirkt(u,w) $\wedge$ PhysischesPhänomen(w) $\rightarrow$ PhysischesPhänomen(u))

b) Bilden Sie die maximalkonsistenten Untermengen! Verwenden Sie zum Konsistenznachweis das oben benutzte Kriterium!

c) Identifizieren Sie die unschuldigen Zuschauer und die Verdächtigen von {I, II, III}!

5.1.4. (In)Konsistenz – Umgebende Unterscheidungen

Widerspruch, Kontroverse, Streit, Disput, Meinungsverschiedenheit, Dissens, usf. sind lebens- und sonderweltlich wohlvertraute Erscheinungen. Die Logik wird u.a. deshalb ausgebildet, um mit diesen Gegebenheiten (besser) umgehen zu können. So dienen die Konzepte von Konsistenz und Inkonsistenz gerade dazu, in allgemeiner und verlässlicher Weise eine Verständigung über diese Turbulenzen im Erkenntnisgeschäft zu garantieren.

Das (Sich)Widersprechen, „Contradicere“, kann durch Vollzug ganz verschiedener Redehandlungen erfolgen: So mag eine (dann als Proponent geführte) Partei eine Aussage Δ behaupten, während eine andere (dann als Opponent auftretende) Partei Δ bestreitet oder aber die Negation von Δ behauptet. Weitere Formen ergeben sich dann, wenn man in Annahme einer alternativen Prädikationslehre (↑3.3.5) auch positive, negative und neutrative Prädikationsoperatoren zulässt.

Das Sich-Widersprechen kommt gewöhnlich nicht in der Weise vor, dass ein kognitiver Agent zugleich Δ behauptet und bestreitet bzw. dass er Δ und die Negation von Δ behauptet. Vielmehr äußert man eine ganze Reihe von Aussagen, z.B. als Antworten auf Konzessionsfragen, die gemeinsam eine Aussage und ihre Negation als Element oder Konsequenz enthalten. Gelegentlich – man vergleiche [2] – gleitet man allmählich und unbemerkt auf einer Welle von Plausibilitäten in den Abgrund des Widerspruchs. Es gibt jedoch eine Reihe weiterer inkonsistenter Diskurssituationen: (i) Inkonsistente Aussagenklassen ergeben sich häufig, wenn ein Historiker, ein Detektiv, ein Rechercheur die aus verschiedenen Quellen stammenden Informationen zu einem *x* (Person, Tathergang, Zeitraum, Ereignis usf.) zusammenträgt. Es ist die bei solchen Untersuchungen leitende Maxime der Umfassenheit, die oft Inkonsistenz herbeiführt und behandlungsbedürftig macht. – (ii) Auch schwache, affirmative Akte, die auf Indizien beruhen, führen (gegebenenfalls unter Zusatzprämissen) auf Inkonsistenz. Man betrachte etwa Prognosen zum Ausgang eines Sportereignisses. (iii) Vermutungen, die auf gleichen Indizien beruhen, aber durch verschiedenen Interpretationsverfahren und -hypothesen zustande kommen, führen oft zur Inkonsistenz; diese Form ist typisch für interpretatorische Arbeit in Kunst, Medizin, Psychologie usf. (iv) Inkonsistenzgefährdet ist das kognitive Geschäft, vor allem wenn es von Aussageschemata geleitet ist. Paradigmatisch ist etwa der mathematische Vollzug unter dem Komprehensionsschema. (↑12). – Der langen Beispielkette kurzer Sinn: Widerspruch und Inkonsistenz sind keineswegs pittoreske Zaungäste, sondern unwillkommene Dauerbegleiter des Erkenntnisgeschäfts.

’Kontradiktion’, ’Konsistenz’ und ’Inkonsistenz’ sind (innerhalb der voraussetzbaren Artikulationsmöglichkeiten) wohldefinierte Begriffe. Für weitere, in ihrer Umgebung angesiedelte Redeteile können sie als (Mit)Definiens hilfreich sein. So wird man etwa Antinomien, Paradoxien, Anomalien, Aporien usf. in der Regel als Widersprüche einer bestimmten Art charakterisieren; auf Basis derartiger Erklärungen sind dann z.B. alle Antinomien, also beweisbare Widersprüche, auch Kontradiktionen, aber nicht umgekehrt.

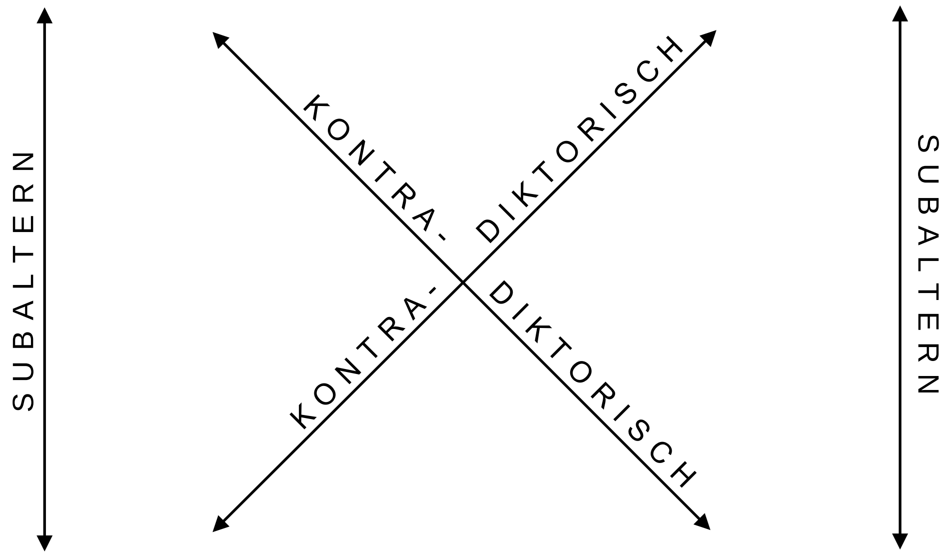
’(In)Konsistenz’ wird bei der Explikation von’(In)Kohärenz’ einschlägig. Wie immer man die in Wissens- und Wahrheitskonzeption beliebte Kohärenzbegrifflichkeit charakterisiert: In jedem Fall wird gelten, dass inkonsistente Aussagenklassen inkohärent und – kontraponiert – kohärente Mengen auch konsistent sind.

Das Konsistenzvokabular i.b. und die gesamte (meta)logische Ausdrucksmannschaft i.a. beziehen sich auf Aussagen resp. Aussagenklassen. Die genannten Begriffe finden jedoch bildungssprachlich auch Anwendung auf andere Gebilde: So soll etwa eine Überzeugung aus einem Überzeugungssystem folgen, eine Ideologie soll mit einer anderen unverträglich sein und eine Weltanschauung soll sich als inkonsistent herausstellen. Diese Übertragung auf Theorien, Ansätze, Ansichten, Auffassungen, Horizonte, (Welt)Anschauungen, Entwürfe, Positionen, Standpunkte, Sichtweisen, Ideologien, Paradigmata, Verständnisse, Vorverständnisse, Hintergrundverständnisse, Begleitverständnisse, Informationen und Informationssysteme, Überzeugungen und Überzeugungssysteme usf. ist insofern erlaubt, als alle diese – und viele hier ungenannte – Gebilde sich als Aussagenklassen und Aussagen darstellen lassen, ganz unerachtet ihrer sonstigen sehr heterogenen Eigentümlichkeiten.

Eine Kontradiktion war als Konjunktion einer beliebigen Aussage und ihrer Negation erklärt. Speziell im Blick auf universalquantifizierte Subjunktionen, Aussagen, die durch ’$\bigwedge x$(Mensch(x)$\rightarrow$Sterblich(x))’ exemplifiziert und durch $\bigwedge\xi(\Delta\rightarrow\Gamma)$ schematisch darstellbar sind, verwendet man eine Gegensatzterminologie, die durch das folgende sogenannte Logische Quadrat erläutert ist:

[11] $\bigwedge\xi\,(\Delta \to \Gamma)$ $\bigwedge\xi\,(\Delta \to \neg\Gamma)$

$\bigwedge x\,(\text{Mensch}(x) \to \text{Sterblich}(x))$ $\xleftrightarrow[\text{KONTRÄR}]{}$ $\bigwedge x\,(\text{Mensch}(x) \to \neg\,\text{Sterblich}(x))$



$\neg\bigwedge x\,(\text{Mensch}(x) \to \neg\,\text{Sterblich}(x))$ $\xleftrightarrow{\text{SUBKONTRÄR}}$ $\neg\bigwedge x\,(\text{Mensch}(x) \to \text{Sterblich}(x))$

$\neg\bigwedge\xi\,(\Delta \to \neg\Gamma)$ $\neg\bigwedge\xi\,(\Delta \to \Gamma)$

In der Folge sind die Aussagen nach ihren Standort mit L(inks) O(ben), R(echts) U(nten) usf. abgekürzt. {LO, RU} und {RO, LU} sind inkonsistent im Sinne der Oberflächeninkonsistenz. Konträre Aussagen bilden genau dann eine inkonsistente Menge, wenn das Antezedens für wenigstens eine Gegebenheit erfüllt ist, wenn also $\bigvee\xi\Delta$ gilt. Es ist also {LO, RO, $\bigvee\xi\Delta$} inkonsistent, während {$\neg\bigvee\xi\Delta$, LO, RO} nicht unbedingt inkonsistent ist. – Bei der überkommenen Darstellung im Rahmen einer aristotelischen Grammatik und Logik ist die Existenzforderung zur Erzwingung von Inkonsistenz überflüssig.

Das LU- und RU-Glied lässt sich mit komplexer Quantorumformung als '$\bigvee x(\text{Mensch}(x)\wedge\text{Sterblich}(x))$' bzw. '$\bigvee x(\text{Mensch}(x)\wedge\neg\text{Sterblich}(x))$' darstellen. Es ist LU resp. RU eine Konsequenz aus LO resp. RO falls das Antezedens nicht leer ist: {LO, $\bigvee\xi\Delta$} $\vdash$ LU und {RO, $\bigvee\xi\Delta$} $\vdash$ RU. Die subkonträren Gegensätze sind miteinander verträglich.

Das logische Quadrat ist ein Lehrstück aus der traditionellen Logik. Sein Klärungswert für diskursive Konfusionen besteht insbesondere in der Unterscheidung zwischen kontradiktorischen und konträren Gegensätzen: Viele Thesen sind ihrer Form nach universalquantifizierte Subjunktionen; und es macht einen erheblichen Unterschied, ob man gegen eine Aussage der Art $\bigwedge\xi(\Delta\to\Gamma)$ ihren konträren oder ihren kontradiktorischen Gegensatz verteidigt.

Ü 7 Bilden Sie das logische Quadrat mit

Δ: *u* ist Problem

Γ: $\bigvee$*w w* ist Lösung für *u*

Wählen Sie für LU und RU die partikularquantifizierte Form!

Anbei: Kontradiktorische Begriffe sind von Kontradiktionen zu unterscheiden. Ein Begriff bzw. – hier einfachheitshalber (↑6.3) – ein einstelliger kontradiktorischer Prädikator Φ ist so charakterisiert, dass es aus analytischen Gründen keinen Gegenstand gibt, dem er zukommt: Gäbe es einen viereckigen Kreis: sei x ein solcher. Dann ist x viereckig, also ist x kein Kreis. Ferner ist x aber Kreis. Damit fällt die Annahme: Es gibt keinen viereckigen Kreis. Erweitert man eine konsistente Sprache ordnungsgemäß um einen kontradiktorischen Prädikator Φ, so führt das nicht zur Inkonsistenz, sondern nur zur Beweisbarkeit der negierten Partikularaussage $\neg\bigvee\xi\Phi(\xi)$. Kontradiktorische Prädikatoren sind exempelfrei, obwohl nicht alle exempelfreien Prädikatoren kontradiktorisch sind; man betrachte etwa '..Hörer-der-Logik-II-Vorlesung-im-SS 2000-über-2m' oder '..seriöser-Greifswalder-Philosophie-Professor-im Jahr 2000'.

Die überlieferte Logik und Argumentationslehre kennt weitere Phänomene, die als Widersprüche geführt werden. Von diesen wird im Kontext der philosophischen Methodenlehre insbesondere die contradictio exercita bzw. die contradictio in actu exercito interessieren, die durch [2] exemplifiziert wird (↑16).

Es ist für viele Zwecke hilfreich, bezüglich (In)Konsistenz vier resp. fünf Fragen zu unterscheiden: die Explikationsfrage, die Nachweisfrage, die Entstehungs- und Behebungsfrage und die Rechtfertigungsfrage. – Die Explikationsfrage zielt auf die Natur der (In)Konsistenz. Sie wird durch Definitionen wie die oben vorgelegten (↑5.1.3) beantwortet. – Erweitert man die Gesamtperspektive dergestalt, dass man alternative Folgerungsreglements und damit alternative Folgerungsrelationen berücksichtigt, dann ergeben sich auch alternative Konsistenzbegriffe (↑ZUSATZ).

Auf Basis der Beantwortung der Explikationsfrage lässt sich die Nachweisfrage aufwerfen: Ist die Aussagenklasse *X* (in)konsistent? Dabei ist die Teilfrage nach der Inkonsistenz der einfachere Part: Man hat aus *X* lediglich eine Aussage und ihre Negation herzuleiten. Historische Beispiele, insbesondere die Entdeckung der Antinomien der Klassensprache, zeigen indes, dass die Aufdeckung der Inkonsistenz besonders dann eine nichttriviale Aufgabe ist, wenn die betrachtete Klasse über Aussagenschemata gegeben ist.

Die Teilfrage nach dem Konsistenznachweis hat zwei Antworten: Konsistenz wird – wie in der Diskussion des Links-Rechts-Beispiels (↑5.1.3) – relativ nachgewiesen: Wenn das Modell für die betrachtete Aussagenklasse konsistent ist, also die Klasse der interpretierenden arithmetischen Aussagen, dann auch diese. Der direkte Nachweis zielt darauf, ohne Rückgriff auf ein Modell, d.h. ohne Rückgriff auf eine Interpretation durch Aussagen einer anderen Sprache, zu zeigen, dass wenigstens eine Aussage nicht aus *X* folgt. – In beiden Fällen ergeben sich jedoch Folgefragen bezüglich der (In)Konsistenz der zum Nachweis benutzten Sprache(n).

Die Entstehungs- und Behebungsfrage sind naturgemäß miteinander verknüpft: Wie entstehen Inkonsistenzen und wie lässt sich Konsistenz (wieder)herstellen? Da das Inkonsistenzphänomen alle Bereiche des Erkenntnisgeschäfts überdeckt, sind ganz verschiedene, oft bereichsvariante Antworten erwartbar. Gleichwohl gibt es übergreifende Diagnosen und Therapien. Exemplarisch erinnert sei an die Stelligkeitserhöhung (↑1.1.1). Diese Strategien bereitzustellen und fortlaufend zu verbessern, ist eine zentrale Aufgabe der Philosophie als konzeptiv-diskursiver Grunddisziplin.

Die Rechtfertigungsfrage lautet: Warum – besser: Wozu – soll man im Erkenntnisgeschäft Inkonsistenz meiden und Konsistenz herstellen? Diese Frage wird häufig unter Rückgriff auf den Titel ’das (Nicht)Widerspruchsprinzip’ formuliert: Warum gilt das (Nicht)Widerspruchsprinzip bzw. das principium (non-)contradictionis? In Klärung dieser Fragestellung ist zunächst festzuhalten, dass die Ausdrucksverbindung ’das (Nicht)Widerspruchsprinzip’ in wenigstens fünffacher Weise gedeutet werden kann.

Erstens: Zufolge der empirisch-psychologischen Lesart besagt das (Nicht)Widerspruchsprinzip: Es ist empirisch ausgeschlossen, dass ein (normalsinniger) Mensch zugleich von einer Aussage A und der Negation von A überzeugt ist. Diese Aussage ist nach empirischen Kriterien zu bewähren, zu bestätigen bzw. zu falsifizieren. Dabei wird die Bedeutung von ’es ist empirisch ausgeschlossen, dass___’ bzw. von ’..ist überzeugt von..’ eine wesentliche Rolle spielen. Für diese Lesart ist die Rechtfertigungsfrage nicht einschlägig.

Zweitens: Die (junktoren)logische Lesart des Widerspruchsprinzip lautet, wie gesehen (↑4.2.5), einfach $\neg(A\wedge\neg A)$. Quantorenlogische Deutungen sind z.B. $\neg\bigvee\xi(\Delta\wedge\neg\Delta)$, $\bigwedge\xi\neg(\Delta\wedge\neg\Delta)$, $\neg(\bigwedge\xi\Delta\wedge\bigvee\xi\neg\Delta)$ usf. Für diese Aussagen(schemata) gibt es Beweise: Sie sind logisch-wahr und bedürfen insofern keiner Rechtfertigung.

Drittens: Ontologische Lesarten machen von genuin ontologischem Vokabular Gebrauch. Beispiele: Es ist nicht der Fall, dass ein Sachverhalt eine Tatsache ist und keine Tatsache ist. Unmöglich kommt dasselbe demselben unter derselben Rücksicht zu und nicht zu. Was ist, kann nicht unter derselben Rücksicht nicht sein. Auf Basis einer Formatierung muss sich zeigen, ob solche Aussagen logisch-wahr sind oder logisch-indeterminiert. Im ersten Fall existiert ein logischer Beweis. Im zweiten Fall hat man im Rückgriff auf die ontologischen Eigenausdrücke über Wahrheit/Falschheit zu befinden. In beiden Fällen ist jedoch die Rechtfertigungsfrage uneinschlägig.

Viertens: <u>Alethiologische</u> Lesarten machen vom Wahrheitsvokabular Gebrauch. Beispiele: (i) Nicht: Γ ist wahr und Γ ist nicht wahr. (ii) Nicht: Γ ist wahr und Γ ist falsch. (iii) Nicht: Γ ist wahr und die Negation von Γ ist wahr. (i) ist logisch wahr. (ii) ist wahr, falls z.B. '..ist falsch' über '..ist nicht wahr' definiert wird. (iii) muss auf nichtlogischem Wege, also im Rückgriff auf die Bedeutung der alethiologischen Vokabel, entschieden werden. In keinem Fall wird aber die oben angedeutete Rechtfertigungsfrage bedeutsam.

Fünftens: Die <u>methodologischen</u> Lesarten lauten etwa: (Re)Konstruiere Sprachen so, dass die entstehende Klasse wahrer Aussagen konsistent ist. Stelle im Inkonsistenzfall Konsistenz her. Kurz: Sei im Erkenntnisvollzug konsistent! – Es ist diese das Erkenntnisgeschäft gestaltende Norm, für die die Rechtfertigungsfrage einschlägig wird.

Wäre, so der Kerngedanke der Rechtfertigung, eine Sprache so gestaltet, dass sie inkonsistente wahre Aussagenklassen zuließe, dann gäbe es eine Aussage Δ, die gemeinsam mit ihrer Negation Konsequenz wäre. Mit dem Ex-falso-quodlibet folgte damit jede beliebige Aussage Γ. Da Konsequenzen wahrer Aussagen ihrerseits wahr sind, wäre jede beliebige Aussage Γ wahr.

Für die Objektebene geredet: Kein Gegenstand ist von einem anderen unterscheidbar: Jede Eigenschaft, die einem Gegenstand zukommt, kommt auch allen anderen zu. Jeder Gegenstand ist mit jedem identisch – und auch von ihm verschieden. In einer solchen Sprache wären die Institutionen von Irrtum und Lüge aufgehoben. Man könnte keinerlei Informationen einholen und alle Antworten auf alle Fragen wären gegenstandslos: Jede beliebige abweichende Antwort wäre gleichermaßen gültig.

Warum aber sollen, so könnte der Konsistenzskeptiker nachsetzen, Sprachen (und ihre Analysesprachen) konsistent sein? Warum soll überhaupt Unterscheidbarkeit gewährleistet sein? Welche Überlegungen lassen sich für die Inkonsistenzintoleranz ins Feld führen? – Fasst man diese deutungsbedürftige Frage als Frage nach den Zwecken, denen das alethische (und auch das übrige) kognitive Geschäft dient, und betrachtet man die Konsequenzen der Inkonsistenz für die Objektsprachen, dann ergibt sich: Inkonsistente Sprachen führen zur Ununterscheidbarkeit und können deshalb das weitere (Rede- und Nichtrede-)Handeln nicht orientieren: Wenn, um den locus classicus zu variieren, die Gegenstände nicht mehr unterscheidbar sind, ist der Weg nach Athen auch der Weg nach Megara und der Brunnen vor mir ist zugleich sicher beschreitbarer Grund. Dann kann der Wanderer den Weg nach Athen nehmen, um nach Megara zu kommen, und getrost weitergehen, wenn sich vor ihm ein Brunnenabgrund auftut. Mehr noch: Nicht einmal die Zwecksetzung ist noch realisierbar: Wer das In-den-Brunnen-stürzen für gut hält, hält es zugleich für nicht gut. Damit verfehlt aber das Handeln nicht nur seine Zwecke. Diese sind nicht einmal mehr in unterscheidbarer Weise zu artikulieren, das Zweckkataster wird ›blind‹ und das Wollen verliert seine Ziele. Fasst man auch das Zwecksetzen als zweckdienliches Handeln, dann lässt sich zusammenfassend formulieren: Zweckdienliches Handeln ist nur durch Unterscheidbarkeit garantiert. Nur Konsistenzberücksichtigung sichert Unterscheidbarkeit. Also ist Konsistenz gerechtfertigt als (notwendige) Bedingung für zweckdienliches Handeln ›überhaupt‹.

Die Verteidigung des (Nicht)Widerspruchsprinzips in seiner methodologischen Lesart ist durch zwei Hinweise zu flankieren: Zum einen ist Konsistenz für die Organisation des Erkenntnisgeschäfts nicht nur unverzichtbar, sondern auch alleine unzureichend: Konsistenz vermag weder die Setzung gerade dieser und jener Prinzipien zu steuern, noch generiert sie etwa Konstatierungsregeln. Konsistenz gewinnt ihre limitierende Kraft nur dann, wenn sie auf einen Input an zu limitierenden Material zugreifen kann. In Isolation stellt sie keinen kognitiven Wert dar: Konsistent ist auch die leere Aussagenklasse; und der gänzliche Verzicht auf Redehandlungen bewahrt in narrensicherer Weise davor, sich in Widersprüche zu verwickeln. No risk, no fun! Das Widerspruchsprinzip stellt die Leitplanken, aber nicht den Motor für die Erkenntnisfahrt.

Zum andern wird mit Überlegungen zur Sicherung und Wiederherstellung von Konsistenz der rein logische Bereich überschritten. Weitere methodologische und materiale Prinzipien müssen hier greifen. Mit rein logischen Mitteln erfolgt lediglich die (In)Konsistenzdiagnose!

Ü 8 a) Lesen Sie THOMAS VON AQUIN SthIq1a6. Thomas verhandelt dort das Vorgehen für den Fall, dass zwei Wissenschaften miteinander in Widerspruch geraten. Welches sind diese Wissenschaften? Nach welchem materialen Prinzip löst Thomas die inkonsistente Situation auf?

b) In NELSON, L.: Geschichte und Kritik der Erkenntnistheorie (= Gesammelte Schriften 2); Hamburg 1973, S.10, heißt es: „..; jedes Philosophem, das den exakten Wissenschaften widerstreitet, muss notwendig falsch sein.“ – Setzen Sie diese Einstellung in ein Inkonsistenzbehebungsprinzip um!

5.2. Verfahren der Diskursvereinfachung

Der vorangehende Punkt entwickelte die (meta)logische Perspektive: Im Rückgriff auf die Regeln für die logischen Operatoren konnte ein Ableitungs- und ein Folgerungsbegriff bestimmt werden, mit deren Hilfe die gebräuchlichen (meta)logischen Konzepte mit Schwerpunkt auf der (In)Konsistenz definiert worden sind. Insgesamt ist man damit imstande, regelgerecht zu folgern sowie Aussagenzusammenhänge unter (meta)logischen Gesichtspunkten zu beurteilen. – Die in der Folge vorgestellten Verfahren vereinfachen die bislang gegebenen Möglichkeiten in verschiedener Hinsicht: Die Non-Sequitur-Diagnose ist eine leicht handhabbare Prozedur um nachzuweisen, dass eine Aussage nicht Konsequenz einer Aussagenklasse ist (5.2.1). Mit Hilfe zulässiger Regeln, der Anziehung logisch wahrer sowie der Substitution logisch äquivalenter Aussagen lässt sich das Schlussgeschäft wirksam abkürzen (5.2.2).

5.2.1. Die Non-Sequitur-Diagnose

Um nachzuweisen, dass eine Aussage Γ Konsequenz einer Aussagenklasse X ist, legt man eine Ableitung von Γ aus X vor. Will man hingegen zeigen, dass Γ nicht Konsequenz aus X ist, hat man den Beweis dafür anzutreten, dass es eine solche Ableitung nicht gibt. Da derartige Überlegungen mit erheblichem Aufwand verbunden sind, legt es sich nahe, auf Basis einer alternativen, aber gleichwertigen Charakterisierung der Folgerungsbeziehung ein leicht handhabbares Verfahren zur Non-Sequitur-Diagnose bereitzustellen.

Der Rückblick zeigt, dass (nicht nur bei der Bestimmung der maximalkonsistenten Untermengen (↑5.1.3), sondern) schon im Auftaktkapitel eine derartige Prozedur verwendet worden ist (↑1.1.2): Zwischen Prämissen und (angeblicher) Konklusion konnte, so die dort verwendete Metapher, durch Angabe von Gegenbeispielen ein Zaun gezogen werden: Die nunmehr formatiert darstellbare Aussage ’$\bigwedge x(\text{Handlung}(x)\rightarrow\bigvee z(\text{Zweck}(z)\wedge\text{Wird-verfolgt-mit}(z,x)))$’ resp. die aus ihr bildbare Einerklasse hat deshalb die Aussage ’$\bigvee z(\text{Zweck}(z)\wedge\bigwedge x(\text{Handlung}(x)\rightarrow\text{Wird-verfolgt-mit}(z,x)))$’ nicht zur Konsequenz, weil es eine Interpretation gibt, die die erste Aussage wahr, die zweite jedoch falsch macht: Interpretiert man ’Handlung(..)’ durch ’Ganze-Zahl(..)’, ’Zweck(..)’ durch ’Positive-ganze-Zahl(..)’ und ’Wird-verfolgt-mit(..,..)’ durch ’..>..’, dann wird die Prämisse, also die Aussage ’$\bigwedge x(\text{Ganze-Zahl}(x)\rightarrow\bigvee z(\text{Positive-ganze-Zahl}(z)\wedge z>x))$’, wahr, während die (angebliche) Konklusion, also ’$\bigvee z(\text{Positive-ganze-Zahl}(z)\wedge\bigwedge x(\text{Ganze-Zahl}(x)\rightarrow z>x))$’, falsch wird. Da aus Wahrem aber nichts Falsches folgt, ist die betrachtete zweite Aussage keine Konsequenz der ersten.

Wie funktioniert dieses Verfahren im Detail? Wie ist insbesondere die Rede von der Interpretation zu verstehen? – Eine Interpretation besteht aus fünf Schritten:

[12] a) Niederschrift der zu interpretierenden Aussagen (=Interpretandum)

b) Spezifikation des Bereichs der Interpretation

c) Niederschrift der Interpretationsbeziehung

d) Niederschrift der interpretierenden Aussagen (=Interpretans)

e) Erhebung des alethischen Status der Interpretantia

Dieses Vorgehen soll umgehend an dem soeben erinnerten Beispiel vorgeführt werden:

[12]° a) $\bigwedge$x (Handlung(x) $\rightarrow$ $\bigvee$z (Zweck(z) $\wedge$ Wird-verfolgt-mit(z,x)))

$\bigvee z$ (Zweck(z) $\wedge$ $\bigwedge x$ (Handlung(x) $\rightarrow$ Wird-verfolgt-mit(z,x)))

b) Klasse der natürlichen Zahlen

c) ’Handlung(..)’ $\simeq_i$ ’Ganze-Zahl(..)’

’Zweck(..)’ $\simeq_i$ ’Positive-ganze-Zahl(..)’

’Wird-verfolgt-mit(..,..)’ $\simeq_i$ ’..>.. ’

d) $\bigwedge x$ (Ganze-Zahl(x) $\rightarrow$ $\bigvee z$ (Positive-ganze-Zahl(z) $\wedge$ $z > x$))

$\bigvee z$ (Positive-ganze-Zahl(z) $\wedge$ $\bigwedge x$ (Ganze-Zahl(x) $\rightarrow$ $z > x$))

e) Das erste Interpretans ist arithmetisch-wahr. Das zweite Interpretans ist arithmetisch-falsch.

Die Niederschrift der Interpretanda erfolgt im bekannten grammatischen Format. Dieses lässt die logische Struktur erkennen. Mögliche Interpretationskandidaten sind lediglich die atomaren nicht-logischen Eigenausdrücke, die Teilausdruck des Interpretandums sind. Alle logischen Operatoren, also Quantoren, Junktoren und der Identitätsprädikator sowie Variablen, sind keine Deutungskandidaten. Sie bilden lediglich das ›Gerüst‹ der Interpretation. Interpretans und Interpretandum unterscheiden sich also nicht in der logischen Struktur, sondern in den Eigenausdrücken: So ist das erste Interpretandum eine universalquantifizierte Subjunktion, deren Sukzedens die Partikularquantifikation einer Konjunktion ist; und eben dies trifft auch auf das erste Interpretans zu.

Bei der unter b) erfolgten Angabe des Diskursbereichs bzw. des Bereichs der Interpretation bzw. des zugrundegelegten Individuenbereichs ist auf die Nichtleerheit dieser Klasse zu achten: Ließe man auch leere Interpretationsbereiche zu, dann könnte u.a. der Übergang von $\bigwedge\xi\Delta$ zu $\bigvee\xi\Delta$ als unzulässig erwiesen werden, weil die Partikularaussage unter einer solchen Interpretation allemal falsch wäre.

Unter c) wird die Interpretationsbeziehung dokumentiert: In der linken Spalte stehen die zu interpretierenden Teilausdrücke, in der rechten die interpretierenden. Das Zeichen '..$\simeq_i$..' wird gelesen als '..wird interpretiert/gedeutet durch bzw. als..'. Jedem Ausdruck in der linken Spalte darf nur ein Ausdruck in der rechten Spalte zugeordnet werden. Sodann müssen die Einträge in beiden Spalten grammatisch zueinander ›passen‹: Einem k-stelligen Prädikator resp. Funktor in der linken korrespondiert genau ein k-stelliger Prädikator resp. Funktor in der rechten Spalte; und einer Individuenkonstante resp. einem Parameter in der linken entspricht genau eine Individuenkonstante in der rechten Spalte.

Die Forderung nach Gleichstelligkeit von zu interpretierendem und interpretierendem Operator ist im folgenden Sinne cum grano salis zu lesen: Als interpretierender Ausdruck für z.B. 'Handlung(..)' kann etwa auch '..<1' oder '..ist-Vater-von P.E.Bach' oder '$\bigvee y$..>*y*' auftreten; und als interpretierender Ausdruck von 'Wird-verfolgt-mit(..,..)' kann etwa auch '$\bigvee y$ Ist-Summe-von(*y*,..,..) benutzt werden. Entscheidend ist dieselbe Anzahl freier Stellen im Interpretandum und Interpretans.

Unter d) erfolgt die Niederschrift der Interpretantia. Diese entstehen dadurch, dass die zu interpretierenden atomaren Eigenausdrücke an allen Stellen ihres Vorkommens durch die interpretierenden Ausdrücke ersetzt werden. Durch diese Operation bleibt die logische Struktur unberührt. Das Interpretationskonzept lässt sich insgesamt so umschreiben: Eine Aussage A (einer Sprache *S*) ist Interpretans einer Aussage B (einer Sprache *S*') bezüglich eines nichtleeren Individuenbereichs D, wenn man A dadurch erhält, dass man alle Prädikatoren und Funktoren von B uniform durch gleichstellige Prädikatoren bzw. ›Formeln‹ und Funktoren bezüglich D ersetzt und indem man Individuenkonstanten und Parameter von B uniform durch Individuenkonstanten für D-Individuen ersetzt.

Eine Aussagenklasse wird interpretiert, indem man jede einzelne Aussage dieser Klasse interpretiert; dabei sind die atomaren Eigenausdrücke in allen Aussagen gleich zu interpretieren: Kommt etwa 'Zweck(..)' in mehreren Aussagen vor, dann ist 'Zweck(..)' an allen Stellen seines Vorkommens durch denselben interpretierenden Ausdruck zu ersetzen.

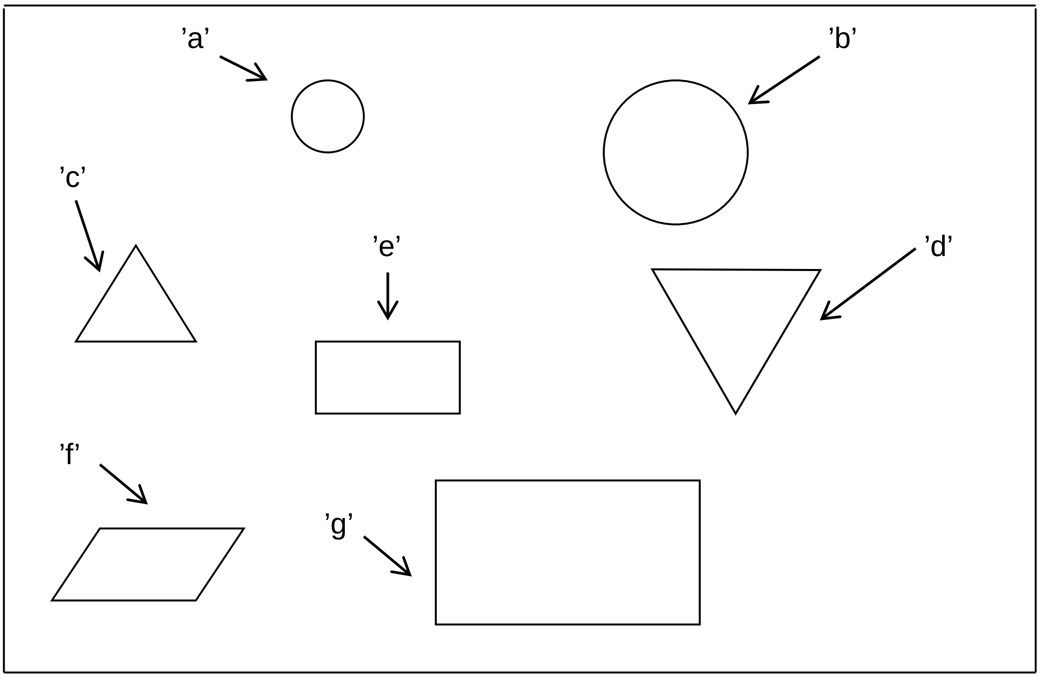
In e) erfolgt die Feststellung des Wahrheitsstatus der Interpretantia. Um diesen Akt zu einer leicht nachvollziehbaren und anfechtungsfreien Handlung zu machen, wird als interpretierende

Sprache eine übersichtliche, häufig benutzte, gut untersuchte und mit akzeptierten Mitteln als konsistent nachgewiesene Sprache gewählt: Neben Zahlen- und Klassensprachen erstellt man sich auch oft ›Baukastensysteme‹, in denen die alethischen Verhältnisse zweifelsfrei sind; besonders geeignet zur Illustration sind auch Pfeilfiguren.

Eine Interpretation macht eine Aussagenklasse wahr, wenn sie jede Aussage der Klasse bzw. (im Falle endlicher Klassen) die Konjunktion der Aussagen wahr macht, wenn also alle Interpretantia in der Interpretanssprache wahr sind. Stellt man unter e) fest, dass die vorgenommene Interpretation die Aussagenklasse wahr macht, die (vorgebliche) Konsequenz bzw. deren Interpretans jedoch falsch wird, dann kann man das Non-Sequitur diagnostizieren.

Die Beherrschung der Non-Sequitur-Diagnose ist gebunden an die Fertigkeit des Interpretierens; daher soll diese zunächst exemplarisch eingeübt werden. Als erstes Interpretandum diene die Universalaussage '$\bigwedge x$(Mensch(x)$\rightarrow$Sterblich(x))' (=i)). Interpretiert man (auf dem Bereich der natürlichen Zahlen) 'Mensch(..)' durch 'Primzahl(..)' und 'Sterblich(..)' durch 'Gerade-Zahl(..)', dann ergibt sich das falsche Interpretans '$\bigwedge x$(Primzahl(x)$\rightarrow$Gerade-Zahl (x))' (=ii)). Deutet man hingegen 'Mensch(..)' durch '..>12' und 'Sterblich(..)' durch '..>10', dann resultiert mit '$\bigwedge x$(x>12$\rightarrow$$x$>10)' (=iii)) ein wahres Interpretans. – Man betrachte nun folgenden Baukasten:

[13]



Die Buchstaben benennen die Figuren. Für die folgenden Interpretationen werden die Prädikatoren 'Ist-Kreis(..)', 'Ist-Dreieck(..)', 'Ist-Viereck(..)' und 'Ist-Vieleck(..)' in ihrer üblichen Bedeutung verwendet; so gelten z.B. in der Baukastensprache die Aussagen 'Ist-Dreieck(d)', 'Ist-

Kreis(b)’ und ’$\neg\bigvee x$(Kreis(x)$\wedge$Ist-Viereck(x))’. – Diese Miniatursprache findet bedarfsweise Erweiterung. Deutet man vor dem Hintergrund des Baukastenuniversums ’Mensch(..)’ durch ’Ist-Viereck(..)’ und ’Sterblich(..)’ durch ’Ist-Vieleck(..)’, dann resultiert mit ’$\bigwedge x$(Ist-Viereck(x)$\rightarrow$Ist-Vieleck(x))’ (=iv)) ein wahres Interprans. Dagegen ist die Aussage ’$\bigwedge x$(Kreis(x)$\rightarrow$Dreieck(x))’ (=v)) eine falsches Interpretans in der Baukastensprache; sie entsteht durch die Deutung von ’Mensch(..)’ durch ’Ist-Kreis(..)’ und von ’Sterblich(..)’ durch ’Ist-Dreieck(..)’. Die folgende Liste enthält das Interpretandum sowie die vier vorgenommenen Deutungen:

[14] i) $\bigwedge$x (Mensch(x) $\rightarrow$ Sterblich(x))

ii) $\bigwedge x$ (Primzahl(x) $\rightarrow$ Gerade-Zahl (x))

iii) $\bigwedge x$ (x > 12 $\rightarrow$ x > 10)

iv) $\bigwedge x$ (Ist-Viereck(x) $\rightarrow$ Ist-Vieleck(x))

v) $\bigwedge x$ (Kreis(x) $\rightarrow$ Dreieck(x))

Logisch indeterminierte Aussagen sind dadurch ausgezeichnet, dass sie wahre wie auch falsche Interpretantia besitzen. Anders als bei logisch determinierten Aussagen entscheidet eben nicht schon die Bedeutung der logischen Operatoren alleine über den alethischen Status. – Die folgende Tabelle enthält ein früheres Beispiel ($\uparrow$[4]) als Interpretandum und wiederum je ein wahres und ein falsches arithmetisches und baukastensprachliches Interpretans; die Deutungszuordnung lässt sich unschwer herstellen:

[15] i) $\neg\bigvee x$ (Duty(x) $\wedge$ Binds-universally(x))

ii) $\neg\bigvee x$ (Gerade-Zahl(x) $\wedge$ Ungerade-Zahl(x))

iii) $\neg\bigvee x$ (Gerade-Zahl(x) $\wedge$ Primzahl(x))

iv) $\neg\bigvee x$ (Dreieck(x) $\wedge$ Kreis(x))

v) $\neg\bigvee x$ (Dreieck(x) $\wedge$ Vieleck(x))

Ü 9 Kürzen Sie mit ’..G..’ den Prädikator ’..ist gleichschwer..’ und mit ’P(..)’ den Prädikator ’Ist-physikalischer-Körper(..)’ ab! Liefern Sie je eine Interpretation, die die folgende Aussagenklasse arithmetisch-wahr, arithmetisch-falsch, baukasten-wahr und baukasten-falsch macht:

{’$\bigwedge x\bigwedge y\bigwedge z$ (x G y $\wedge$ y G z $\rightarrow$ x G z)’, ’$\bigwedge x\bigwedge y$ (P(x) $\wedge$ P(y) $\rightarrow$ (x G y $\vee$ y G x))’}

Für die Baukasteninterpretation ist die Sprache um geeignete zweistellige Prädikatoren zu erweitern wie etwa ’..ist eckengleich..’, ’..ist eckenkleiner..’ usf.

Wie die Aussagen von Beispiel [15] und von Ü9 zeigen, müssen Interpretanda nicht wahr sein; im ersten Fall ist der Wahrheitsstatus offen, im zweiten Fall ist das Interpretandum als Ganzes falsch. – Die folgende Tabelle bietet eine Interpretation einer Aussage mit Individuenkonstanten:

[16] a) Philosoph(Sokrates) $\wedge$ Lehrer-von(Sokrates, Platon)

b) Klasse der natürlichen Zahlen

c) ’Sokrates’ $\simeq_i$ ’5’

’Platon’ $\simeq_i$ ’10’

’Philosoph(..)’ $\simeq_i$ ’Primzahl(..)’

’Ist-Lehrer-von(..,..)’ $\simeq_i$ ’..<.. ’

d) Primzahl(5) $\wedge$ 5 < 10

e) Das Interpretans ist wahr, d.h. das Interpretandum ist unter der angenommenen arithmetischen Interpretation wahr.

Verändert man die Interpretation von ’Sokrates’, indem man ’4’ als Interpretans wählt, dann ergibt sich das falsche Interpretans ’Primzahl(4)$\wedge$4<10’. – Ein wahres Interpretans aus der Baukastensprache wäre ’Rechteck(e)$\wedge$Eckengleich(e,f)’; mit ’Dreieck(e)$\wedge$Eckengleich(e,f)’ ist hingegen ein falsches Interpretans gegeben.

Interpretiert man den Funktor ’der-Vater-von(..)’ durch ’ quer(..)’ (Lies: die-Quersumme-von(..)), den Funktor ’die-Mutter-von(..)’ durch ’..^{2}’ (Lies: das-Quadrat-von(..)), ferner: den Prädikator ’Verheiratet-mit(..,..)’ durch ’..<..’, schließlich die Individuenkonstante ’Hans’ durch ’4’, dann ergibt sich für das Interpretandum ’Verheiratet-mit(der-Vater-von(Hans),die-Mutter-von(Hans))’ (=i)) das wahre Interpretans ’quer(4)<4^2’ (=ii)). Interpretiert man hingegen ’Verheiratet-mit(..,..)’ durch ’..>..’, dann erhält man das falsche Interpretans ’quer(4)>4^2’ (=iii)).

[17] i) Verheiratet-mit(der-Vater-von(Hans), die-Mutter-von(Hans))

ii) quer(4)<4^2

iii) quer(4)>4^2

Abschließend sei noch erwähnt, dass es auch in dem Sinne ›innere‹ Interpretationen gibt, als z.B. arithmetische Interpretanda arithmetisch interpretiert werden können. So ist etwa ’$\bigwedge x(x>5\rightarrow x>6)$’ ein (falsches) arithmetisches Interpretans von ’$\bigwedge x(x>10\rightarrow x\geq 5)$’ und ’$\bigwedge x\bigwedge y(x\cdot y=y\cdot x)$’ ist ein (wahres) arithmetisches Interpretans von ’$\bigwedge x\bigwedge y(x+y=y+x)$’.

Nach dieser Einübung ins Interpretieren soll der Blick nochmals auf den Folgerungsbegriff und seine Charakterisierungen gewendet werden: Die Definition von ’..$\vdash$..’ über den Ableitungsbegriff ist von folgender Idee geleitet: Ob Γ aus *X* folgt, wird durch die Regeln für die logischen Operatoren fixiert. Anders: Es hängt von der Bedeutung der logischen Operatoren ab – und nur von dieser –, ob eine Aussage aus einer Aussagenklasse folgt. Umgekehrt spielt also die Bedeutung der Eigenausdrücke der Aussagen für das (Nicht)Bestehen der Konsequenzschaft keine Rolle. Man betrachte dazu zwei Zusammenhänge:

[18] i) {’$\bigwedge x$ Mensch(x)’} $\vdash$ ’$\neg \bigvee x \neg$ Mensch(x)’

ii) $\vdash$ ’$\bigwedge x$ Mensch(x) $\rightarrow \neg \bigvee x \neg$ Mensch(x)’

i) und ii) sind nach dem Deduktionstheorem bzw. seiner Umkehrung gleichwertig. Den Umstand, dass die Bedeutung der Eigenausdrücke keine Rolle für den Folgerungszusammenhang bzw. die logische Wahrheit spielt, kann man dadurch ausdrücken, dass die Folgerungsbeziehung, die logische Wahrheit, unter jeder Interpretation von ’Mensch(..)’ bestehen bleibt. Nimmt man noch den Gedanken hinzu, dass das Schließen nicht von Wahrem zu Falschem führen darf, dann ergibt sich folgende abschließende Charakterisierung von Konsequenzschaft mit Hilfe der Interpretationsbegrifflichkeit: Γ folgt genau dann aus *X* - $X\vdash\Gamma$ -, wenn jede Interpretation, die *X* wahr macht, auch Γ wahr macht.

Diese zweite Charakterisierung von Konsequenzschaft ist mit der ersten äquivalent (und auch nur insoweit erlaubt (↑11)): Es gibt genau dann eine Ableitung von Γ aus *X*, wenn jede Interpretation, die *X* wahr macht, auch Γ wahr macht. (↑ANMERKUNG).

Der für die Non-Sequitur-Diagnose hilfreiche Aspekt besteht in der Charakterisierung der Nicht-Konsequenz. Γ ist nicht Konsequenz aus *X* – $X\nvdash\Gamma$ – genau dann, wenn es wenigstens eine Interpretation gibt, die *X* wahr macht, Γ aber falsch. – Es ist genau dieser begriffliche Zusammenhang, der die Non-Sequitur-Diagnose zu einem leicht handhabbaren und universell einsetzbaren Verfahren macht. Dies sei nochmals an zwei Beispielen vorgeführt. Zunächst wird gezeigt, dass die Aussage ’$\bigwedge$y(Naturwissenschaftler(y)$\rightarrow$Wissenschaftler(y))’ keine Konsequenz aus der Aussagenklasse {’$\bigwedge$z(Physiker(z)$\rightarrow$Wissenschaftler(z))’, ’$\bigwedge$w(Physiker(w)$\rightarrow$Naturwissenschaftler(w))’} ist.

[19] a) $\bigwedge z$ (Physiker(z) $\rightarrow$ Wissenschaftler(z))

$\bigwedge w$ (Physiker(w) $\rightarrow$ Naturwissenschaftler(w))

$\bigwedge y$ (Naturwissenschaftler(y) $\rightarrow$ Wissenschaftler(y))

b) Klasse der natürlichen Zahlen

c) ’Physiker(..)’ $\simeq_i$ ’..> 10 ’

’Wissenschaftler(..)’ $\simeq_i$ ’..> 5’

’Naturwissenschaftler(..)’ $\simeq_i$ ’..> 1’

d) $\bigwedge z\ (z > 10 \rightarrow z > 5)$

$\bigwedge w\ (w > 10 \rightarrow w > 1)$

$\bigwedge y\ (y > 1 \rightarrow y > 5)$

e) Die Prämissen sind unter der vorgenommenen arithmetischen Interpretation wahr, die (vorgebliche) Konklusion ist jedoch falsch.

Auf Basis der Feststellung der alethischen Gegebenheiten unter e) kann man schließen, dass die (vorgebliche) Konklusion ›in Wirklichkeit‹ nicht aus der Prämissenklasse folgt. – Anbei: Die Elemente der Prämissenklasse sind wahr und die als Konklusion hingestellte Aussage ist ebenfalls wahr. Dennoch stehen sie nicht in der Folgerungsrelation. Das Corpus der wahren Aussagen ist also bezüglich der Konsequenzschaft nicht so gebildet, dass zwischen jeder Klasse wahrer Aussagen und einer wahren Aussage allemal die Folgerungsbeziehung besteht. – Das zweite Beispiel wird nur in den Schritten a) und d) notiert:

[20] a) Südlich-von(Rom, München)

Südlich-von(München, Hamburg)

Südlich-von(Rom, Hamburg)

d) Vorgänger-von(3, 4)

Vorgänger-von(4, 5)

Vorgänger-von(3, 5)

Unter der vorgenommenen arithmetischen Interpretation sind die beiden ersten Aussagen wahr, während die letzte falsch ist. Diese ist also keine Konsequenz aus der Klasse der beiden ersten.

An dieser Stelle mag die Schlussintuition Widerspruch anmelden: Das hängt nicht nur damit zusammen, dass Prämissen und Konklusion wahr sind, sondern wird vornehmlich durch die Natürlichkeit einer ›mitgedachten‹ Prämisse herbeigeführt: Wegen der unterstellten Transitivität des Südlichliegens – $\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z$(Südlich-von($x$, y) $\wedge$ Südlich-von(y, z) $\rightarrow$ Südlich-von(x, z)) – erscheint der Schluss korrekt. Er erfüllt diese Qualität aber erst, wenn man die Transitivität tatsächlich hinzufügt. Die Non-Sequitur-Diagnose zwingt also dazu, ›stillschweigend unterstellte‹ bzw. ›implizite‹ Prämissen aufzudecken.

Ü 10 Zeigen Sie, dass

a) {'$\bigvee x$ (Philosoph(x) $\wedge$ Gestört(x))', '$\bigvee x$ (Professor(x) $\wedge$ Gestört(x))'} $\nVdash$ '$\bigvee x$ (Philosoph(x) $\wedge$ Professor(x))'

b) {'$\bigwedge x$ (Mensch(x) $\rightarrow$ Organismus(x))', '$\bigvee x$ (Organismus(x) $\wedge$ Kurzlebig(x))'} $\nVdash$ '$\bigvee x$ (Mensch(x) $\wedge$ Kurzlebig(x))'

Mit Hilfe der Non-Sequitur-Diagnose lässt sich auch feststellen, ob eine Klasse X konsistent ist: Man hat nur von einer Aussage Δ zu zeigen, dass sie nicht aus X folgt; und dazu muss man lediglich eine Interpretation angeben, die die Elemente von X wahr macht, Δ aber falsch. Das Verfahren lässt sich noch vereinfachen: Man braucht zum Konsistenznachweis lediglich zu zeigen, dass es eine Interpretation gibt, die die Elemente von X wahr macht, da jede Interpretation jede logisch-falsche Aussage falsch macht und es somit zu jeder Interpretation wenigstens eine Aussage gibt, die unter dieser Interpretation falsch ist und damit keine Konsequenz einer unter dieser Interpretation wahren Aussagenklasse darstellt.

Die Non-Sequitur-Feststellung ist auch das geeignete Instrument zur (Un)Entscheidbarkeitsuntersuchung: Zufolge der Definition der (Un)Entscheidbarkeit einer Aussage durch eine Aussagenklasse ist zu untersuchen, ob die Aussage oder ihre Negation aus der Klasse folgt; und um zu zeigen, dass eine ganze Aussagenklasse (nicht)redundant ist, ist für jedes Element der Klasse das Folgerungsverhältnis zum Rest zu klären. – Die auf der Klasse der physikalischen Körper (mittlere Größe) erklärte Relation des Gleichschwerseins ist ein geläufiges Beispiel für Gleichheiten (↑Ü 9). Diese können u.a. durch die folgenden drei Prinzipien der Geschlossenheit (=GE), der Reflexivität (=RE) und der Linkskomparativität (=LK) charakterisiert werden:

[21] $\bigwedge x \bigwedge y\ (x \text{ G } y \rightarrow \text{P}(x) \wedge \text{P}(y))$ [GE]

$\bigwedge x\ (\text{P}(x) \rightarrow x \text{ G } x)$ [RE]

$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z\ (x \text{ G } y \wedge x \text{ G } z \rightarrow y \text{ G } z)$ [LK]

Andere Gleichheitsprinzipien sind aus dieser Dreierklasse unschwer zu gewinnen: Zum Nachweis der Feldeigenschaft – '$\bigwedge x(\text{P}(x) \leftrightarrow \bigvee y(y\text{G}x \vee x\text{G}y))$' – genügt GE und RE. Zum Nachweis der Symmetrie – '$\bigwedge x \bigwedge y(x\text{G}y \rightarrow y\text{G}x)$' – sind alle charakterisierenden Prinzipien nötig. Transitivität – '$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z(x\text{G}y \wedge y\text{G}z \rightarrow x\text{G}z)$' –, Rechtskomparativität – '$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z(x\text{G}z \wedge y\text{G}z \rightarrow x\text{G}y)$' – und Zirkularität – '$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z(x\text{G}y \wedge y\text{G}z \rightarrow z\text{G}x)$' – ergeben sich dann mit Symmetrie.

Ü 11 Zeigen Sie, dass Symmetrie, Transitivität, Rechtskomparativität und Feld Konsequenzen aus {GE, RE, LK} sind.

Die Klasse {GE, RE, LK} wäre nun deduktiv redundant bzw. abhängig, wenn wenigstens eine der drei Aussagen aus den verbleibenden ableitbar wäre. Kann hingegen für jede der drei Aussagen gezeigt werden, dass sie keine Konsequenz aus dem Rest ist, dann ist die Aussagenklasse nicht redundant bzw. unabhängig. Die Problemlösung hat folgenden Verlauf:

[22] i) OB {GE, RE, LK} ist deduktiv redundant

ii) OB {GE, RE} $\vdash$ LK

ii-i) Ja ⇢ {GE, RE, LK} ist deduktiv redundant

ii-ii) Nein ⇢ weiter zu iii)

iii) OB {GE, LK} $\vdash$ RE

iii-i) Ja ⇢ {GE, RE, LK} ist deduktiv redundant

iii-ii) Nein ⇢ weiter zu iv)

iv) OB {LK, RE} $\vdash$ GE

iv-i) Ja ⇢ {GE, RE, LK} ist deduktiv redundant

iv-ii) Nein ⇢ {GE, RE, LK} ist nicht deduktiv redundant

Um zu zeigen, dass {GE, RE}$\nvdash$LK, interpretiere man 'P(..)' durch 'NaZ(..)', '..G..' durch '..$\geq$..'. Es sind nun einerseits '$\bigwedge x \bigwedge y(x \geq y \rightarrow \mathrm{NaZ}(x) \wedge \mathrm{NaZ}(y))$' und '$\bigwedge x(\mathrm{NaZ}(x) \rightarrow x \geq x)$' wahre Aussagen der arithmetischen Sprache; andererseits ist aber '$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z(x \geq y \wedge x \geq z \rightarrow y \geq z)$' eine falsche arithmetische Aussage: Mit '$4 \geq 1 \wedge 4 \geq 3$' ist nicht '$1 \geq 3$' gegeben.

Um zu zeigen, dass {GE, LK}$\nvdash$RE, belasse man es bei der Interpretation von 'P(..)' durch 'NaZ(..)'; für '..G..' resp. 'xGy' wird mit '$x>10 \wedge y>10$' eine konjunktive Formel gewählt. Es sind dann zwar '$\bigwedge x \bigwedge y(x>10 \wedge y>10 \rightarrow \mathrm{NaZ}(x) \wedge \mathrm{NaZ}(y))$' sowie '$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z((x>10 \wedge y>10) \wedge (x>10 \wedge z>10) \rightarrow (y>10 \wedge z>10))$' wahr unter dieser Interpretation; aber die Aussage '$\bigwedge x(\mathrm{NaZ}(x) \rightarrow x>10 \wedge x>10)$' ist arithmetisch falsch.

Ins Anschauliche übersetzt, besagt LK: Trifft ein Pfeil, der von einem Relationsglied ausgeht, auf Relationsziele, dann sind auch diese wechselseitig durch die Relation verbunden. Wegen11*12$\wedge$11*12 gilt für die Relationsziele auch 12*12. Da aber nicht alle Relationsglieder den Rückkehrpfeil aufweisen, ist der *-Prädikator nicht reflexiv.

Um zu zeigen, dass {RE, LK}$\nvdash$GE wird ’P(..)’ durch ’Primzahl(..)’ und ’..G..’ durch den Identitätsprädikator interpretiert. Es sind ’$\bigwedge x(\text{Primzahl}(x) \rightarrow x=x)$’ sowie ’$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z(x=y \wedge x=z \rightarrow y=z)$’ wahre arithmetische Aussagen; demgegenüber stellt ’$\bigwedge x \bigwedge y(x=y \rightarrow \text{Primzahl}(x) \wedge \text{Primzahl}(y))$’ eine falsche Aussage unter dieser Interpretation dar.

Insgesamt stellt damit {RE, GE, LK} eine nicht redundante Klasse dar. Zieht man diese Aussagen gemeinsam zur Charakterisierung der Gleichheitsprädikatoren heran, dann kann man auf keine verzichten (↑6).

Ü 12 a) Ersetzen Sie in [21] die Linkskomparativität durch die Transitivität. Untersuchen Sie, ob die Symmetrie dann noch erreichbar ist. Führen Sie dieselbe Untersuchung durch nach Ersetzung der Linkskomparativität durch Rechtskomparativität und Zirkularität.

b) Zeigen Sie, dass die Aussage ’$\bigwedge x \bigwedge y(x\text{G}y \leftrightarrow \text{P}(x) \wedge \text{P}(y) \wedge \bigwedge z(z\text{G}x \leftrightarrow z\text{G}y))$’ mit der Konjunktion von RE, GE und LK äquivalent ist!

Die ausführliche Untersuchung der Prädikatoren ’P(..)’ und ’..G..’ resp. – in materialer Redeweise – der auf dem Bereich der physikalischen Körper erklärten Gewichtsgleichheit gilt nicht diesen singulären Verhältnissen als solchen; sie finden vielmehr nur insofern Aufmerksamkeit, als sie Gleichheiten X auf einem Bereich Φ repräsentieren. Die charakterisierenden Prinzipien können als metasprachliche Schemata so ausgedrückt werden:

[21]° $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\ (\mathrm{X}(\omega, \xi) \rightarrow \Phi(\omega) \wedge \Phi(\xi))$ [GE]

$\bigwedge\omega\ (\Phi(\omega) \rightarrow \mathrm{X}(\omega, \omega))$ [RE]

$\bigwedge\omega\bigwedge\xi\bigwedge\zeta\ (\mathrm{X}(\omega, \xi) \wedge \mathrm{X}(\omega, \zeta) \rightarrow \mathrm{X}(\xi, \zeta))$ [LK]

Ganz analog lassen sich auch die folgenden Prinzipien wie Symmetrie und Transitivität oder auch das mit der Konjunktion von GE, RE und LK äquivalente Prinzip aus Ü 12 b) metasprachlich darstellen. – Die gesamte Rede von der Interpretation, von wahren und falschen Interpretantia usf. lässt sich auf derartige Schemata übertragen. So ergibt sich durch Interpretation von X durch ’..wertgleich..’ und von Φ durch ’Ware(..)’ eine wahre Interpretation der unter [21]° gegebenen Prinzipienklasse. Demgegenüber liefert ’..<..’ für X und ’NaZ(..)’ für Φ eine falsche Interpretation.

Ü 13 Liefern Sie eine weitere wahre und eine weitere falsche Interpretation für die Prinzipien von [21]°.

<u>ANMERKUNG</u>: Die lehrbuchübliche Darstellung der Logik umfasst vier Teile: Im ersten Teil wird der Begriff der Sprache erster Stufe und der daraus entwickelbaren Begriffe (Terme, Formeln, Teilterme, Teilformeln, Substitution usf.) untersucht. Der zweite Teil bildet die Definition der sogenannten „syntaktischen“, „kalkülmäßigen“ Konsequenzrelation bzw. der Ableitbarkeitsrelation. Im Zuge dieser Ausführungen wird auch Konsistenz, Maximalkonsistenz usf. dargestellt. Der dritte Teil legt eine Definition des sogenannten ›semantischen‹, modelltheoretischen Konsequenzbegriffs dar. Die Begrifflichkeit des zweiten Teils wird im Einzelnen nachgezeichnet. Der logischen Beweisbarkeit korrespondiert z.B. die Allgemeingültigkeit und der Konsistenz entspricht die Erfüllbarkeit. Der vierte Teil zeigt schließlich, dass syntaktische und semantische Konsequenzschaft zusammenfallen. Dieser sogenannte Adäquatheitsbeweis sieht den semantischen Konsequenzbegriff als wesentlich an und zeigt dann, dass der syntaktische gegenüber diesem korrekt und vollständig ist. – Der hier vorgelegte Text ist an dieser Aufgabenstellung der Logik nicht interessiert, sondern zieht aus den bekannten logischen Zusammenhängen nur Nutzen für das verfolgte Propädeutikprojekt. Im Grammatikkapitel (↑3) werden Begriffe des ersten Teils einer Logikdarstellung erörtert. 5.1 umfasst Vokabel und Theoreme des zweiten Teils und 5.2 übt in die Handhabung der Begriffe des dritten Teils ein. Das Adäquatheitsergebnis wird dankbar übernommen. Außerdem wird die Standardeinstellung nicht geteilt, die sich an der Rede von Adäquatheit des Ableitbarkeitsbegriffs bzgl. des Konsequenzbegriffs ablesen lässt. Diese und verwandte Kontroversen gehören zur Philosophie der Logik.

5.2.2. Diskursabkürzung: Anziehung – Zulässige Regeln

Um nachzuweisen, dass eine Aussage Γ nicht Konsequenz einer Aussagenklasse *X* ist, ist eine Interpretation vorzunehmen, die *X* wahr macht, Γ jedoch falsch. Um nachzuweisen, dass eine Aussage Γ Konsequenz einer Aussagenklasse *X* ist, wird eine Ableitung von Γ aus *X* vorgelegt. Man betrachte nun die schematische Ableitung des Aussagenschemas $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$ aus der leeren Klasse:

[23]	1	Wäre$_1$	$\neg (A \vee \neg A)$	
	2	Wäre$_{1,2}$	A	
	3	Also$_{1,2}$	$A \vee \neg A$	| AE; 2
	4	Also$_{1,2}$	$\neg (A \vee \neg A)$	| W; 1
	5	Also$_1$	$\neg A$	| NE; 2-4
	6	Also$_1$	$A \vee \neg A$	| AE; 5

7	Also	$\neg\neg(A \vee \neg A)$	| NE; 1-6
8	Also	$A \vee \neg A$	| NB; 7
9	Sei$_{9}$	A	
10	Sei$_{9,10}$	B	
11	Also$_{9,10}$	A	| W; 9
12	Also$_{9}$	$B \rightarrow A$	| SE; 10-11
13	Also$_{9}$	$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$	| AE; 12
14	Also	$A \rightarrow ((A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A))$	| SE; 9-13
15	Sei$_{15}$	$\neg A$	
16	Sei$_{15,16}$	A	
17	Wäre$_{15,16,17}$	$\neg B$	
18	Also$_{15,16,17}$	A	| W; 16
19	Also$_{15,16,17}$	$\neg A$	| W; 15
20	Also$_{15,16}$	$\neg\neg B$	| NE; 17-19
21	Also$_{15,16}$	B	| NB; 20
22	Also$_{15}$	$A \rightarrow B$	| SE; 16-21
23	Also$_{15}$	$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$	| AE; 22
24	Also	$\neg A \rightarrow ((A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A))$	| SE; 15-23
25	Also	$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$	| AB; 8,14,24

Die Ableitung hat zwei Teile: Im ersten Teil wird mit der Ableitung des Tertium-non-datur aus der leeren Klasse die Basis für eine Fallunterscheidung geschaffen (Zeile 1-8). Die Fallbetrachtungen mit anschließender SE erfolgen in den Zeilen 9-14 resp. 15-24. Abschließend wird durch AB das Resümee gezogen.

Nun ist für zahlreiche Ableitungen und Beweise auf Basis des Tertium-non-datur zu arbeiten. Es stellt aber keinen kognitiven Gewinn dar, dieses Theorem(schema) immer wieder zu beweisen. Zudem ist die ständig zu wiederholende Schreib- bzw. die Kopierarbeit lästig und bindet unnötig Energien. Abhilfe wäre hier dadurch zu schaffen, dass man die Einspeisung schon bewiesener Aussagen(schemata) erlaubt.

Betrachtet man die Untersuchung des ersten Falls, so legt sich eine Abkürzung nahe, die den Umstand ausnutzt, dass auch das Verum-ex-quolibet, das Aussagenschema $A \rightarrow (B \rightarrow A)$, bereits bewiesen worden ist. Im zweiten Fall könnte man ganz analog auf das Schema $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ rekurrieren. Es ergäbe sich dann folgende Ableitung:

[23]°→	1	[8]	Da	$A \vee \neg A$	
	2	[9]	Sei$_2$	A	
	3		Da$_2$	$A \rightarrow (B \rightarrow A)$	
	4	[12]	Also$_2$	$B \rightarrow A$	| SB; 2,3
	5	[13]	Also$_2$	$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$	| AE; 4
	6	[14]	Also	$A \rightarrow ((A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A))$	| SE; 2-5
	7	[15]	Sei$_6$	$\neg A$	
	8		Da$_6$	$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$	
	9	[22]	Also$_6$	$A \rightarrow B$	| SB; 7,8
	10	[23]	Also$_6$	$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$	| AE; 9
	11	[24]	Also	$\neg A \rightarrow ((A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A))$	| SE; 7-10
	12	[25]	Also	$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$	| AB; 1,6,11

Hinter der Zeilenziffer steht in viereckigen Klammern die Ziffer der Originalableitung. Die Einsparung beträgt mehr als die Hälfte. Die so abgekürzte Ableitung verlässt den durch die Grundregeln gesteckten Rahmen ›im Prinzip‹ nicht: Statt in Zeile 1 die Aussage aus Zeile 8 der Originalableitung anzuziehen, könnte man ja die Zeilen 1 bis 8 der Originalableitung vollständig notieren; Analoges gilt für die Zeilen 3 und 8. Die folgende Regel macht die in [23]° ausgeführten Anziehungshandlungen ›offiziell‹, die durch ’Da__’ signalisiert werden.

[24] Man darf jede bereits bewiesene logisch-wahre und parameterfreie Aussage anziehen.

Das Anziehen macht ebenso wie das Annehmen und das Folgern Aussagen als Prämissen verfügbar, allerdings bleiben die angezogenen Aussagen immer verfügbar. Korrekt angezogene Aussagen sind ja bereits in einem vorherigen Beweis bewiesen worden und nicht in Abhängigkeit von Annahmen im vorliegenden Beweis resp. der vorliegenden Ableitung gewonnen worden: Die anziehbaren Aussagen bilden das bereits gewonnene Guthaben (↑4.1). Die Anziehungsregel [24] ist dabei jeweils auf eine Abfolge von Beweisen logischer Wahrheiten zu beziehen: Wenn in einem so oder auch anders angelegten Aufbau des Beweises logischer

Wahrheiten eine Aussage Δ bereits bewiesen worden ist, dann darf man sie in der Fortführung dieses Aufbaus anziehen, sonst nicht. Wäre z.B. das Tertium-non-datur hier noch nicht bewiesen worden, hätte man es in [23]° auch nicht anziehen dürfen. – Die Anziehungsregel wird später (↑9) erweitert.

Ü 14 Gehen Sie zurück in Kapitel 4. Untersuchen Sie die Beweise in Ü 8a), c), [50]°°, Ü 11g), i) auf Abkürzungsmöglichkeiten durch Anziehung logisch-wahrer Aussagen gemäß [24]!

Zurück zum Beispiel: Unter [23] wird bei der Betrachtung des ersten Falls in den Zeilen 9 bis 12 aus A die Subjunktion $B \rightarrow A$ gewonnen; dabei bleiben die Abhängigkeiten, genauer: die Abhängigkeit von $\{A\}$, bestehen. Man könnte diesen Weg abkürzen, indem man den direkten Übergang von A zu $B \rightarrow A$ bei Bestehenbleiben der Verfügbarkeiten und damit der Abhängigkeiten erlaubt. Analog könnte man die zweite Fallbetrachtung abkürzen, indem man den direkten Übergang von $\neg A$ zu $A \rightarrow B$ erlaubt. Eine einschlägige Regel könnte so lauten:

[25] Wenn man eine Aussage A resp. $\neg A$ gewonnen hat und B eine Aussage ist, dann darf man $B \rightarrow A$ resp. $A \rightarrow B$ folgern.

Wenn man eine Aussage nach [25] folgert, dann ist diese Aussage – wie alle gefolgerten Aussagen – nach der Folgerung verfügbar. Alle vorhergehenden Verfügbarkeitsklauseln bleiben in Kraft. Man beachte, dass bei einer Folgerung, die gemäß [25] korrekt ist, dann und nur dann Annahmen getilgt werden, wenn diese Folgerung gleichzeitig auch nach SE oder PB korrekt ist. Der Leser überlege sich, warum eine solche Folgerung nicht gleichzeitig nach NE korrekt sein kann.

Mit diesen beiden Regeln versehen, lässt sich [23]° um zwei weitere Zeilen zu [23]* kürzen; die in eckigen Klammern angesiedelten Zeilennummern stammen weiter aus [23]:

[23]*→	1	[8]	Da	$A \vee \neg A$	
	2	[9]	Sei$_2$	A	
	3	[12]	Also$_2$	$B \rightarrow A$	| ZR; 2
	4	[13]	Also$_2$	$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$	| AE; 3
	5	[14]	Also	$A \rightarrow ((A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A))$	| SE; 2-4

6	[15]	Sei_{6}	$\neg A$	
7	[22]	$Also_{6}$	$A \rightarrow B$	| ZR; 6
8	[23]	$Also_{6}$	$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$	| AE; 7
9	[24]	Also	$\neg A \rightarrow ((A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A))$	| SE; 6-8
10	[25]	Also	$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$	| AB; 1,5,9

In den Zeilen 3 bzw. 7 wird die neue Regel, die zulässige Regel (=ZR), benutzt. Am rechten Zeilenrand ist die jeweilige Anwendungszeile notiert. – Ein zweites Beispiel: In Beweisen ergibt sich häufig die Situation, dass man eine Adjunktion $A \vee B$ sowie eine Negation $\neg B$ eines Adjunktionsglieds gewonnen hat. Auf Basis dieser Diskurslage möchte man zu A übergehen; das kann wie folgt geschehen, wobei der Indexkommentar nur für die Zeilen n+2 bis n+9 angeführt ist:

[26]	...	...	...	
	n	Ξ	$A \vee B$	
	n+1	Ξ'	$\neg B$	
	n+2	Sei_{n+2}	A	
	n+3	Also	$A \rightarrow A$	| SE; (n+2)-(n+2)
	n+4	Sei_{n+4}	B	
	n+5	$Wäre_{n+4,n+5}$	$\neg A$	
	n+6	$Also_{n+4,n+5}$	B	| W; n+4
	n+7	$Also_{n+4,n+5}$	$\neg B$	| W; n+1
	n+8	$Also_{n+4}$	$\neg \neg A$	| NE; (n+5)-(n+7)
	n+9	$Also_{n+4}$	A	| NB; n+8
	n+10	Also	$B \rightarrow A$	| SE; (n+4)-(n+9)
	n+11	Also	A	| AB; n,n+3,n+10
	...	...	...	

Der Folgerungsweg ist nicht durch Eigenarten von A oder B bestimmt, sondern allein durch die Regeln für die Junktoren gebahnt. Man möchte ihn nicht in jeder derartigen Situation neuerlich vollziehen, sondern sogleich von der Adjunktion und der Negation eines Adjunkts zu dem anderen Adjunkt übergehen; als einschlägige Regel bietet sich an:

[27] Wenn man die Adjunktion einer Aussage A und einer Aussage B und die Negation von A resp. die Negation von B gewonnen hat, dann darf man die Aussage B resp. A folgern.

Wenn man eine Aussage nach [27] folgert, dann ist diese Aussage nach der Folgerung verfügbar. Auch hier bleiben alle vorhergehenden Verfügbarkeitsklauseln in Kraft. Jede Aussage, die mit Hilfe von [27] aus den beiden Prämissen erreichbar ist, ist allein mit den in Kap. 4 etablierten Regeln erreichbar. Betitelt man diese in Abhebung von den zulässigen Regeln als Grund- bzw. Basisregeln, dann kann man mit der Weg-Ziel-Metapher formulieren: Mit den zulässigen Regeln lassen sich keine Schlussziele erreichen, die nicht auch mit den Grundregeln erreichbar wären; allerdings werden die Ziele auf kürzerem Wege erreicht. Neu ist also nicht das Schlussziel, sondern allein der Schlussweg. – Ein weiteres Beispiel aus der Quantorenlogik, bei dem der Indexkommentar auf die Zeilen n+1 bis n+7 beschränkt ist:

[28]	...	...	...	
	n	Ξ	$\bigwedge\omega\ \Delta$	
	n+1	Wäre$_{n+1}$	$\bigvee\omega\ \neg\ \Delta$	
	n+2	Sei$_{n+1,n+2}$	$\neg\ [\beta, \omega, \Delta]$	
	n+3	Wäre$_{n+1,n+2,n+3}$	$\bigvee\omega\ \neg\ \Delta$	
	n+4	Also$_{n+1,n+2,n+3}$	$[\beta, \omega, \Delta]$	| UB; n
	n+5	Also$_{n+1,n+2,n+3}$	$\neg\ [\beta, \omega, \Delta]$	| W; n+2
	n+6	Also$_{n+1,n+2}$	$\neg\ \bigvee\omega\ \neg\ \Delta$	| NE; (n+3)-(n+5)
	n+7	Also$_{n+1}$	$\neg\ \bigvee\omega\ \neg\ \Delta$	| PB; n+1,(n+2)-(n+6)
	n+8	Also	$\neg\ \bigvee\omega\ \neg\ \Delta$	| NE; (n+1)-(n+7)
	...	…	…	

Man hat in einem Beweis die Universalquantifikation einer Formel Δ gewonnen und will übergehen zur Negation der Partikularquantifikation der Negation von Δ. Diese rein logischen Schritte will man nicht in jedem Beweis neu vollziehen. Erwünscht ist vielmehr der direkte

Übergang von der Aussage der Zeile n zur Aussage der Zeile n+8; dabei hilft folgende zulässige Regel:

[29] Wenn man die Universalquantifikation einer Formel Δ bezüglich ω gewonnen hat, dann darf man die Negation der Partikularquantifikation der Negation von Δ bezüglich ω folgern.

Auch hier bleiben alle vorhergehenden Verfügbarkeitsklauseln in Kraft. Die bisherigen Beispiele für zulässige Regeln legen folgende allgemeine Form nahe:

[30] Wenn man Δ_1 und ... und Δ_n gewonnen hat und $(\Delta_1 \wedge \ldots \wedge \Delta_n) \rightarrow \Gamma$ eine bereits bewiesene logisch-wahre Aussage ist, dann darf man Γ folgern.

Die Zulässigkeit der Regel besteht gerade darin, dass man eben auch unter ausschließlicher Benutzung der Grundregeln von Δ_1 ,..., Δ_n zu Γ gelangen kann. Dass $(\Delta_1 \wedge \ldots \wedge \Delta_n) \rightarrow \Gamma$ logisch wahr ist, ist äquivalent dazu, dass $\{\Delta_1 ,\ldots, \Delta_n\} \vdash \Gamma$ gilt, d.h. dazu, dass es eine mit Grundregeln geführte Ableitung von Γ aus (einer Teilklasse von) $\{\Delta_1,\ldots, \Delta_n\}$ gibt. Folgert man eine Aussage nach einer zulässigen Regel, dann macht man die gefolgerte Aussage damit verfügbar; aller vorhergehenden Verfügbarkeitsklauseln bleiben in Kraft. Man beachte, dass bei einer Folgerung, die gemäß einer zulässigen Regel korrekt ist, dann und nur dann Annahmen getilgt werden, wenn diese Folgerung gleichzeitig auch nach SE oder PB oder NE korrekt ist. Man betrachte dazu die folgende Sequenz:

[31]	0	Es-gilt	$\bigwedge\omega \neg \Delta \rightarrow \neg \bigvee\omega \Delta$	
	1	Sei_1	$\bigwedge\omega \neg \Delta$	
	2	$\text{Wäre}_{1,2}$	$\bigvee\omega \Delta$	
	3	$\text{Sei}_{1,2,3}$	$[\beta, \omega, \Delta]$	
	4	$\text{Also}_{1,2,3}$	$\neg [\beta, \omega, \Delta]$	| UB; 1
	5	$\text{Also}_{1,2,3}$	$\neg \bigvee\omega \Delta$	| ZR, 3, 4
	6	$\text{Also}_{1,2}$	$\neg \bigvee\omega \Delta$	| PB; 2, 3-5
	7	Also_1	$\neg \bigvee\omega \Delta$	| NE; 2-6
	8	Also	$\bigwedge\omega \neg \Delta \rightarrow \neg \bigvee\omega \Delta$	| SE; 1-7

Die Folgerung in Zeile 5 ist nach [30] korrekt, da (jede Instanz von) $\Delta \wedge \neg \Delta \rightarrow \Gamma$ bereits durch einen Beweis als logisch-wahr erwiesen wurde und man in den Zeilen 3 und 4 eine Aussage und ihre Negation gewonnen hat. Allerdings wird hier, obwohl eine Negation gefolgert wird und eine Aussage und ihrer Negation als Prämissen für eben diese Folgerung dienen, keine NE vollzogen und man befreit sich (da SE oder PB ebenso nicht vollzogen werden) von keiner Annahme.

Ü 15 Untersuchen Sie die in Ü 14 genannten Beweise (Kapitel 4: Ü 8a), c), [50]°°, Ü 11g), i)) mit Grundregeln auf Abkürzungsmöglichkeiten durch zulässige Regeln!

Eine weitere, hier nicht vorgestellte Abkürzungsstrategie besteht in der Substitution: Ist eine Aussage Γ logisch äquivalent zu Β und hat man eine Aussage Δ gewonnen, die Γ zur Teilformel hat, dann darf man auf [Β, Γ, Δ] schließen (↑10).

Der guten Ordnung halber ist abschließend das Ableitungskonzept so zu erweitern, dass auch die neu geschaffenen abkürzenden Handlungsmöglichkeiten Berücksichtigung finden: $\mathcal{A}$ ist ein zulässige Ableitung von Γ aus *X* genau dann, wenn $\mathcal{A}$ eine Sequenz ist, so dass für jedes Glied $\mathcal{A}_i$ von $\mathcal{A}$ gilt: $\mathcal{A}_i$ ist ein Annahmesatz gemäß der Annahmeregel AR oder $\mathcal{A}_i$ ist ein Anziehungssatz gemäß der Anziehungsregel [24] oder $\mathcal{A}_i$ ist ein Folgerungssatz gemäß einer Grund- oder einer zulässigen Regel und Γ ist die im letzen Glied von $\mathcal{A}$ in Abhängigkeit von der Aussagenklasse *X* gewonnene Aussage. Jede zulässige Ableitung lässt sich in eine Ableitung überführen.

5.3. Der Einzigkeitsquantor

Die Exkursion in Begriffe und Verfahren der Metalogik findet ihren Abschluss durch eine ausführliche Behandlung der Einzigkeit. Dadurch wird nicht nur eine zentrale begriffliche Voraussetzung für die Behandlung der Nomination (↑7) bereitgestellt, sondern auch, damit zusammenhängend, ein Instrument zur Erfassung und Auflösung von Einzigkeitsillusionen aller Art.

Die Vorstellung von Einzigkeitsvarianten bildet den Abschluss des Unterkapitels (5.3.4). Sie wird vorbereitet durch die Behandlung der Mindest- und Höchstzahlquantoren (5.3.3). Diese Art von Quantoren findet zuvor im Spektrum quantitativer Operatoren Situierung (5.3.2). Die Erörterung quantitativer Operatoren macht es nötig, wiederholt Definitionsschemata zu benutzen. Der Umgang mit dieser Sorte von Etablierungsverfahren wird vorbereitend an den logischen Junktoren eingeübt; damit wird zugleich die Darstellung dieser Redeteile ergänzt (5.3.1).

5.3.1. Zur Definition von Junktoren

Die früher vorgestellten und seitdem benutzten Junktoren besitzen (jedenfalls näherungsweise) gebrauchssprachliche Äquivalente. Die Gebrauchssprache enthält aber weitere Junktoren bzw. Ausdrücke, die sich als Junktoren darstellen lassen. Einige von diesen Redeteilen lassen sich wiederum mit Hilfe der bekannten Operatoren definieren. So kann der zweistellige Junktor ’weder__noch__’ mit Hilfe von Negator und Konjunktor bestimmt werden und der ebenfalls zweistellige Junktor ’entweder__oder__’ kann mit Adjunktor, Konjunktor und Negator bestimmt werden:

[32] Man darf jede parameterfreie Aussage von der Art:

a) (weder A noch B) $\leftrightarrow (\neg \mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{B})$ resp.

$\bigwedge\xi_1 \ldots \bigwedge\xi_n$ ((weder Δ_1 noch Δ_2) $\leftrightarrow (\neg\Delta_1 \wedge \neg \Delta_2)$)

b) (entweder A oder B) $\leftrightarrow (\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \wedge \neg (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B})$ resp.

$\bigwedge\xi_1 \ldots \bigwedge\xi_n$ ((entweder Δ_1 oder Δ_2) $\leftrightarrow ((\Delta_1 \vee \Delta_2) \wedge \neg (\Delta_1 \wedge \Delta_2))$)

als Definition setzen.

Die Sprachrelativierung ist wiederum vernachlässigt. Der zu definierende Redeteil, das Definiendum, bildet hier jeweils den Hauptoperator des linken Bisubjunkts, der sogenannten Definiendumformel, während das rechte Bisubjunkt das sogenannte Definiens, also den definierenden Ausdruck bildet. Das Definiens wird auch als Definiensformel angesprochen. Da man derartige Definitionsschemata bzw. ihre Instanzen selbstredend in Diskursen benutzen will, muss ihre Benutzung entsprechend geregelt werden. Dies geschieht, indem man die Anziehung von Definitionen erlaubt:

[33] Man darf parameterfreie Definitionen in Argumentationen anziehen.

Wie für alle Anziehungen gilt für angezogene Definitionen, dass sie nach der Anziehung verfügbar sind und verfügbar bleiben. Wenn man etwa zeigen will, dass die Zweierklasse {weder A noch B, entweder A oder B} inkonsistent ist, kann man die Argumentation bzw. das Argumentationsschema mit folgenden Zügen eröffnen:

[34]	Sei_1	weder A noch B
	Da_1	(weder A noch B) $\leftrightarrow (\neg \mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{B})$
	Also_1	$\neg \mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{B}$
	$\text{Sei}_{1,4}$	entweder A oder B

Da$_{1,4}$ (entweder A oder B) $\leftrightarrow (A \vee B) \wedge \neg (A \wedge B)$

Also$_{1,4}$ $(A \vee B) \wedge \neg (A \wedge B)$

Ü 16 Setzen Sie die Argumentation bis zum Nachweis der Inkonsistenz fort! Benutzen Sie nach Belieben zulässige Regeln und die Anziehungsregel [24]!

Die Zeichenverbindung 'entweder__oder__' wird auch als ausschließendes 'oder' angesprochen; demgegenüber ist der Adjunktor dann das einschließende 'oder'. Die Gebrauchssprache verwendet häufig schlicht 'oder'; es bleibt dann dem Adressaten überlassen, das autorseitig angezielte Verständnis aus der Äußerungsumgebung zu ermitteln.

Die vorgelegten Definitionsschemata besitzen die Form der (u.U. auch mehrfach universalquantifizierten) Bisubjunktion. Bei der Erlernung des Umgangs mit den Junktoren konnte eine Reihe von (nach De Morgan benannten) Theoremen bewiesen werden, deren eines Bisubjunkt jeweils eine Konjunktion, eine Adjunktion oder eine Subjunktion war, während das andere Bisubjunkt von Negator und den jeweils anderen Junktoren gebildet wird:

[35] a) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$

b) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg (A \wedge \neg B)$

c) $(A \wedge B) \leftrightarrow \neg (\neg A \vee \neg B)$

d) $(A \wedge B) \leftrightarrow \neg (A \rightarrow \neg B)$

e) $(A \vee B) \leftrightarrow \neg (\neg A \wedge \neg B)$

f) $(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \rightarrow B)$

Auch diese Schemata (und die entsprechenden Universalquantifikationen) hätte man als Definitionen wählen können: Wenn Annahme- und Wiederholungsregel etabliert wurden und der Bisubjunktor, der Negator, sowie der Subjunktor resp. Konjunktor schon über die bekannten Einführungs- und Beseitigungsregeln etabliert wurden, dann lässt sich der Adjunktor mit ihrer Hilfe nach dem Muster von [32] definieren; analog für den Konjunktor. Im Falle des Subjunktors sind zusätzlich die Einführungsregel für den Bisubjunktor und die Beseitigungsregel für den Adjunktor zu ändern, so dass – wenn etwa b) als Definitionsschema gewählt wird – nunmehr der Schluss von $\neg(A\wedge\neg B)$ und $\neg(B\wedge\neg A)$ auf $A\leftrightarrow B$ resp. der Schluss von $A\vee B$, $\neg(A\wedge\neg\Gamma)$ und $\neg(B\wedge\neg\Gamma)$ auf Γ erlaubt wird.

Denkt man über die damit gegebenen Definitionsmöglichkeiten unter der Frage der Minimierung der Ausdrucksbasis nach, dann resultiert: Sind Annahme- und Wiederholungsregel gesetzt und der Bisubjunktor (geeignet) eingeführt, dann lassen sich mit Hilfe von Negator und

Adjunktor resp. Negator und Konjunktor resp. Negator und Subjunktor die übrigen Junktoren definieren. Sei etwa Negator mit Subjunktor verfügbar; dann lässt sich mit f) der Adjunktor und mit d) oder c) der Konjunktor definieren; analog für die beiden übrigen Möglichkeiten.

Basiert man die Junktorenlogik auf den Negator und einen der beiden zweistelligen Junktoren, so sind die übrigen Junktoren in dem Sinne überflüssig, als sie stets durch die basierenden Redeteile ersetzbar sind und sich nach Hinzufügung der Definitionsschemata Aussagen, die die definierten Junktoren nicht enthalten, nur dann aus Klassen ebensolcher Aussagen ableiten lassen, wenn dies auch ohne Anwendung der Definitionsschemata möglich ist. Insofern fügen sie dem System nichts ›Neues‹ im Sinne einer echten Verstärkung hinzu. Für den Zweck der metasprachlichen Analyse ist es überdies einfacher, sich mit weniger Grundzeichen befassen zu müssen.

Für den Gebrauchszweck liegen die Dinge anders: Hier führt die Beschränkung schon bei einfachen Aussagen zu unerwünschten Schwerfälligkeiten und zu Unübersichtlichkeit. Einfacher für den Gebrauch ist es also, mit einer größeren als der kleinstmöglichen Menge an Operatoren zu arbeiten. – Offenkundig ist hier und auch an späteren Stellen (↑) zwischen Einfachheit für die metasprachliche Analyse, kurz: <u>Überschaubarkeit</u>, und Einfachheit für den objektsprachlichen Gebrauch, kurz: <u>Handlichkeit</u>, zu unterscheiden.

Der Bisubjunktor spielt bei den vorgestellten Definitionsschemata eine tragende Rolle: Er verbindet Definiendum- und Definiensformel. Andererseits gilt auch: $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$; und es erhebt sich die Frage nach der Definierbarkeit des Bisubjunktors durch Konjunktor und Subjunktor. Das dabei auftretende Sonderproblem besteht darin, dass eine Etablierung nach dem Vorbild von [32] ausgeschlossen ist: Das zu definierende Zeichen steht eben noch nicht bereit, um Definiendum- und Definiensformel zu verbinden.

Ein Ausweg besteht in der Formulierung von Folgerungsregeln im Rahmen der Einführungs- und Beseitigungssystematik: Hat man die Subjunktion aus A und B sowie die konverse Subjunktion gewonnen, dann darf man bekanntlich auf die Bisubjunktion aus A und B schließen. Zusätzlich lässt sich auch die Beseitigungsregel unter Rückgriff auf den Subjunktor formulieren: Aus einer Bisubjunktion aus A und B darf man auf die Subjunktion aus A und B sowie auf die konverse Subjunktion aus A und B schließen.

Ein weiterer Ausweg ist die Formulierung von Folgerungsregeln unter Rückgriff auf die Substitution: Wenn man eine Aussage Δ mit $A \leftrightarrow B$ als Teilaussage von Δ gewonnen hat, dann darf man das Ergebnis der Substitution von $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ für $A \leftrightarrow B$ in Δ folgern, und umgekehrt. – Beide Wege rekurrieren nicht auf den Bisubjunktor als Definitionsmittel. Sie haben jedoch insofern definitorischen Effekt, als die volle Eliminierbarkeit von Bisubjunktionen sowie die Konservativität der Erweiterung gewährleistet ist.

Bei den unter [32] gegebenen Definitionen handelt es sich, genauer betrachtet, um metasprachliche Definitionsschemata; das suggeriert schon der Gebrauch der griechischen Buchstaben. Ein (erstes) Beispiel für eine objektsprachliche Definition wird mit der Einführung des Diversitätsprädikators (↑[37]) gegeben.

5.3.2. Die formelquantifizierende Rede im Überblick

Bei den quantifizierenden Redeteilen handelt es sich um Formelquant(ifikat)oren oder um Termquant(ifikat)oren; in diesem Abschnitt stehen nur die erstgenannten zu einer Grobsortierung an. Zunächst ist zwischen materialen und formalen Quant(ifikat)oren zu unterscheiden. Bei der Etablierung der Mitglieder der ersten Gruppe spielen nichtlogische Redeteile eine tragende Rolle; dies trifft für die Angehörigen der zweiten Gruppe nicht zu.

In Kontroversen, die Existenzfragen betreffen, kommen materiale Partikularquant(ifikat)oren zum Einsatz: So lässt sich etwa der Quantor für raumzeitliche Existenz – z.B. das Zeichen 'es-existiert-raumzeitlich-ein-ξ Δ' durch '$\bigvee\xi$(Raum-zeitliches-Gebilde(ξ)$\wedge\Delta$)' definieren. In analoger Weise kann ein Quantor für fiktionale Existenz eingeführt werden. Wählt man zum Ausdruck fiktionaler Universalität das Zeichen 'für-alle-Ficta ξ', dann ist dieses etwa durch '$\bigwedge\xi$(Fiktionales-Gebilde(ξ)$\rightarrow\Delta$)' definierbar. Die (philosophiehistorisch berühmte) Wendung 'es kann ein ξ gedacht werden, das die und die Eigenschaft Δ hat' könnte etwa durch '$\bigvee\xi$ denkbar Δ' definiert werden.

In den exemplarisch angesprochenen Fällen ist es für das Gelingen ausschlaggebend, dass die materialen Redeteile, als 'Raum-zeitliches-Gebilde(..)', 'Fiktionales-Gebilde(..)', 'denkbar__' ihrerseits einwandfrei mit Bedeutung versorgt worden sind. – Auf dem angedeuteten Weg lassen sich auch quantifizierende gebrauchssprachliche Wendungen wie 'manchmal', 'immer', 'irgendwo', 'überall', 'irgendjemand', 'jedermann' erfassen.

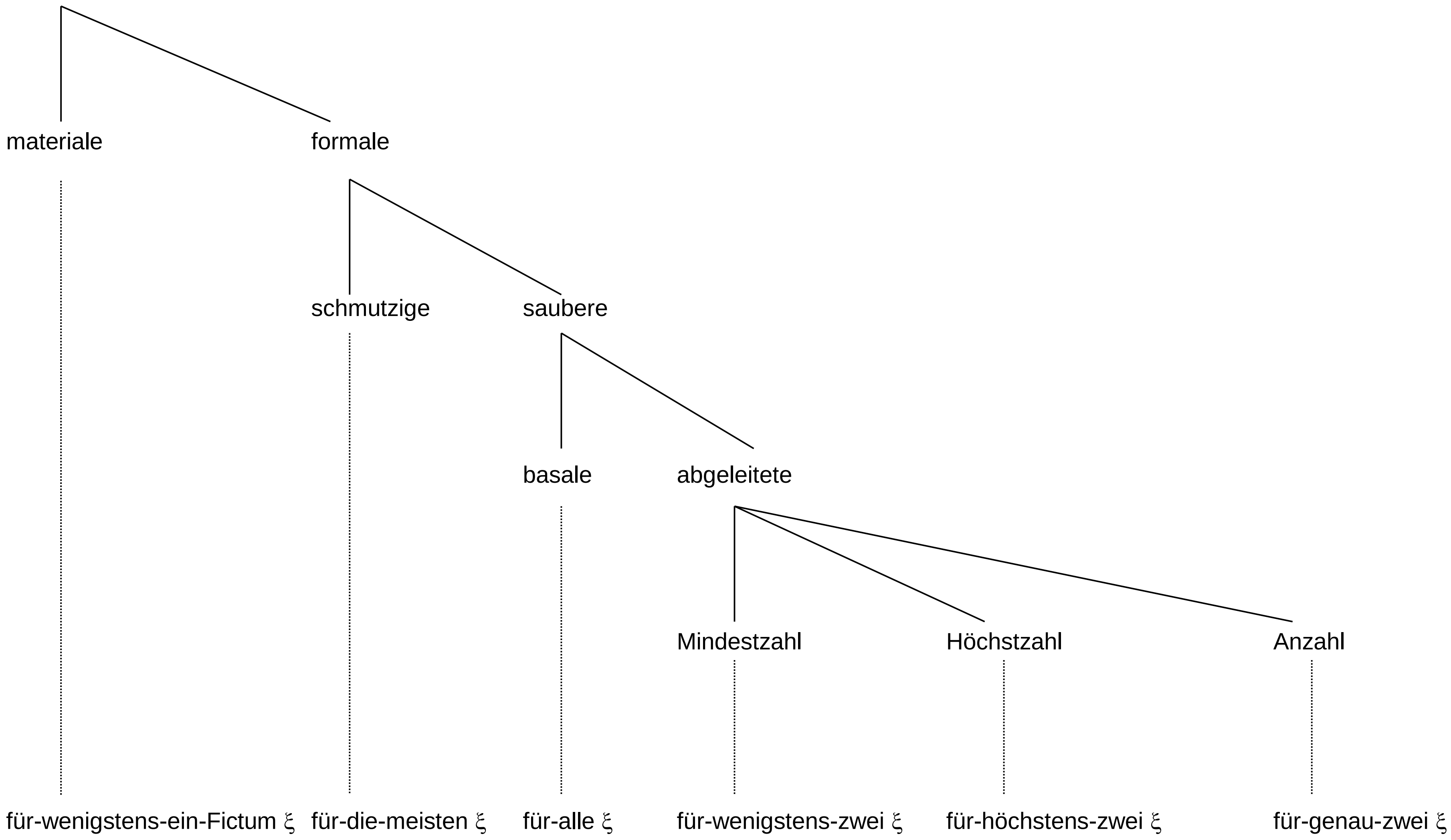
Ü 17 Definieren Sie zeit-, raum- und personenbezogene Quantoren, die die soeben erwähnten gebrauchssprachlichen Redeteile erfassen!

Die formalen Quant(ifikat)oren zerfallen (nach einer etwas unglücklichen Terminologie) in die schmutzigen und die sauberen Redeteile. Zu den ersteren zählen Ausdrücke wie 'Die-meisten ξ', 'Nur-wenige ξ', 'Fast-alle ξ', 'Mehrere ξ'. Diese Redeteile finden insbesondere in den Sozialwissenschaften Verwendung: So soll z.B. eine Regel in einer Population in Kraft sein, wenn fast alle/die meisten/viele Mitglieder dieser Population regelgemäß agieren. – Die Festlegung resp. Rekonstruktion der Bedeutung dieser Operatoren ist mit besonderen Schwierigkeiten verbunden.

Die sauberen Quant(ifikat)oren zerfallen in die basalen und die abgeleiteten. Der Partikular- und der Universalquant(ifikat)or sind die beiden basalen, d.h. die (in dem hier zugrundeliegenden Aufbau) nicht definitorisch etablierten. Auf die Möglichkeit der Definition des Universalquantors durch Negator und Partikularquantor bzw. des Partikularquantors durch Negator und Universalquantor wurde deshalb nicht zurückgegriffen, weil diese Interdefinierbarkeit weder in einer minimalen noch in einer intuitionistischen Logik gelten (↑Zusatz: Logischer Pluralismus).

Die abgeleiteten, d.h. die definierten, Quant(ifikat)oren lassen sich gliedern in die Mindestzahlquantoren wie etwa 'für-wenigstens-zwei ξ', die Höchstzahlquantoren wie z.B. 'für-höchstens-zwei ξ' und die Anzahlquantoren wie z.B. 'für-genau-zwei ξ'. Bevor diese Redeteile näher studiert werden, soll die provisorische Sortierung der einstelligen Formelquantifikatoren durch eine Übersicht repräsentiert werden:

[36] Einstellige Formelquant(ifikat)oren



5.3.3. Mindestzahlquantoren und Höchstzahlquantoren

Der Partikularquant(ifikat)or ist der einfachste Mindestzahlquant(ifikat)or. Seine Bedeutung ist über PE und PB festgelegt (↑4.3.2). Diese Subsumtion zeigt, anbei bemerkt, dass die vorgenommene Sortierung an dieser Stelle nicht disjunkt ist. – Um zum Mindestens-zwei-Quantor zu gelangen, kann man den Diversitäts- bzw. den Verschiedenheitsprädikator bereitstellen, indem man die Aussage:

[37] $\bigwedge x \bigwedge y\ (x \neq y \leftrightarrow \neg\, x = y)$

definitorisch setzt: Verschieden ist ein Gebilde von einem Gebilde, wenn sie nicht identisch sind. Bei [37] handelt es sich um eine objektsprachliche Definition – und nicht wie bei [32] um ein metasprachliches Definitionsschema. Da der Diversitätsprädikator unter ausschließlichem Rückgriff auf logische Redeteile definiert wird, ist er selbst als logischer Operator anzusehen.

Kein Gebilde ist von sich selbst verschieden: Der Diversitätsprädikator ist also irreflexiv. Besteht zwischen Gebilden die Verschiedenheit, so gilt sie auch in der umgekehrten Richtung: Der Diversitätsprädikator ist also symmetrisch. Sind ferner Gebilde verschieden, dann ist ein beliebiger Gegenstand von wenigstens einem der beiden Gebilde verschieden.

[38] a) $\bigwedge x\ \neg\, x \neq x$

b) $\bigwedge x \bigwedge y\ (x \neq y \rightarrow y \neq x)$

c) $\bigwedge x \bigwedge y\ (x \neq y \rightarrow \bigwedge z\ (x \neq z \vee y \neq z))$

Das erste Theorem lässt sich so beweisen:

[38]°	1	Wäre$_1$	$x \neq x$
	2	Da$_1$	$\bigwedge x \bigwedge y\ (x \neq y \leftrightarrow \neg\, x = y)$
	3	Also$_1$	$\bigwedge y\ (x \neq y \leftrightarrow \neg\, x = y)$
	4	Also$_1$	$x \neq x \leftrightarrow \neg\, x = x$
	5	Also$_1$	$\neg\, x = x$
	6	Also$_1$	$x = x$
	7	Also	$\neg\, x \neq x$
	8	Also	$\bigwedge x\ \neg\, x \neq x$

Der Beweis erfolgt indirekt. In Zeile 2 wird die Definition angezogen und passend spezialisiert. Die Annahme führt mit der Definition auf einen Widerspruch zur Totalreflexivität der Identität.

Ü 18 Beweisen Sie [38] b) und c)!

Anders als die Identität ist die Diversität nicht transitiv: Es ist $3 \neq 4$ und $4 \neq 3$, ohne dass $3 \neq 3$ wäre. In gleicher Weise lässt sich einsehen, dass auch die Komparativitätseigenschaften und die Zirkularität nicht gelten. – Der Mindestens-zwei-Quantor lässt sich nun durch folgende Partikularquantifikation ausdrücken:

[39] $\bigvee\xi\bigvee\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \wedge \xi \neq \omega)$

Dabei ist Δ eine Formel, in der höchstens ξ frei ist und die ω nicht zum Teilterm hat. Es gibt also genau dann wenigstens zwei Δ-Objekte, wenn es ein Δ-Objekt ξ und ein Δ-Objekt ω gibt, dass von ξ verschieden ist.

Ü 19 Verdeutlichen Sie sich die Notwendigkeit der Nicht-Teiltermschaft von ω in Δ, indem Sie z.B.'$\bigvee y(\mathrm{NaZ}(y \wedge x > y)$' für die gesamte Formel Δ und 'x' für ξ wählen.

Mit [39] ist lediglich das Definiens des Mindestens-zwei-Quantor notiert; wegen fehlender Benutzungshäufigkeit wird im vorliegenden Kontext keine eigene Zeichenverbindung etabliert. – Der Mindestens-drei-Quantor könnte durch:

[40] $\bigvee\xi\bigvee\omega\bigvee\zeta\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \wedge [\zeta, \xi, \Delta] \wedge \xi \neq \omega \wedge \omega \neq \zeta \wedge \zeta \neq \xi)$

charakterisiert werden. Dabei ist Δ wie üblich eine Formel, in der allenfalls ξ frei ist; und ferner hat Δ weder ω noch ζ zum Teilterm. Es genügt nicht, nur die Verschiedenheit von ξ und ω und von ω und ζ zu fordern, weil, wie oben bemerkt, die Diversität nicht transitiv ist.

Damit ist prinzipiell der Weg vorgezeichnet, sich die gewünschten Mindestzahlquantoren bereitzustellen. – Betrachtet man das Verhältnis von der Mindestens-ein- resp. Partikularaussage zur Mindestens-zwei-Aussage, dann gilt: Es ist $\bigvee\xi\Delta$ Konsequenz aus $\{\bigvee\xi\bigvee\omega(\Delta\wedge[\omega,\xi,\Delta]\wedge\omega\neq\xi)\}$; und es ist $\{\bigvee\xi\Delta\}$ verträglich mit $\{\neg\bigvee\xi\bigvee\omega(\Delta\wedge[\omega,\xi,\Delta]\wedge\omega\neq\xi)\}$ und mit $\{\bigvee\xi\bigvee\omega(\Delta\wedge[\omega,\xi,\Delta]\wedge\omega\neq\xi)\}$; also ist $\bigvee\omega\bigvee\xi(\Delta\wedge[\omega,\xi,\Delta]\wedge\omega\neq\xi)$ nicht entscheidbar durch $\{\bigvee\xi\Delta\}$. Mit Blick auf die Höchstzahlquantoren ist zu beachten, dass $\bigvee\xi\bigvee\omega(\Delta\wedge[\omega,\xi,\Delta]\wedge\omega\neq\xi)$ mit $\neg\bigwedge\xi\bigwedge\omega(\Delta\wedge[\omega,\xi,\Delta]\rightarrow\omega=\xi)$ äquivalent ist.

Ü 20 Begründen Sie die folgenden Aussagen:

a) $\{\bigvee\xi\bigvee\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \wedge \omega \neq \xi)\} \vdash \bigvee\xi\ \Delta$

b) $\bigvee\xi\bigvee\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \wedge \omega \neq \xi)$ ist nicht entscheidbar durch $\{\bigvee\xi\ \Delta\}$

c) $\bigvee\xi\bigvee\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \wedge \omega \neq \xi) \dashv\vdash \neg \bigwedge\omega\bigwedge\xi\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi)$

Der einfachste Höchstzahlquant(ifikat)or ist die Wendung 'für-höchstens-ein..' bzw. 'für-höchstens-ein ξ', gelegentlich auch durch 'es-gibt-höchstens-ein..' bzw. 'es-gibt-höchstens-ein ξ' 'für-nicht-mehr-als-ein ξ' ausgedrückt. Den Sachverhalt, dass es höchstens ein ξ mit der Eigenschaft Δ gibt, kann man so beschreiben: Es ist nicht der Fall, dass ein ξ ein Δ-Ding ist und ein ω ein Δ-Ding ist und ξ verschieden von ω ist. Äquivalent: Falls ξ, ω Δ-Dinge sind, dann sind sie identisch.

[41] $\bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega)$

Soll diese Formel als Definiens für den Höchstens-eins-Quantor taugen, dann darf in Δ mit höchstens ξ frei wiederum ω nicht Teilterm sein. – Wegen fehlender Benutzungshäufigkeit wird wiederum kein eigenes Zeichen etabliert. – Den Sachverhalt, dass es höchstens zwei Δ-Dinge gibt, kann man so ausdrücken: Es ist nicht der Fall, dass es ξ, ω, ζ gibt, die Δ sind und voneinander allesamt verschieden; es ist also nicht der Fall, dass es wenigstens drei Δ-Dinge gibt. Äquivalent: Sind beliebige ξ, ω, ζ Δ-Dinge, dann ist $\xi=\omega$ oder $\xi=\zeta$ oder $\omega=\zeta$:

[42] $\bigwedge\xi\bigwedge\omega\bigwedge\zeta\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \wedge [\zeta, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi \vee \omega = \zeta \vee \xi = \zeta)$

Es gelten die Teiltermausschlüsse für ω, ζ in Δ. Damit ist prinzipiell der Weg vorgezeichnet, sich die je gewünschten Höchstzahlquantoren bereitzustellen. – Wenn es höchstens ein Δ-Ding gibt, dann gibt es auch höchstens 2 (und 3 und ... n) Δ-Dinge. Gibt es hingegen nicht mehr als 2-Dinge, dann wird dadurch die Aussage nicht entschieden, dass es nicht mehr als ein Δ-Ding gibt; und schließlich ist die Aussage, dass es höchstens ein Δ-Ding gibt unverträglich mit der Aussage, dass es wenigstens zwei Δ-Dinge gibt; analog für die höheren Stufen:

Ü 21 Begründen Sie die folgenden Aussagen:

a) $\{\bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi)\} \vdash \bigwedge\omega\bigwedge\xi\bigwedge\zeta\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \wedge [\zeta, \xi, \Delta] \rightarrow$

$\omega = \xi \vee \omega = \zeta \vee \xi = \zeta)$

b) $\bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi)$ ist nicht entscheidbar durch

$\{\bigwedge\omega\bigwedge\xi\bigwedge\zeta\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \wedge [\zeta, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi \vee \xi = \zeta \vee \omega = \zeta)\}$

c) $\{\bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi), \bigvee\omega\bigvee\xi\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \wedge \omega \neq \xi)\}$ ist inkonsistent.

5.3.4. Varianten der Einzigkeit

Die Anzahlquantoren ergeben sich aus dem konjunktiven Zusammenspiel von Mindest- und Höchstzahlquantoren. Es gibt genau ein Δ-Ding ξ genau dann, wenn es wenigstens und höchstens ein Δ-Ding gibt. Es gibt genau zwei Δ-Dinge genau dann, wenn es wenigstens und höchstens zwei Δ-Dinge gibt usf. Für den in der Folge detailliert erörterten Genau-eins- bzw. Eins- bzw. Einzigkeitsquantor sei festgelegt:

[43] Wenn ξ, ω verschiedene Variablen sind und Δ eine parameterfreie Formel ist, in der höchstens ξ frei ist (resp. ξ und die von ξ verschiedenen Variablen $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ frei sind) und in der ω nicht Teilterm ist, dann darf man jede Aussage der Form:

$\mathbf{1}\xi\ \Delta \leftrightarrow \bigvee\xi\ \Delta \wedge \bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi)$ resp.

$\bigwedge\zeta_1\ldots\bigwedge\zeta_n(\mathbf{1}\xi\ \Delta \leftrightarrow \bigvee\xi\ \Delta \wedge \bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi))$

als Definition setzen.

Das Zeichen ’**1**..’ ist der <u>Einzigkeits</u>- oder auch <u>Eins</u>- oder auch <u>Genau-eins-Quantifikator</u>; es handelt sich um einen einstelligen, variablenbestimmenden und quantorerzeugenden Operator. Die Zeichenverbindung ’**1**ξ__’ ist der <u>Einzigkeitsquantor</u> oder der <u>Eins</u>- oder auch <u>Genau-eins-Quantor</u>; es handelt sich um einen einstelligen, formelbestimmenden und formelerzeugenden Operator. Ist Δ eine Formel, dann ist das Ergebnis der Anwendung von ’**1**ξ__’ auf Δ, also die Formel $\mathbf{1}\xi\Delta$, <u>die Einzigkeitsquantifikation</u> bzw. <u>die Eins</u>- bzw. <u>die Genau-eins-Quantifikation von</u> Δ <u>bzgl.</u> ξ.

Mit einer analogen Definition und bei gleichen grammatischen Bestimmungen lassen sich Zwei-, Dreiquantifikator usf. etablieren. Das Definiens für den Genau-zwei-Quantor lautet etwa:

[44] $\bigvee\xi\bigvee\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \wedge \omega \neq \xi) \wedge$

$$\bigwedge\omega\bigwedge\xi\bigwedge\zeta\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \wedge [\zeta, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi \vee \omega = \zeta \vee \xi = \zeta)$$

In diesem Fall soll auch die Variable ζ nicht Teilterm von Δ sein. Es gibt genau zwei Δ-Dinge ξ dann und nur dann, wenn es nicht weniger und nicht mehr als zwei Δ-Dinge ξ gibt. Während der ›Weg nach oben‹, also der Weg zur Definition der weiteren Anzahlquantoren vorgezeichnet ist, bleibt die Frage nach der Bestimmung des 'Für-null-Quantifikators' noch zu erledigen. 'Für-null..' bzw. einfacher und sprachnäher 'Kein..' ist durch Negator und Partikularquantifikator unter den üblichen Bedingungen zu definieren.

[45] Kein $\xi\ \Delta \leftrightarrow \neg \bigvee\xi\ \Delta$

In der die Nomination bzw. die Referenz betreffende Literatur ist häufig von der Existenz-, der Eindeutigkeits- und der Einzigkeitsbedingung die Rede. Diese Sprechweisen lassen sich wie folgt nachzeichnen: Sei Δ eine höchstens in ξ offene Formel; dann ist die Partikularquantifikation von Δ bzgl. ξ, also $\bigvee\xi\Delta\xi$, <u>die Existenzbedingung für</u> Δ; analog ist die Höchstens-eins-Quantifikation, also $\bigwedge\xi\bigwedge\omega(\Delta\wedge[\omega,\xi,\Delta]\rightarrow\omega=\xi)$, <u>die Eindeutigkeitsbedingung für</u> Δ, schließlich ist die Einsquantifikation von Δ bzgl. ξ, also $\mathbf{1}\xi\Delta$, <u>die Einzigkeitsbedingung für</u> Δ.. Die Existenz- resp. Eindeutigkeits- resp. Einzigkeitsbedingung für Δ ist (in einer Sprache *S*) <u>erfüllt</u>, wenn sie (in *S*) beweisbar ist; im Falle der Widerlegbarkeit ist sie unerfüllbar.

Das folgende Theoremschema – der <u>Hauptsatz zur Einzigkeit</u> – formuliert geläufige Varianten der Einzigkeitsbedingung. Die über das Beweisschema herstellbare Einsicht in ihren Zusammenhang ist bei Erörterungen bzgl. der Referenz (insbesondere von Kennzeichnungen) hilfreich:

[46] Wenn ξ, ω verschiedene Variablen sind und Δ eine Formel, in der höchstens ξ frei ist und von der ω nicht Teilterm ist, dann sind alle Instanzen aus den Formelschemata (a) bis (i) paarweise äquivalent:

(a) $\mathbf{1}\xi\ \Delta$

(b) $\bigvee\xi\ \Delta \wedge \bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega)$

(c) $\bigvee\xi\ \Delta \wedge \bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge \omega \neq \xi \rightarrow \neg\ [\omega, \xi, \Delta])$

(d) $\neg \bigwedge\xi \neg\ \Delta \wedge \neg \bigvee\omega\bigvee\xi\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \wedge \omega \neq \xi)$

(e) $\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \bigwedge\omega\ ([\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi))$

(f) $\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \bigwedge\omega\ (\omega \neq \xi \rightarrow \neg\ [\omega, \xi, \Delta]))$

(g) $\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \neg \bigvee\omega\ (\omega \neq \xi \wedge [\omega, \xi, \Delta]))$

(h) $\bigvee\xi\bigwedge\omega\ (\omega = \xi \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta])$

(i) $\bigvee\xi\bigwedge\omega\ (\omega \neq \xi \leftrightarrow \neg\ [\omega, \xi, \Delta])$

Der Nachweis berücksichtigt nur (a), (b), (e) und (h). Er wird in der Form eines Ringbeweises geführt und nutzt insoweit die Zirkeltransitivität der Äquivalenz aus (↑5.1.2).

[47]

[47]a)	1	Sei_1	$\mathbf{1}\xi\ \Delta$	
	2	Da_1	$\mathbf{1}\xi\ \Delta \leftrightarrow \bigvee\xi\ \Delta \wedge \bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega)$	
	3	Also_1	$\bigvee\xi\ \Delta \wedge \bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega)$	| BB; 1,2
[47]b)	1	Sei_1	$\bigvee\xi\ \Delta \wedge \bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega)$	
	2	Also_1	$\bigvee\xi\ \Delta$	| KB; 1
	3	$\text{Sei}_{1,3}$	$[\beta_1, \xi, \Delta]$	
	4	$\text{Sei}_{1,3,4}$	$[\beta_2, \xi, \Delta]$	
	5	$\text{Also}_{1,3,4}$	$[\beta_1, \xi, \Delta] \wedge [\beta_2, \xi, \Delta]$	| KE; 3,4
	6	$\text{Also}_{1,3,4}$	$\bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi)$	| KB; 1
	7	$\text{Also}_{1,3,4}$	$[\beta_1, \xi, \Delta] \wedge [\beta_2, \xi, \Delta] \rightarrow \beta_1 = \beta_2$	| 2xUB; 6
	8	$\text{Also}_{1,3,4}$	$\beta_1 = \beta_2$	| SB; 7,5
	9	$\text{Also}_{1,3}$	$[\beta_2, \xi, \Delta] \rightarrow \beta_1 = \beta_2$	| SE; 4-8
	10	$\text{Also}_{1,3}$	$\bigwedge\omega\ ([\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \beta_1 = \omega)$	| UE; 9
	11	$\text{Also}_{1,3}$	$[\beta_1, \xi, \Delta] \wedge \bigwedge\omega\ ([\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \beta_1 = \omega)$	| KE; 3,10
	12	$\text{Also}_{1,3}$	$\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \bigwedge\omega\ ([\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega))$	| PE; 11
	13	Also_1	$\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \bigwedge\omega\ ([\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega))$	| PB; 2,3-12
[47]c)	1	Sei_1	$\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \bigwedge\omega\ ([\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega))$	
	2	$\text{Sei}_{1,2}$	$[\beta, \xi, \Delta] \wedge \bigwedge\omega\ ([\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \beta = \omega)$	
	3	$\text{Also}_{1,2}$	$[\beta, \xi, \Delta]$	| KB; 2
	4	$\text{Also}_{1,2}$	$\bigwedge\omega\ ([\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \beta = \omega)$	| KB; 2
	5	$\text{Sei}_{1,2,5}$	$\beta_1 = \beta$	
	6	$\text{Also}_{1,2,5}$	$[\beta_1, \xi, \Delta]$	| ZR; 3,5
	7	$\text{Also}_{1,2}$	$\beta = \beta_1 \rightarrow [\beta_1, \xi, \Delta]$	| SE; 5-6

	8	$\text{Also}_{1,2}$	$[\beta_1, \xi, \Delta] \rightarrow \beta = \beta_1$	| UB; 4
	9	$\text{Also}_{1,2}$	$\beta = \beta_1 \leftrightarrow [\beta_1, \xi, \Delta]$	| BE; 7,8
	10	$\text{Also}_{1,2}$	$\bigwedge\omega\ (\beta = \omega \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta])$	| UE; 9
	11	$\text{Also}_{1,2}$	$\bigvee\xi\bigwedge\omega\ (\xi = \omega \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta])$	| PE; 10
	12	Also_{1}	$\bigvee\xi\bigwedge\omega\ (\xi = \omega \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta])$	| PB; 1,2-11

[47]d)	1	Sei_{1}	$\bigvee\xi\bigwedge\omega\ (\xi = \omega \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta])$	
	2	$\text{Sei}_{1,2}$	$\bigwedge\omega\ (\beta = \omega \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta])$	
	3	$\text{Also}_{1,2}$	$\beta = \beta \leftrightarrow [\beta, \xi, \Delta]$	| UB; 2
	4	$\text{Also}_{1,2}$	$\beta = \beta$	| IE
	5	$\text{Also}_{1,2}$	$[\beta, \xi, \Delta]$	| BB; 3,4
	6	$\text{Also}_{1,2}$	$\bigvee\xi\ \Delta$	| PE; 5
	7	$\text{Sei}_{1,2,7}$	$[\beta_1, \xi, \Delta] \wedge [\beta_2, \xi, \Delta]$	
	8	$\text{Also}_{1,2,7}$	$[\beta_1, \xi, \Delta]$	| KB; 7
	9	$\text{Also}_{1,2,7}$	$[\beta_2, \xi, \Delta]$	| KB; 8
	10	$\text{Also}_{1,2,7}$	$\beta = \beta_1 \leftrightarrow [\beta_1, \xi, \Delta]$	| UB; 2
	11	$\text{Also}_{1,2,7}$	$\beta = \beta_1$	| BB; 8,10
	12	$\text{Also}_{1,2,7}$	$\beta = \beta_2 \leftrightarrow [\beta_2, \xi, \Delta]$	| UB; 2
	13	$\text{Also}_{1,2,7}$	$\beta = \beta_2$	| BB; 9,12
	14	$\text{Also}_{1,2,7}$	$\beta_1 = \beta_2$	| IB; 11,13
	15	$\text{Also}_{1,2}$	$[\beta_1, \xi, \Delta] \wedge [\beta_2, \xi, \Delta] \rightarrow \beta_1 = \beta_2$	| SE; 7-14
	16	$\text{Also}_{1,2}$	$\bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega)$	| 2xUE; 15
	17	$\text{Also}_{1,2}$	$\bigvee\xi\ \Delta \wedge \bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega)$	| KE; 6;16
	18	Also_{1}	$\bigvee\xi\ \Delta \wedge \bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega)$	| PB; 1,2-17
	19	Da_{1}	$\mathbf{1}\xi\ \Delta \leftrightarrow \bigvee\xi\ \Delta \wedge \bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega)$	
	20	Also_{1}	$\mathbf{1}\xi\ \Delta$	| BB; 19,18

In den Zeilen [47]a) wird {(a)} ⊢ (b) nachgewiesen. In [47]b) erfolgt der Aufweis von {(b)} ⊢ (e). [47]c) erweist {(e)} ⊢ (h); und mit [47]d) wird {(h)} ⊢ (a) nachgewiesen und der Zirkel damit geschlossen. Insgesamt gilt dann (a) ⊣⊢ (b) ⊣⊢ (e) ⊣⊢ (h) ⊣⊢ (a).

Zu Einzelheiten: In [47]a) wird lediglich die Definition ausgenutzt. – [47]b) zielt auf eine Partikularquantifikation. Die dafür erforderliche Diskurslage wird in Zeile 11 erreicht. Das linke Glied der Konjunktion steht schon in Zeile 3 bereit und ist schlicht die Ersatzannahme im Blick auf PB in Zeile 2. Dabei ist wie üblich stillschweigend vorausgesetzt, dass β_1 nicht Teilterm von Δ ist; analoges gilt für die Ersatzannahmen in [47]c) und [47]d). Die Schwierigkeit liegt in [47]b) in der Gewinnung des rechten Konjunkts. Die Annahme des parametrisierten Antezedens erfolgt in Zeile 5; und die konjunktive Zusammenfassung beider Annahmen in Zeile 5 macht das rechte Konjunkt der Annahme aus Zeile 1 benutzbar. Ein entscheidender Punkt der Überlegung ist die doppelte Ausnutzung des parametrisierten linken Konjunkts der Ableitungsbasis.

In [47]c) wird zunächst die parametrisierte Basis aus Zeile 2 in Zeile 3 und 4 zerlegt. Der Gewinn der für die Quantormanöver erforderlichen Bisubjunktion in Zeile 9 erfolgt in der Links-Rechts-Richtung mit dem ersten Konjunkt der Ersatzannahme und in der Rechts-Links-Richtung mit dem universalquantifizierten Konjunkt der Ersatzannahme.

In [47]d) wird der Übergang von (h) zu (b), und dann – in den Zeilen 18 bis 20 – von (b) zu (a) vorgeführt. Um (b) zu gewinnen, müssen zwei Konjunkte gewonnen werden. Das erste, eine Partikularquantifikation, ergibt sich in den Zeilen 2 bis 6 aus der parametrisierten Annahme und der Totalreflexivität der Identität. Die Höchstaussage wird in den Zeilen 7 bis 16 hergeleitet. Der entscheidende Punkt besteht in der Ausnutzung der Ersatzannahme.

Informell lassen sich die Ableitungen so darstellen: Gibt es genau ein Δ-Ding ξ, dann besagt das definitionsgemäß, dass es wenigstens und höchstens ein Δ-Ding ξ gibt ([48-a]). – Gebe es wenigstens ein Δ-Ding ξ, z.B. β_1 und auch höchstens ein Δ-Ding. Angenommen ein β_2 sei ebenfalls Δ. Da es nicht mehr als eines gibt sind β_1 und β_2 identisch. Was immer also Δ ist, ist mit β_1 identisch. Es existiert also, repräsentiert durch β_1, ein Δ-Ding, mit dem alle Δ-Dinge identisch sind ([47]b)).

Gebe es ein Δ-Ding, z.B. β, mit dem alle Δ-Gebilde identisch sind, dann ist β mit allen, aber auch nur den Gebilden ω identisch, die ihrerseits Δ sind ([47]c)). – Gebe es schließlich ein Gebilde, z.B. β, das mit allen und nur den Gebilden identisch ist, die Δ sind. Daraus, dass β mit sich identisch ist, folgt, dass es selbst ein Δ-Ding ist; mit β gibt es ein Δ-Ding. Seien nun beliebige β_1, β_2 Δ-Dinge. Nach Annahme müssen sie mit β und damit auch untereinander gleich sein. Es gibt also nicht mehr als ein Δ ([47]d)).

Ü 22 Die im Beweis nicht berücksichtigten Formulierungen der Einzigkeit ergeben sich aus den übrigen. Machen Sie sich deutlich, aufgrund welcher Operationen dies geschieht!

Im Sinne der Sensibilisierung für Einzigkeitsunterstellungen und -illusionen ist es angezeigt, sich mit gebrauchssprachlichen Wiedergaben der Einzigkeitsbedingung vertraut zu machen; das geschieht in der folgenden ergänzungsfähigen Liste:

[48] (a) es gibt genau/gerade/präzise/just ein Δ, für genau ein Δ, es gibt genau ein ξ, das Δ ist, für genau ein Δ-Ding ξ

(b) es gibt wenigstens und höchstens/nur/allenfalls/nicht mehr als ein Δ-Ding ξ, für wenigstens und höchstens ein Δ-Ding ξ, es gibt wenigstens ein Δ-Ding ξ und wenn ξ und ω Δ-Dinge sind, sind sie identisch

(c) es gibt wenigstens ein Δ-Ding ξ und alles, was von einem beliebigen Δ-Ding ω verschieden ist, ist kein Δ-Ding

(d) nicht alles ist nicht Δ und es gibt keine voneinander verschiedenen Δ-Dinge

(e) es gibt wenigstens ein Δ-Ding ξ, mit dem alle Δ-Dinge ω identisch sind

(f) es gibt wenigstens ein Δ-Ding derart, dass alle von ihm verschiedenen Gebilde keine Δ-Dinge sind.

(g) es gibt wenigstens ein Δ-Ding, zu dem es keine verschiedenen Δ-Dinge gibt

(h) es gibt wenigstens ein Gebilde, mit dem alle und nur die Δ-Dinge identisch sind

(i) es gibt wenigstens ein Gebilde, von dem alle und nur die Dinge, die nicht Δ sind, verschieden sind

Es ist nützlich, diese Formulierungen an Beispielen durchzuspielen. Einfache Instanzen für Δ wären etwa '*x* ist gerade Primzahl', '*x* ist heutiger König von Frankreich', '*x* ist alles bestimmende Wirklichkeit', '*x* ist Verfasser der „Principia Mathematica"', '*w* ist ein Ungeheuer von Loch Ness'.

Um eine Einzigkeitsunterstellung als Einzigkeitsillusion entlarven zu können, ist die Beherrschung der Negationen der Einzigkeitsbedingung hilfreich. Paarweise äquivalent unter den üblichen Bedingungen sind die Instanzen folgender Formelschemata:

[49] (a) $\neg\, \mathbf{1}\xi\, \Delta$

(b) $\neg \bigvee\xi\, \Delta \vee \neg \bigwedge\xi\bigwedge\omega\, (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi)$

(c) $\neg \bigvee\xi\, \Delta \vee \neg \bigwedge\xi\bigwedge\omega\, (\Delta \wedge \omega \neq \xi \rightarrow \neg\, [\omega, \xi, \Delta])$

(d) $\bigwedge\xi \neg\, \Delta \vee \bigvee\xi\bigvee\omega\, (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \wedge \omega \neq \xi)$

(e) $\neg \bigvee\xi\, (\Delta \wedge \bigwedge\omega\, ([\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi))$

(f) $\neg \bigvee\xi\, (\Delta \wedge \bigwedge\omega\, (\omega \neq \xi \rightarrow \neg\, [\omega, \xi, \Delta]))$

(g) $\neg \bigvee\xi\, (\Delta \wedge \neg \bigvee\omega\, (\omega \neq \xi \wedge [\omega, \xi, \Delta]))$

(h) $\neg \bigvee\xi\bigwedge\omega\, (\omega = \xi \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta])$

(i) $\neg \bigvee\xi\bigwedge\omega\, (\omega \neq \xi \leftrightarrow \neg\, [\omega, \xi, \Delta])$

Die Reihenfolge der Negationen von [49] korrespondiert der Reihenfolge der Negate aus [46]. Analog entsprechen sich die gebrauchssprachlichen Lesarten von [48] und [50], wobei unter [50] die Varianten entfallen:

[50] (a) es gibt nicht genau ein Δ-Ding ξ.

(b) es gibt kein Δ-Ding ξ, oder es ist nicht der Fall, dass Δ-Dinge ξ, ω identisch sind.

(c) es gibt kein Δ-Ding ξ, oder es ist nicht der Fall, dass ein von einem Δ-Ding ξ verschiedenes ω ein Δ-Ding ist.

(d) alles und jedes ist nicht Δ oder es gibt verschiedene Δ-Dinge.

(e) kein Δ-Gebilde ξ, ist mit allen Δ-Dingen ω identisch.

(f) es gibt kein Δ-Ding ξ, von dem nur die Nicht-Δ-Dinge ω verschieden sind.

(g) es gibt kein Δ-Ding ξ, für das es kein Δ-Ding ω gibt, das von ihm verschieden ist.

(h) es gibt keine Gebilde ξ, die mit allen und nur den Δ-Dinge identisch sind.

(i) es gibt kein ξ, das von allen und nur den Nicht-Δ-Dingen verschieden ist.

Auch hinsichtlich der negierten Einzigkeitsbedingung ist es hilfreich, die Formulierung mit einfachen Instanzen durchzuspielen. – Aus der Partikularquantifikation der Konjunktion von Δ und B, also aus $\bigvee\xi(\Delta\wedge\mathrm{B})$, folgt nicht die Universalquantifikation von Δ und B, also $\bigwedge\xi(\Delta\rightarrow\mathrm{B})$; während die Aussage '$\bigvee$*x*(*x* ist männlich $\wedge$ *x* ist ledig)' wahr ist, trifft die Aussage '$\bigwedge$*x*(*x* ist männlich $\rightarrow$ *x* ist ledig)' nicht zu. Gäbe es hingegen nicht mehr als ein Δ-Ding, dann wäre die Universalquantifikation Konsequenz. Am Beispiel: Sei x ist männlich und x ist ledig. Sei y männlich. Da es nicht mehr als ein männliches Wesen gibt ist x=y. Also ist y ledig.

Umgekehrt folgt aus $\bigwedge\xi(\Delta\rightarrow B)$ nicht $\bigvee\xi(\Delta\wedge B)$. Es sind z.B. alle geraden Primzahlen größer 5 natürliche Zahlen; dennoch gibt es keine gerade Primzahl größer 5, die natürliche Zahl ist. Das Gegenbeispiel gibt die Diskurslage an, die den Übergang lizenzieren würde: Gibt es ein Δ-Ding, dann ist dieses auch B, weil eben alle Δ-Dinge B sind.

Fasst man beide Überlegungen zusammen, dann ergibt sich: Unter der Eindeutigkeitsbedingung ist die Universalquantifikation eine Konsequenz der Partikularquantifikation. Unter der Existenzbedingung ist die Partikularquantifikation eine Konsequenz der Universalquantifikation. Damit sind Partikular- und Universalquantifikation unter der Einzigkeitsbedingung logisch äquivalent. Anders formuliert: Die Subjunktion aus der Einzigkeitsbedingung und der Bisubjunktion aus der Partikular- und Universalquantifikation ist logisch wahr. Eine Variante in aristotelischer Terminologie: Gilt Einzigkeit für den Subjektbegriff, dann fallen universell und partikular bejahende Urteile über das Subjekt zusammen. Unter den üblichen Bedingungen gilt:

[51]	0	Es-gilt	$\mathbf{1}\xi\ \Delta \rightarrow (\bigvee\xi\ (\Delta \wedge B) \leftrightarrow \bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow B))$	
	1	Sei_{1}	$\mathbf{1}\xi\ \Delta$	
	2	Da_{1}	$\mathbf{1}\xi\ \Delta \leftrightarrow \bigvee\xi\ \Delta \wedge \bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega)$	
	3	Also_{1}	$\bigvee\xi\ \Delta \wedge \bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega)$	| BB; 1,2
	4	Also_{1}	$\bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega)$	| KB; 3
	5	$\text{Sei}_{1,5}$	$\bigvee\xi\ (\Delta \wedge B)$	
	6	$\text{Sei}_{1,5,6}$	$[\beta, \xi, \Delta] \wedge [\beta, \xi, B]$	
	7	$\text{Also}_{1,5,6}$	$[\beta, \xi, \Delta]$	| KB; 6
	8	$\text{Also}_{1,5,6}$	$[\beta, \xi, B]$	| KB; 6
	9	$\text{Sei}_{1,5,6,9}$	$[\beta_1, \xi, \Delta]$	
	10	$\text{Also}_{1,5,6,9}$	$[\beta, \xi, \Delta] \wedge [\beta_1, \xi, \Delta]$	| KE; 7,9
	11	$\text{Also}_{1,5,6,9}$	$\bigwedge\omega\ ([\beta, \xi, \Delta] \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \beta = \omega)$	| UB; 4
	12	$\text{Also}_{1,5,6,9}$	$[\beta, \xi, \Delta] \wedge [\beta_1, \xi, \Delta] \rightarrow \beta = \beta_1$	| UB; 11
	13	$\text{Also}_{1,5,6,9}$	$\beta = \beta_1$	| SB; 10,12
	14	$\text{Also}_{1,5,6,9}$	$[\beta_1, \xi, B]$	| IB; 13,8
	15	$\text{Also}_{1,5,6}$	$[\beta_1, \xi, \Delta] \rightarrow [\beta_1, \xi, B]$	| SE; 9-14
	16	$\text{Also}_{1,5,6}$	$\bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow B)$	| UE; 15
	17	$\text{Also}_{1,5}$	$\bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow B)$	| PB; 5,6-16

18	Also_{1}	$\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \mathrm{B}) \rightarrow \bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow \mathrm{B})$	| SE; 5-17
19	$\text{Sei}_{1,19}$	$\bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow \mathrm{B})$	
20	$\text{Also}_{1,19}$	$\bigvee\xi\ \Delta$	| KB; 3
21	$\text{Sei}_{1,19,21}$	$[\beta, \xi, \Delta]$	
22	$\text{Also}_{1,19,21}$	$[\beta, \xi, \Delta] \rightarrow [\beta, \xi, \mathrm{B}]$	| UB; 19
23	$\text{Also}_{1,19,21}$	$[\beta, \xi, \mathrm{B}]$	| SB; 22,21
24	$\text{Also}_{1,19,21}$	$[\beta, \xi, \Delta] \wedge [\beta, \xi, \mathrm{B}]$	| KE; 21,23
25	$\text{Also}_{1,19,21}$	$\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \mathrm{B})$	| PE; 24
26	$\text{Also}_{1,19}$	$\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \mathrm{B})$	| PB; 20,21-25
27	Also_{1}	$\bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow \mathrm{B}) \rightarrow \bigvee\xi\ (\Delta \wedge \mathrm{B})$	| SE; 19-26
28	Also_{1}	$\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \mathrm{B}) \leftrightarrow \bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow \mathrm{B})$	| BE; 18,27
29	Also	$\mathbf{1}\xi\ \Delta \rightarrow (\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \mathrm{B}) \leftrightarrow \bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow \mathrm{B}))$	| SE; 1-28

In den Zeilen 1 bis 4 wird die Voraussetzung einsatzfähig gemacht. In den Zeilen 5-17 wird der Übergang von der Partikularquantifikation zur Universalquantifikation vollzogen und in Zeile 19 durch SE ›dokumentiert‹; dabei wird wie üblich in Zeile 6 vorausgesetzt, dass β nicht Teilterm von Δ und B ist. In den Zeilen 19 bis 26 wird unter Ausnutzung der Existenzbedingung der Übergang von der Universalquantifikation zur Partikularquantifikation vorgeführt und dann in Zeile 27 mit SE horizontalisiert.

Ü 23 a) Ordnen Sie die folgenden Aussagen der theistischen, atheistischen, monotheistischen und polytheistischen Position zu:

(i) $\bigvee x\ \text{Gott}(x)$

(ii) $\bigwedge x \bigwedge y\ (\text{Gott}(x) \wedge \text{Gott}(y) \rightarrow x = y)$

(iii) $\neg \bigvee x\ \text{Gott}(x)$

(iv) $\neg \bigwedge x \bigwedge y\ (\text{Gott}(x) \wedge \text{Gott}(y) \rightarrow x = y)$

(v) $\bigvee x\ (\text{Gott}(x) \wedge \neg \bigvee y\ (\text{Gott}(y) \wedge x \neq y))$

(vi) $\bigvee x\ (\text{Gott}(x) \wedge \bigvee y\ (\text{Gott}(y) \wedge x \neq y))$

(vii) $\mathbf{1}x\ \text{Gott}(x)$

b) Bilden Sie das Logische Quadrat zu der Aussage 'Alle Probleme haben genau eine Lösung'.

c) Beweisen Sie das Aussagenschema:

$(\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \Gamma) \leftrightarrow \bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow \Gamma)) \rightarrow \bigvee\xi\ \Delta$

d) Widerlegen Sie (z.B. im Rückgriff auf die Baukastenelemente von [13]):

$(\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \Gamma) \leftrightarrow \bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow \Gamma)) \rightarrow \bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi)$

Mit Blick auf die Kennzeichnungsterme (↑7) ist festzuhalten: Es gibt eine Gegebenheit, welche das einzige Δ-Ding ist und außerdem B ist, wenn es genau ein Δ-Ding gibt, und wenn wenigstens ein Δ-Ding B ist bzw. wenn alle Δ-Dinge B sind. Paarweise äquivalent (unter den üblichen Bedingungen) sind mithin die Instanzen folgender Schemata:

[52] (a) $\bigvee\xi\ (\bigwedge\omega\ (\omega = \xi \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta]) \wedge \mathrm{B})$

(b) $\mathbf{1}\xi\ \Delta \wedge \bigvee\xi\ (\Delta \wedge \mathrm{B})$

(c) $\mathbf{1}\xi\ \Delta \wedge \bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow \mathrm{B})$

Der Nachweis erfolgt wiederum im Ring:

[53]

[53]a)	1	Sei	$\bigvee\xi\ (\bigwedge\omega\ (\omega = \xi \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta]) \wedge \mathrm{B})$
	2	Sei	$\bigwedge\omega\ (\omega = \beta \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta]) \wedge [\beta, \xi, \mathrm{B}]$
	3	Also	$\bigwedge\omega\ (\omega = \beta \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta])$
	4	Also	$[\beta, \xi, \mathrm{B}]$
	5	Also	$\bigvee\xi\bigwedge\omega\ (\omega = \xi \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta])$
	6	Da	$\mathbf{1}\xi\ \Delta \leftrightarrow \bigvee\xi\bigwedge\omega\ (\omega = \xi \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta])$
	7	Also	$\mathbf{1}\xi\ \Delta$
	8	Also	$\beta = \beta \leftrightarrow [\beta, \xi, \Delta]$
	9	Da	$\beta = \beta$
	10	Also	$[\beta, \xi, \Delta]$
	11	Also	$[\beta, \xi, \Delta] \wedge [\beta, \xi, \mathrm{B}]$
	12	Also	$\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \mathrm{B})$
	13	Also	$\mathbf{1}\xi\ \Delta \wedge \bigvee\xi\ (\Delta \wedge \mathrm{B})$

	14	Also	$\mathbf{1}\xi\, \Delta \wedge \bigvee\xi\, (\Delta \wedge \mathrm{B})$
[53]b)	1	Sei	$\mathbf{1}\xi\, \Delta \wedge \bigvee\xi\, (\Delta \wedge \mathrm{B})$
	2	Also	$\mathbf{1}\xi\, \Delta$
	3	Da	$\mathbf{1}\xi\, \Delta \rightarrow (\bigvee\xi\, (\Delta \wedge \mathrm{B}) \leftrightarrow \bigwedge\xi\, (\Delta \rightarrow \mathrm{B}))$
	4	Also	$\bigvee\xi\, (\Delta \wedge \mathrm{B}) \leftrightarrow \bigwedge\xi\, (\Delta \rightarrow \mathrm{B})$
	5	Also	$\bigvee\xi\, (\Delta \wedge \mathrm{B})$
	6	Also	$\bigwedge\xi\, (\Delta \rightarrow \mathrm{B})$
	7	Also	$\mathbf{1}\xi\, \Delta \wedge \bigwedge\xi\, (\Delta \rightarrow \mathrm{B})$
[53]c)	1	Sei	$\mathbf{1}\xi\, \Delta \wedge \bigwedge\xi\, (\Delta \rightarrow \mathrm{B})$
	2	Also	$\mathbf{1}\xi\, \Delta$
	3	Da	$\mathbf{1}\xi\, \Delta \leftrightarrow \bigvee\xi\bigwedge\omega\, (\omega = \xi \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta])$
	4	Also	$\bigvee\xi\bigwedge\omega\, (\omega = \xi \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta])$
	5	Sei	$\bigwedge\omega\, (\omega = \beta \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta])$
	6	Also	$\beta = \beta \leftrightarrow [\beta, \xi, \Delta])$
	7	Also	$\beta = \beta$
	6	Also	$[\beta, \xi, \Delta]$
	7	Also	$\bigwedge\xi\, (\Delta \rightarrow \mathrm{B})$
	8	Also	$[\beta, \xi, \Delta] \rightarrow [\beta, \xi, \mathrm{B}]$
	9	Also	$[\beta, \xi, \mathrm{B}]$
	10	Also	$\bigwedge\omega\, (\omega = \beta \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta]) \wedge [\beta, \xi, \mathrm{B}]$
	11	Also	$\bigvee\xi\, (\bigwedge\omega\, (\omega = \xi \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta]) \wedge \mathrm{B})$
	12	Also	$\bigvee\xi\, (\bigwedge\omega\, (\omega = \xi \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta]) \wedge \mathrm{B})$

Zuletzt ist das Verhältnis zwischen zwei Sachverhalten zu betrachten, die nur in eine Richtung in der Folgerungsbeziehung stehen: Gibt es genau ein Δ-Ding, das ferner B ist, dann gibt es genau ein Ding, das Δ und B ist. Die Umkehrung gilt nicht: Gibt es genau ein Ding, das Δ und B ist, dann folgt nicht, dass es genau ein Δ-Ding gibt, das auch noch B ist: Daraus, dass es genau eine Gegebenheit gibt, die Primzahl und gerade ist, folgt nicht, dass es genau eine Primzahl gibt, die überdies gerade ist.

Ü 24 a) Ergänzen Sie in die zulässigen Ableitungen [54-a] bis [54-c] durch Indexkommentar oder grafischen Kommentierung und durch einen Regelkommentar.

b) Beweisen Sie: $\bigvee \xi\ (\bigwedge \omega\ (\omega = \xi \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta]) \wedge \mathrm{B}) \rightarrow \mathbf{1}\xi\ (\Delta \wedge \mathrm{B})$

Die Einzigkeit hängt eng mit dem (bzw. den) bestimmten Artikel(n) zusammen. Wenn die Rede ist von dem-Soundso, dann setzen wir in vielen Umgebungen voraus, dass es genau ein Soundso gibt. Ist die Einzigkeitsbedingung dann nicht erfüllt, gerät man sofort in Schwierigkeiten (↑7).

Gerade in philosophischen Kontexten signalisiert man durch die Verwendung des bestimmten Artikels häufig die Einzigkeitsunterstellung: 'der Sinn des Lebens', 'das Ziel der Geschichte', 'der Anfang der Welt', 'das höchste Wesen', 'die alles bestimmende Wirklichkeit' 'der letzte Einheitspunkt des Strebens' usf. Bei allen diesen Wendungen ist nach (dem Nachweis) der Erfüllbarkeit der Einzigkeitsbedingung zu fragen.

Ü 25 a) Formulieren Sie für die Wendungen mit dem bestimmten Artikel die Einzigkeitsbedingung!

b) Geben Sie aus dem philosophischen und den nichtphilosophischen Bereichen weitere Wendungen mit dem bestimmten Artikel und formulieren Sie die dazugehörige Einzigkeitsbedingung!

Zusatz: Logischer Pluralismus

A. Die in den beiden vorstehenden Kapiteln eingeübte Logik ist die klassische Logik. Schon die Auszeichnung als klassisch weist darauf hin, dass es alternative Vorschläge zur Reglementierung der logischen Operatoren gibt. Faktisch herrscht ein Pluralismus der Logiken. In der Folge sind zwei abweichende Optionen vorzustellen. Die Ausführungen sind nur für Interessenten an Logik und Philosophie der Logik gedacht; ihre Kenntnis ist für den Fortgang nicht nötig.

Die positive Junktorenlogik (= PJL) bildet den Ausgangspunkt: Sie umfasst die Regeln AR, KB, KE, AB, AE, SB, SE, BB, BE, W also alle für die Junktoren einschlägigen Regeln ausnehmlich der Negatorregeln:

[1] PJL = {AR, KB, KE, AB, AE, SB, SE, BB, BE, W}

Die klassische Kette aus minimaler, intuitionistischer und klassischer Logik ergibt sich durch Hinzufügung verschiedener Negatorregeln: Gibt man PJL die Regel NE bei, dann entsteht die minimale Junktorenlogik (= MJL):

[2] MJL = {NE} $\cup$ PJL

Im Rahmen von MJL kann man auf vorliegenden ›Trouble‹ reagieren, indem man eine ›Ursache‹ beseitigt, also eine Aussage negiert, von der Δ oder die Negation von Δ abhängt; das ist die einzige Verwendungsmöglichkeit für den Negator in MJL. – Die intuitionistische Junktorenlogik (= IJL) fügt der MJL das Ex-falso-quod-libet (= Efq) hinzu, das der Einheitlichkeit halber als Regel formuliert wird:

[3] Wenn man die Konjunktion aus einer Aussage B und der Negation von B gewonnen hat, dann darf man eine beliebige Aussage Δ folgern.

MJL ist durch [3] verstärkt. In MJL lässt sich das Ex-falso-quod-libet-negatum, die Aussage $B\wedge\neg B\rightarrow\neg\Delta$, beweisen, nicht aber das Efq (als Aussage), also $B\wedge\neg B\rightarrow\Delta$. Insgesamt gilt:

[4] IJL = {Efq} $\cup$ MJL

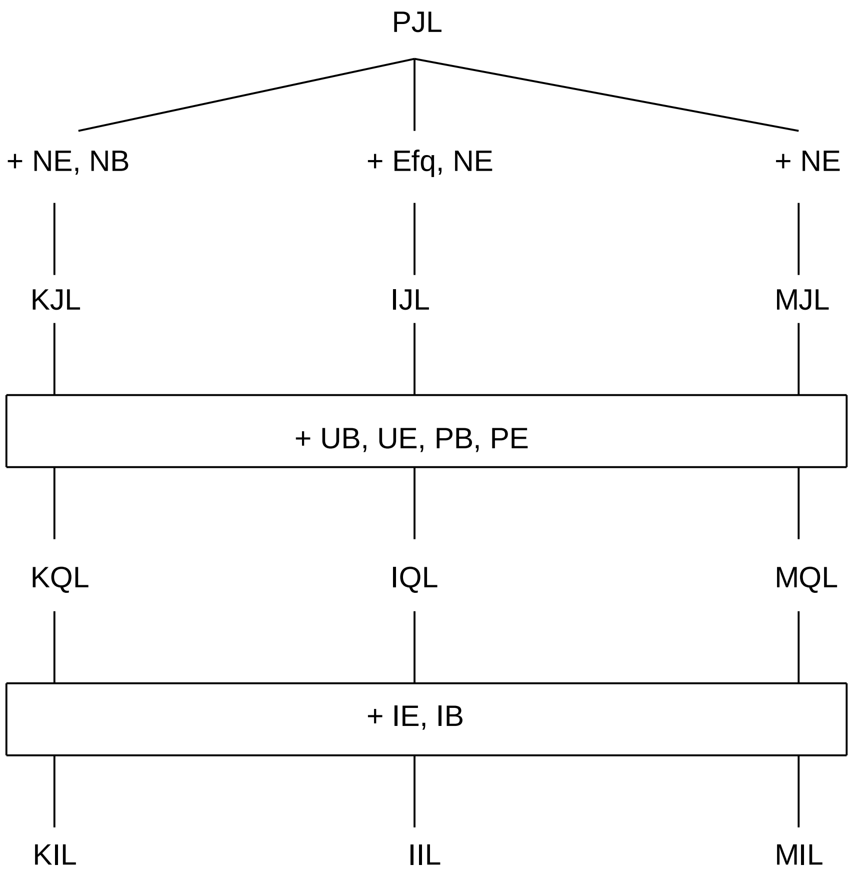
Um die klassische Junktorenlogik (= KJL) zu erhalten, geht man ebenfalls von der MJL aus, fügt aber statt Efq NB, die doppelte Negatorbeseitigung, hinzu:

[5] KJL = MJL $\cup$ {NB}

Die NB ist stärker als Efq: Mit Efq lässt sich in IJL nicht das NB-Theorem $\neg\neg A\rightarrow A$ und auch kein Tertium-non-datur beweisen; das ist in KJL der Fall.

Die Quantor- und die Identitätsregeln sind in allen Varianten gleich. Minimale, intuitionistische und klassische Logik sind also junktorendifferente Logiken: Der zwischen ihnen auszutragende Streit bezieht sich (zunächst) nicht auf Quantoren oder Identitätsprädikat. Minimale, intuitionistische und klassische Quantoren- und Identitätslogik (= MQL, IQL, KQL) ergeben sich durch Hinzufügung der entsprechenden Quantor- und Identitätsregeln zur junktorenlogischen Basis:

[6]



Die drei vorgestellten Logiken sollen an einigen Punkten verglichen werden. Die Aussage $(A\rightarrow\Gamma)\vee(\Gamma\rightarrow A)$ gilt klassisch, aber weder intuitionistisch noch (a fortiori) minimal. Das Schema enthält Adjunktor und Subjunktor, aber keinen Negator. Durch die Negatorregeln, hier: durch NB, wird also auch die Bedeutung der anderen Operatoren ›affiziert‹. Das Principium Contradictionis gilt in seinen junktoren- und quantorenlogischen Varianten in allen betrachteten Logiken.

Das Tertium-non-datur ist nur klassisch gültig, seine doppelte Negation hat auch minimalen und intuitionistischen Bestand. Das Efq gilt, wie schon gesagt, klassisch und intuitionistisch, nicht aber minimal. Das Contrarium- bzw. Reductio-Gesetz $(A\rightarrow\neg A)\rightarrow\neg A$ gilt durchgehend, die klassische Variante $(\neg A\rightarrow A)\rightarrow A$ jedoch nur klassisch. Während man durchgängig von einer Aussage Δ zu ihrer doppelten Negation übergehen darf, ist die Umkehrung, also $\neg\neg A\rightarrow A$, nur klassisch gültig. Unter der Bedingung des Tertium-non-datur gilt sie auch intuitionistisch. Minimal ist aber selbst $(A\vee\neg A)\rightarrow(\neg\neg A\rightarrow A)$ kein Theorem. Das klassische Dilemma $(A\rightarrow B)\wedge(\neg A\rightarrow B)\rightarrow B$ gilt erwartungsgemäß nur klassisch. Dasselbe gilt für die Kontraposition mit negierten Subjunkten in der Ausgangssubjunktion, also für $(\neg A\rightarrow\neg B)\rightarrow(B\rightarrow A)$. Auch $\neg(A\wedge\neg B)\rightarrow(A\rightarrow B)$ ist intuitionistisch und minimal ungültig. Es ist hingegen $(A\vee B)\rightarrow(\neg A\rightarrow B)$ minimal nicht zu beweisen, wohl aber intuitionistisch und a fortiori klassisch. Gleiches gilt für den disjunktiven Syllogismus, also für $\neg A \wedge (A \vee B) \rightarrow B$. – Die klassisch gegebenen Interdefinierbarkeiten zwischen Negator, Adjunktor, Subjunktor und Konjunktor sind also in den erörterten schwächeren Logiken nicht zu halten.

Die junktorenlogischen Gegebenheiten vererben sich auf die quantorenlogischen Verhältnisse fort. So gilt etwa $\bigwedge\omega(\Delta \vee \neg\Delta)$, eine quantorenlogische Variante des Tertium-non-datur, zwar klassisch, aber sonst nicht: hingegen gilt $\bigwedge\omega\neg\neg(\Delta \vee \neg\Delta)$ in allen drei Logiken. Bei den Quantorumformungen ist $\neg\bigvee\omega\neg\Delta \rightarrow \bigwedge\omega\Delta$ sowie die duale Formel $\neg\bigwedge\omega\neg\Delta \rightarrow \bigvee\omega\Delta$ intuitionistisch und minimal ungültig.

B. Die Existenz dreier Logiken weist zunächst darauf hin, dass es nicht angezeigt ist, von der Logik zu sprechen. Es besteht jedoch auch Anlass, einige Folgefragen aufzuwerfen und wenigstens im Ansatz zu beantworten. Zunächst: Sind die drei vorgestellten Logiken faktisch die einzigen Kandidaten?

Die Antwort ist negativ: Gegenwärtig wird eine Reihe weiterer Logiken, etwa parakonsistente oder relevantistische, diskutiert. Das vorgestellte Trio bildet nur insofern eine klassische Kette, als bereits eine langdauernde Konkurrenz besteht und die interlogischen Verhältnisse gut untersucht sind. Einige cum grano salis zu lesende Ergebnisse: Minimallogische Wahrheiten sind auch intuitionistisch beweisbar; und Wahrheiten der intuitionistischen Logik sind auch klassisch beweisbar. Negationen folgen aus einer Aussagenklasse genau dann klassisch, wenn dies auch intuitionistisch der Fall ist. Eine beliebige Aussage Δ folgt genau dann klassisch aus einer Aussagenklasse *X*, wenn ihre doppelte Negation $\neg\neg\Delta$ intuitionistisch aus *X* folgt.

Sodann: Gibt es (andere als nur historische) Gründe, die klassische Logik in der Lehre bevorzugt zu behandeln? Ja: Die klassische Logik ist – erstens – die Bezugslogik für die Präsentation abweichender Logiken, und zwar sowohl der abschwächenden wie auch der modifizierenden (konnexiven) Varianten. Die klassische Logik ist – zweitens – die in der klassischen Mathematik und damit auch in den (zunehmend) mathematischen Wissenschaften verwendete Logik. Was die intuitionistische und minimale Logik angeht, kann ergänzt werden: In der Informatik spielen sie die leitende Rolle; dort ist – so scheint es heute – für den Übergang von $\neg\neg A$ zu A und äquivalente Formulierungen kein Platz.

Drittens: Wie verschafft man sich überhaupt einen Überblick über die de facto konkurrierenden bzw. prinzipiell konkurrenzfähigen Logiken? Die Frage hat eine eher mathematische und eine eher philosophische Seite; nur die zweite soll hier erörtert werden. Ohne Vollständigkeitsanspruch werden vier Rücksichten namhaft gemacht, deren Veranschlagung zur Herstellung von Überschaubarkeit beiträgt: (i) Aus welchem Anlass wird überhaupt die Präsentation einer neuen Logik ins Auge gefasst? – Der Intuitionist sieht sich etwa durch die Geltung des Tertium-non-datur für unendliche Bereiche zur Ablehnung der klassischen Logik und zur Errichtung einer eigenen veranlasst. Der Relevanzlogiker lehnt die sogenannten Paradoxe der Subjunktion, also $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ und $A \rightarrow (B \rightarrow A)$, ab. Der parakonsistente Logiker will aus manchen Widersprüchen nicht Beliebiges folgern lassen usf.

(ii) In welchem Feld setzt die Revision an? – Hier wären junktor-, quantor- und identitätsbezügliche Neuvorschläge zu unterscheiden. Besonders dicht ist das Feld im Kernbereich, also im junktorbezüglichen Feld. Die an UB und PE ansetzende freie Logik ist ein Beispiel für die zweite Gruppe. – (iii) Welcher Zweck wird der Logik zugedacht bzw. in welchem Szenario wird der Zweck der Logik entwickelt? Die Stichworte ’Dialog’/’Disput’, ’diskursiver Übergang’/’Folgern’, ’Erwartung’/’Erfüllung’, ’Aufgabe’/’Lösung’, ’Orientierung’, ’Information’ bietet eine Basis fürs weitere Sammeln. – (iv) Welche Prinzipien der Rechtfertigung werden zugrunde gelegt? – Während Konsistenz (schwächer: Nichttrivialisierbarkeit) und Kategorizität allgemein akzeptiert scheinen, sind alle weiteren, z.B. Separiertheit, Harmonie, Stabilität usf., strittig.

Schließlich: Welchen Anforderungen sollte ein neuer Logikvorschlag genügen? – (i) Der Revisionsanlass sollte namhaft gemacht werden. Zugleich ist gegebenenfalls anzugeben, warum anlassgleiche Vorschläge zielfehlend sind und warum andere Revisionsanlässe keine Berücksichtigung finden. (ii) Zweck und Szenario der Logik sind vorzustellen. Zugleich sind alternative Zwecke/Szenarien als uneinschlägig auszuscheiden bzw. mit dem favorisierten zu vermitteln. (iii) Die Rechtfertigungsprinzipien sind ausdrücklich zu formulieren und als erfüllt nachzuweisen. Abweichende Prinzipien wären als uneinschlägig zurückzuweisen oder mit den eigenen zu vermitteln. (iv) Die Logik ist nach den mathematischen Üblichkeiten metatheoretisch zu untersuchen. (v) Die Logik sollte kalkülinvariant, d.h. in allen bekannten Kalkültypen, präsentiert werden. (vi) Ein geläufiges Theoriestück, z.B. aus der Arithmetik, der Klassentheorie, der elementaren Physik, usf. ist in der neuen Logik zu formulieren.

C. Die in Kapitel 4 vorgelegte Bedeutungsfixierung für die logischen Operatoren berücksichtigt (wie alle akzeptablen Begriffsbildungen (↑5.1.3)) die Konsistenzforderung. Sie ist ferner an der Eindeutigkeits- bzw. Kategorizitätsforderung orientiert: Wird ein logischer Operator κ sowie ein logischer Operator κ^* über dieselben Regeln der Einführung charakterisiert, dann soll Äquivalenz vorliegen. Für jeweilige Junktoren φ muss demzufolge etwa $(A\varphi B) \leftrightarrow (A\varphi^* B)$ gelten. Angenommen, zwei Identitätsprädikatoren ’..=..’ und’..=*..’ seien über dieselben Einführungs- resp. Beseitigungsregeln eingeführt, die dann mit ’=E’, ’=B’, ’=*E’, ’=*B’ bezeichnet werden. Der Kategorizitätsnachweis hat dann folgenden Verlauf:

[7]	1	Sei$_1$	x = y	
	2	Also$_1$	x =* x	| =* E

3	Also_1	x =* y	| = B; 1,2
4	Also	$x = y \rightarrow x =^* y$	| SE; 1-3
5	Sei_5	x =* y	
6	Also_5	x = x	| = E
7	Also_5	x = y	| =* B; 5,6
8	Also	$x =^* y \rightarrow x = y$	| SE; 5-7
9	Also	$x = y \leftrightarrow x =^* y$	| BE; 4,8
9	Also	$\bigwedge x \bigwedge y\ (x = y \leftrightarrow x =^* y)$	| 2xUE; 9

Eine weitere leitende Forderung ist die Separiertheit: Jeder Operator soll frei von Rückgriffen auf andere Operatoren etabliert werden. Gegen diese Forderung verstößt (jedenfalls dem Buchstaben nach) die Regel [3], das Efq in Regelform; Gleiches gilt für BE und AB. Dieses Postulat wird etwa auch von CURRY's Regel der strikten Negation nicht erfüllt: Dieses Schema erlaubt den Übergang von $\neg\Delta\rightarrow\Delta$ zu Δ, ist also die Regelfassung der klassischen Reduction bzw. Retorsion. Sie stellt in CURRY's Logik eine Art NB dar.

Die durchgeführte Einführungs-/Beseitigungssystematik ist ferner so angelegt, dass bei der Einführung das jeweilige Zeichen Hauptoperator der Konklusion ist und bei der Beseitigung als Hauptoperator der Hauptprämisse dient. Dieses Vorgehen wird durch NB durchbrochen: Der Negator kommt zweimal vor. Anders: Die negierte Aussage ist nicht beliebig, sondern ihrerseits eine Negation.

Die meisten Autoren gehen (seit und mit GENTZEN) davon aus, dass die Einführungsregeln bedeutungskonstitutiv sind, die Beseitigungsregeln hingegen bedeutungsexplikativ. Beispiel: SE erlaubt den Schluss auf $\Delta\rightarrow\Gamma$, falls Γ im Ausgang von der Annahme von Δ gewonnen worden ist. Hat man nun Δ gewonnen, dann darf man bei Gegebenheit von $\Delta\rightarrow\Gamma$ auf Γ schließen, denn $\Delta\rightarrow\Gamma$ „dokumentiert“ (GENTZEN) ja gerade die Erreichbarkeit von Γ auf Basis von Δ.

Das nächste Verhältnis von Einführungs- und Beseitigungsregeln soll durch zwei Prinzipien moderiert werden. Das Harmonieprinzip verlangt, dass die Beseitigungsregel nicht ›stärker‹ sein darf als die Einführungsregel. Umgekehrt fordert das Stabilitätsprinzip, dass die Beseitigungsregel nicht ›schwächer‹ sein darf als die Einführungsregel. Beide Prinzipien liegen in vielen Varianten vor, die aber alle explikationsbedürftige Teilvokabel enthalten. – Allerdings darf vermutet werden, dass unter jeder plausiblen Deutung von ’stärker’ die NB das Harmonieprinzip verletzt.

5.4. Literatur

Cordes, M.; Reinmuth, F.: Ein Redehandlungskalkül. Ein pragmatisierter Kalkül des natürlichen Schließens nebst Metatheorie. Version 2.0. http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00532643/en/. Greifswald 2011.

Kap. 4 enthält Beweise der wichtigsten der in diesem Kapitel der Denkwerkzeuge aufgeführten metalogischen Theoreme. Kap. 5 entwickelt den modelltheoretischen Konsequenzbegriff für den hier veranschlagten grammatischen Rahmen. Kap. 6 zeigt die Korrektheit und Vollständigkeit des hier verwendeten Kalküls.

Gensler, H.J.: Formal Ethics; London/New York 1996.

Für die Ausführungen dieses Kapitels ist insbesondere Teil 2, „Logicality“, einschlägig. Gensler zeigt, warum man sich – auch und gerade im Bereich der Ethik – an die Konsistenzmaxime halten sollte. Das ganze Werk demonstriert, wie man mit begrifflichen Verfahren Probleme der praktischen Philosophie angreift.

Hackstaff, L.H.: Systems of Formal Logic; Dordrecht 1966.

Dieses Werk empfiehlt sich für Leser, die sich in das klassische Trio von minimaler, intuitionistischer und klassischer Logik ohne allzu massiven formalen Aufwand einarbeiten wollen.

Hunter, G.: Metalogic. An Introduction to the Metatheory of Standard First Order Logic; Berkley/Los Angeles 1973.

Der Titel charakterisiert den Stoff. Eine gut lesbare Einführung, die sich auch zum Nachschlagen eignet. Im ersten Teil werden auch die klassensprachlichen Begriffe erläutert, die für das metalogische Geschäft unverzichtbar sind. Hilfreich ist im Appendix 2 die Synopsis der metatheoretischen Resultate. Die Literatur listet die meisten klassischen Werke der Logik auf.

Kalish, D.; Montague, R.; Mar, G.: Logic. Techniques of formal reasoning. 2. Aufl. San Diego 1980.

Bietet eine Behandlung weiterführender Themen, insbesondere verschiedener Kennzeichnungstheorien in einem Kalkül, der dem hier verwendeten sehr ähnlich ist.

Suppes, P.: Introduction to Logic, New York 1957.

Diese Einführung in die Logik ist ein Klassiker. Der Autor ist ein Meister in der knappen informellen Darstellung formaler Zusammenhänge. Für die Non-Sequitur-Methode ist insbesondere Kapitel 4.2, „Interpretation and Validity“, wichtig. Das Kapitel 8 enthält im Übrigen die

Standarddarstellung der Definitionstheorie. Für wissenschaftstheoretisch Interessierte empfiehlt sich auch der zweite Teil, der in der mengentheoretischen Formulierung der axiomatischen Methode gipfelt.

Tennant, N.: The Taming of the True; Oxford 1997.

Im Kapitel 10, “Finding the right Logic”, findet der Leser Überlegungen, die in die im Zusatz erwähnten Themen einführen. – Der Autor ist Fachmann für den Logischen Pluralismus.