Geo Siegwart WS 2002/2003

Denkwerkzeuge

Eine Vorschule der Philosophie*

1. Zweck und Programm einer philosophischen Vorschule
2. Das sprachphilosophische Rahmenwerk
3. Die Rationale Grammatik
4. Das Regelwerk für das Schließen
5. Elementare Verständigung über Folgerungsverhältnisse
   ZUSATZ: Tafeln logischer Wahrheiten
6. Die Charakterisierung von Gegenständen (Prädikation)
7. Die Bezugnahme auf Gegenstände (Nomination)
8. Diskurs – Argumentation – Begründung – Beweis
9. Die Rekonstruktion von Diskursen (Hermeneutik)
10. Begriff und Formen der Einführung
11. Die definitorische Einführung
12. Die explikative Einführung
13. Wahrheit – Bedeutung – Erkenntnis
14. Analytisch-strukturelle Wissenschaften: Eine Klassensprache
15. Synthetisch-empirische Wissenschaften: Eine Zeitsprache
16. Zweck und Gestalt der Philosophie

---

* Der vorliegende Text begleitet die Vorlesungen „Logische Propädeutik“ (WS 2002/2003). Er ist zum ausschließlichen Gebrauch der Studierenden bestimmt.

1. DIE PHILOSOPHISCHE VORSCHULE 2

1.1 Beispiele für den philosophischen Vollzug 3

1.1.1 Rechts/Links: Verdeckte Bezugspunkte 3

1.1.2 Für alle/Es gibt: Überkletterte Zäune 9

1.1.3 Etwas/Nichts: Entglittene Fragen 13

1.1.4 Antastbar/Unantastbar: Moralphilosophische Klärungen 19

1.2 Zum Zweck der philosophischen Vorschule 24

1.2.1 Zur Analyse des exemplarischen Vollzugs 24

1.2.2 Sprachphilosophie/Logik als Erste Philosophie 26

1.3 Das Programm der philosophischen Vorschule 28

1.3.1 Die Stationen der Durchführung 28

1.3.2 Arbeitshinweise 32

1.4 Literatur 34

Es gibt keine elementare Philosophie.
Der philosophische See hat keine flachen Ufer.

Peter F. Strawson

1. *Die philosophische Vorschule*

Womit soll der Anfang des Philosophierens gemacht werden? Mit dem Erwerb welcher Fertigkeiten sollen diejenigen beginnen, die die Kunst des Philosophierens erlernen möchten? Wer so fragt, unterstellt, daß die Aneignung philosophischer Fertigkeiten der Planung, der vorausschauenden Organisation und Ordnung durch die Lehrenden und die Lernenden bedarf. Sie unterscheidet sich insoweit nicht von dem Erwerb handwerklicher Künste, z.B. der Kunst des Schreinerns, des Heilens oder des Kochens.

Womit soll der Anfang des Philosophierens gemacht werden? Dieser Frage kann nicht nur ein erwerbsbezogener, sondern auch ein systematischer Sinn gegeben werden. Auch hier hilft die Analogie mit handwerklichen Kompetenzen weiter: Wer einen anspruchsvollen Einbauschrank schreinert, wer einen komplizierten Bruch behandelt oder wer eine labile Sauce bindet, der wird die einschlägigen Werkzeuge und Materialien kennen und beherrschen. Ebenso gibt es beim Philosophieren Instrumente und Verfahren, deren Kenntnis und Beherrschung für solides und insbesondere gutes Philosophieren unverzichtbar scheint, völlig gleichgültig, welches besondere – ethische, ästhetische, ontologische usw. – Problem gerade zu bearbeiten ist.

Die Anfänge in der Erwerbsordnung fallen mit jenen der Vollzugsordnung zusammen: Die Mittel und Verfahren, die in jedem philosophischen Vollzug benötigt werden, sollten auch diejenigen sein, die im philosophischen Noviziat, der Vorschule der Philosophie, zu vermitteln sind. – In Aufnahme überkommener Redegepflogenheiten mag man diese Anfänge mit den Titeln „Erste Philosophie“ („prima philosophia“) oder auch – etwas mißverständlich – „Fundamentalphilosophie“ („philosophia fundamentalis“) versehen.

Während es auf der Hand liegt, worin die Anfänge der Schreiner- oder Kochkunst bestehen, versteht es sich nicht von selbst, welches die Formen und die Inhalte der Ersten Philosophie sind. In der Folge ist diese Aufgabe anzugehen. Zu ihrer Erledigung ist eine wenigstens provisorische Kenntnis einiger Zwecke und Eigentümlichkeiten des Philosophierens gefordert. Das geforderte vorläufige Wissen wird bereitgestellt, indem zunächst Beispiele für den philosophischen Vollzug vorgeführt werden (1.1). Über die Analyse des exemplarischen Materials lassen sich dann die gewünschten Einsichten gewinnen; auf diesem Hintergrund wird die Frage nach der Gestalt und den Inhalten des Anfangs und der darauf zu gründenden

Fortsetzung beantwortbar (1.2). Anschließend soll das Programm der philosophischen Vorschule präsentiert werden (1.3). Endlich sind einige Literaturempfehlungen für das ergänzende und vertiefende Studium auszusprechen (1.4).

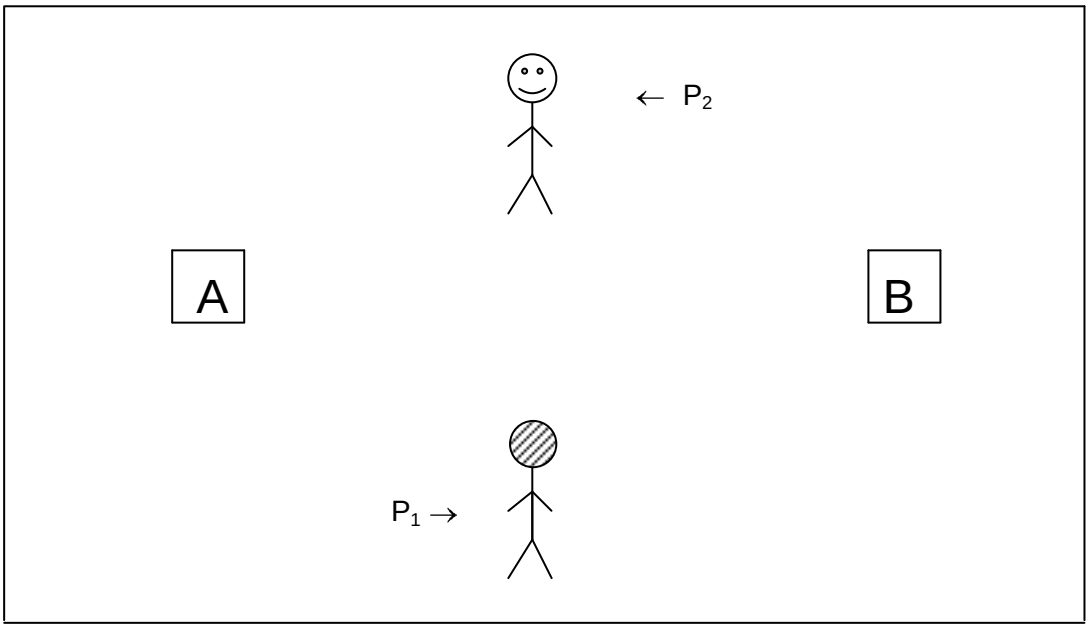
1.1 Beispiele für den philosophischen Vollzug

Das erste Beispiel für den philosophischen Vollzug befaßt sich mit einer aus dem Alltag vertrauten Wahrnehmungssituation. Es wird gezeigt, wie sich eine paradoxe Erkenntnislage mit elementaren Mitteln auflösen läßt (1.1.1). Im zweiten Exempel wird die Aufmerksamkeit auf das Schließen, eine ständig und meist unbewußt vollzogene Redehandlung, gelenkt (1.1.2). Das dritte Beispiel greift eine Frage auf, die auch der Laie in Sachen Philosophie spontan als „philosophisch“ apostrophieren würde: Warum gibt es überhaupt etwas – und nicht vielmehr nichts? (1.1.3). Schließlich kommt in der vierten und letzten Beispielvorführung eine häufig geäußerte moralphilosophische Intuition, die Unantastbarkeit des Lebens, auf den Prüfstand (1.1.4).

1.1.1 Rechts/Links: Verdeckte Bezugspunkte

Ausgangspunkt der ersten Beispielbetrachtung ist die unter [1] skizzierte elementare räumliche Wahrnehmungssituation: Zwei Gegenstände A und B befinden sich im Wahrnehmungsfeld der Personen P_1 und P_2:

[1]



P_1 formuliert als Resultat seiner Beobachtung die Aussage:

[2] a) A liegt links von B,

während P_2 feststellt:

b) A liegt rechts von B.

An dieser Stelle spürt man bereits, daß >etwas schief gelaufen ist<. Der >Unfall< läßt sich so aufschlüsseln: Mit b) gilt wegen Asymmetrie der Relation des Rechtsliegens:

c) nicht: B liegt rechts von A.

Die Rechtsrelation, d.h. die durch den Ausdruck '..liegt rechts von..' ausgedrückte Beziehung, ist asymmetrisch, weil für beliebige Gegebenheiten *x*, *y* gilt: Wenn *x* liegt rechts von *y*, dann liegt *y* nicht rechts von *x*. Die Asymmetrie einer Relation besteht gerade in ihrer Unumkehrbarkeit. Weitere Beispiele für asymmetrische Beziehungen sind etwa die Vater-, die Hauptstadt- und die Kleinerrelation; wenn etwa *x* kleiner ist als *y*, dann ist *y* nicht kleiner als *x*.

Da ferner Rechts- und Linksliegen zueinander konvers sind, resultiert aus c) durch passende Folgerungsschritte:

d) nicht: A liegt links von B.

Zur Erläuterung der Konversität zwischen der Links- und der Rechtsrelation: Die Linksrelation ist Konverse der Rechtsrelation (und umgekehrt), weil für beliebige Gegebenheiten *x*, *y* gilt: *x* liegt genau dann links von *y*, wenn *y* rechts von *x* liegt. Weitere Beispiele für zueinander konverse Beziehungen bilden die Elter- und die Kindrelation, die Größer- und die Kleinerrelation sowie das Verhältnis des Liebens und des Geliebtwerdens.

Die Aussagen 'A liegt links von B' und 'nicht: A liegt links von B' bilden, konjunktiv zusammengefaßt, d.h. durch das Wort 'und' verbunden, einen <u>Widerspruch</u>, eine <u>Kontradiktion</u>: 'A liegt links von B und (nicht: A liegt links von B)'.

Da der Widerspruch sich aus (jedenfalls beim ersten Zusehen) unproblematischen Gründen auf seriösen Schlußwegen ergibt, sieht sich der Betrachter mit einem <u>Paradox</u> konfrontiert. Findet in einem Disput, wie im Beispielsfall leicht vorstellbar, jeder Bestandteil einer Kontradiktion Verfechter, dann treten diese in eine <u>Kontroverse</u> ein.

Wie könnte ein Betrachter, wenn er die übergeordnete Rolle des Streitschlichters übernimmt, das Paradox auflösen und erklären, auf welchem Wege sollten die Kontrahenten P_1 und P_2

ihren Streit beilegen? Schon beim ersten Analyseanlauf drängt sich die Möglichkeit auf, den Bezug auf die beiden Beobachter P_1 und P_2 ausdrücklich zu machen: Die Kontrahenten sind eben nicht nur außenstehende Beobachter einer räumlichen Konstellation, sondern gehören ihr auch an. Man vollzieht dies im übrigen nach, wenn man zur Überprüfung der Aussage des Beobachters P_2 die Skizze oder sich selbst – wenigstens >im Geiste< – umdreht. Unter Hinzunahme des bislang verdeckten Beobachterfaktors ergibt sich zunächst:

[3] a) A liegt links von B bezüglich P_1.

b) A liegt rechts von B bezüglich P_2.

Aus der zweiten Aussage folgt mit Asymmetrie bezüglich der beiden ersten, d.h. der durch ‘A‘ und ‘B‘ besetzten, Stellen:

c) nicht: B liegt rechts von A bezüglich P_2,

und Konversität des Rechts- und Linksliegens bezüglich der beiden ersten Stellen liefert lediglich:

d) nicht: A liegt links von B bezüglich P_2.

Die Aussagen ‘A liegt links von B bezüglich P_1’ und ‘nicht: A liegt links von B bezüglich P_2’ bilden in ihrer konjunktiven Zusammenfassung keinen Widerspruch, da die zweite eben nicht die Negation der ersten ist. Dies liegt daran, daß bei der ersten ‘P_1’, bei der zweiten jedoch ‘P_2’ der letzte Teilausdruck ist.

Die Kontroverse wird als eine nur scheinbare erklärt und aufgelöst, das Paradox verschwindet: Indem der zunächst vergessene Bezug auf den Beobachter, allgemein gesprochen: auf einen vordem verdeckten Bezugspunkt bzw. impliziten Parameter, zur Geltung gebracht wird, kann die kognitive Turbulenz, die Verwirrung vom Erkenntnisgeschäft, in ihrer Entstehung durchschaubar gemacht und dadurch behoben werden.

Aus der im Beispiel erfolgreichen Taktik kann eine allgemeine Vorschrift, eine Maxime, gewonnen werden; deren einfachste Formulierung lautet:

[4] Entschärfe kognitive Turbulenzen (wenn möglich) durch Angabe verdeckter Bezugspunkte!

Die kognitiven Turbulenzen umfassen nicht nur Paradoxien und Kontroversen, sondern auch >schwierige<, >außergewöhnliche< Erkenntnissituationen bzw. Erkenntnisstörungen aller Art.

Der Klammerzusatz gibt zu verstehen, daß die Maxime nicht immer erfolgreich arbeitet: Sie stellt nur ein Utensil aus einem umfangreichen Arsenal zum Umgang mit Engpässen im Erkenntnisgeschäft dar.

Benutzt man das elementare Vokabular der Rationalen Grammatik (↑3.2), dann liest sich [4], die Maxime der Stelligkeitserhöhung, kurz: die Stelligkeitsmaxime, so:

[4]* Entschärfe kognitive Turbulenzen (wenn möglich) durch Stelligkeitserhöhung der beteiligten Prädikatoren!

Die in der linken Spalte notierten Redeteile sind Beispiele für zweistellige, die rechts befindlichen exemplifizieren die zugeordneten dreistelligen Prädikatoren:

[5]	a)	..liegt links von..	→	..liegt links von..bezüglich..
	b)	..liegt rechts von..	→	..liegt rechts von..bezüglich..

Die unter [4] bzw. [4]* provisorisch formulierte Stelligkeitsmaxime ist also im Beispiel so benutzt worden, daß ein Übergang von zwei- zu dreistelligen Prädikatoren erfolgt. Prädikatoren sind – erläutert im Sinne der Schnellverständigung – Redeteile, die zu Recht oder zu Unrecht von Gegenständen ausgesagt werden: '..ist eine Frau' ist ein einstelliger Prädikator, der zu Recht von Xanthippe und zu Unrecht von Sokrates ausgesagt wird. '..liegt zwischen..und..' ist ein dreistelliger Prädikator, der zu Recht von (in dieser Reihenfolge!) Köln, München und Hamburg, und nur zu Unrecht von (in dieser Reihenfolge!) München, Köln und Hamburg ausgesagt wird.

Diagnose und Therapie des obigen Miniaturparadoxes sollten nicht dazu veranlassen, bei Rechts-Links-Lokalisierungen fortan in allen Redezusammenhängen den dreistelligen Prädikator zu verwenden. In der Mehrzahl der Situationen – z.B. dann, wenn die Betrachter nebeneinander stehen oder sich unschwer und >automatisch< in die Position des Mitbetrachters versetzen – ist die Verwendung der zweistelligen Prädikatoren nicht nur nicht paradoxerzeugend, sondern auch unmißverständlich und – um von nicht entstehenden Nachteilen zu erreichbaren Vorzügen überzugehen – auch weitaus ökonomischer. Die Stelligkeitsmaxime gilt hier eben nur für den Störungsfall; im Sinne einer Anweisung zur durchgehenden >Rede nach Vorschrift< wäre sie grob mißverstanden.

Wem die Behandlung des Rechts-Links-Paradoxes einleuchtet, der braucht noch keineswegs davon überzeugt zu sein, daß der Stelligkeitsmaxime ein weiterer, d.h. ein über einfache Lokalisierungskontexte hinausgehender, Anwendungsbereich zuzuschreiben ist. Um dies mit Beispielen zu verdeutlichen, ist auf zwei für die Handlungsorganisation und -

beurteilung wichtige Gruppen verdeckter Bezugspunkte, die Zweck- und die Maßstabparameter, hinzuweisen.

Zweckparameter: Man ist es gewohnt, Gegebenheiten aller Art – Personen, Einstellungen, Institutionen, Handlungen, Verfahren, Erkenntnisse, Geräte usf. – als wichtig oder unwichtig, bedeutend oder unbedeutend, verzichtbar oder unverzichtbar usf. zu beurteilen. Einige dieser scheinbar >absoluten< Beurteilungsmittel sind unter [6] notiert, und zwar so, daß der durch Hinzufügung von ‘un‘ gebildete Negatprädikator und in der rechten Spalte sogleich das stelligkeitserhöhte Redemittel, ebenfalls positiv wie negativ, beigegeben wird; in jeder Zeile finden sich demnach vier Prädikatoren:

[6]	a)	..ist (un)wichtig	→	..ist (un)wichtig für..
	b)	..ist (un)verzichtbar	→	..ist (un)verzichtbar für/zum..
	c)	..ist (un)tauglich	→	..ist (un)tauglich für/zum..
	d)	..ist (un)erwünscht	→	..ist (un)erwünscht für/zum..
	e)	..ist (un)brauchbar	→	..ist (un)brauchbar für/zum..
	f)	..ist (in)exakt	→	..ist (zu in)exakt [genug] für/zum..

Zu jedem dieser Redemittel gibt es zahlreiche (zumindest partielle) Synonyme: So wird z.B. für a) ‘(un)wichtig’ auch ‘(un)bedeutend’, ‘(ir)relevant’, für b) ‘(un)verzichtbar’ auch ‘(un)entbehrlich’, ‘(un)ersetzlich’, für c) ‘(un)tauglich auch ‘wertvoll‘ resp. ‘wertlos’ auch ‘nützlich‘ resp. ‘unnütz‘ und ‘(un)dienlich‘, für f) ‘(in)exakt’ auch ‘(un)präzise’, ‘(un)genau’ verwendet. Die Synonymendichte zeigt die hohe Präsenz dieser Prädikatoren in der Beurteilungspraxis an.

Es liegt nun auf der Hand, daß Gegebenheiten welcher Art auch immer nicht schon >in sich< (un)wichtig, (un)tauglich, (un)verzichtbar usf. sind, sondern nur, insoweit sie in bestimmte Zweck-Mittel-Verhältnisse einbezogen werden; und was bei der einen Zweckvorgabe unentbehrlich ist, kann bei einer anderen hochgradig unerwünscht sein: Würmer mögen z.B. unverzichtbar sein zum Angeln, sind aber schon verzichtbar bei Folgetätigkeiten wie der Zubereitung der Angelbeute. Weiter werden z.B. Messungen häufig als exakt oder inexakt beurteilt. Aber auch hier wird immer ein Zweck unterstellt: Für das Verlegen eines Teppichbodens ist es exakt genug, die Grundfläche eines Raumes in Metern und Zentimetern anzugeben; mit Mikrometern zu arbeiten bedeutete hier keineswegs eine Verbesserung des Ergebnisses, sondern wäre nur eine völlig unnötige Komplikation.

Kontroversen, die durch Rückgriff auf implizite Zweckparameter bewältigbar sind, entstehen in der Regel dann, wenn die Parteien irrigerweise einen gemeinsam akzeptierten Zweck unterstellen, auf den hin Mittelkandidaten dann beurteilt werden. Da jedoch die Zweckgemeinsamkeit fehlt, erfolgt eine widersprüchliche Beurteilung des Kandidaten mit einem einstelligen Prädikator, die wiederum durch Markierung der verschiedenen Zwecke, d.h. durch Benutzung eines zweistelligen Prädikators, aufgelöst werden kann. Etwaige Folgekontroversen werden sich dann gewöhnlich auf die zu akzeptierenden Zwecke beziehen.

Maßstabparameter: Handlungen und Handlungsergebnisse (gelegentlich auch Fertigkeiten von Agenten und Agenten selbst) werden häufig als gültig oder ungültig, korrekt oder inkorrekt, erfolgreich oder erfolglos usf. beurteilt; Beispiele für solche Prädikatoren sind unter [7] notiert:

[7]	a)	..ist (un)gültig	→	..ist (un)gültig gemäß..
	b)	..ist (in)korrekt	→	..ist (in)korrekt gemäß..
	c)	..ist erfolgreich/-los	→	..ist erfolgreich/-los bezüglich..
	d)	..ist ge-/mißlungen	→	..ist ge-/mißlungen relativ auf..

Bei einstelliger Verwendung ist stets ein impliziter, d.h. nicht als solcher benannter, Maßstab am Werke. Maßstäbe können etwa von einzelnen Kriterien oder ganzen Kriteriensystemen, einzelnen Regeln oder Regelwerken gebildet werden. Bezeichnungen für Maßstäbe sind dann passende Besetzungen für die zweite Stelle des zweistelligen Prädikators.

Maßstäbe sind in der Regel nicht ohne Alternative, und je nach akzeptiertem Maßstab variiert die Beurteilung: Wann die vorgetragene Argumentation (un)gültig ist, wann die angelegte Garderobe (in)korrekt ist, wann die Sauce ge-/mißlungen ist, ergibt sich nach dem je unterstellten Maßstab. Auch hier ist im Kontroversenfall der Maßstab kenntlich zu machen, auf den sich dann mögliche Folgedispute gewöhnlich beziehen. – Routinisiert man im übrigen die Taktik, auf die versteckten Maßstäbe abzustellen, dann wird man, anbei geredet, einer ungünstigen Beurteilung eigener Handlungen, Produkte oder Handlungskompetenzen nur noch entnehmen können, daß es für den Beurteilenden hohe Zeit ist, die Güte des von ihm angelegten Maßstabs zu überdenken.

An dieser Stelle wird die Behandlung des ersten Beispiels für den philosophischen Vollzug, des Stelligkeitsbeispiels, mit einer Übung zum Abschluß kommen. Die Systematisierung des

gesamten Problemfeldes wird späteren Überlegungen vorbehalten; dort stehen dann bequeme und präzise Artikulationsmittel bereit (↑3.4.3).

Ü1 a) Die Herleitung des Paradoxes geht aus von [2]a) und [2]b). Dabei wird b) mit Asymmetrie und Konversität so umgeformt, daß sich die Negation von a) ergibt. Ein alternativer Weg hält b) stabil und geht von a) wiederum über Asymmetrie und Konversität zur Negation von b). Skizzieren Sie diesen Pfad!

b) Suchen Sie drei weitere Beispiele für Situationen, in denen sich Paradoxien/Kontroversen durch unterstellige Prädikatorenverwendung ergeben!

c) Betrachten Sie den Slogan: „Wir alle sind Ausländer, fast überall“. Wie hängt seine Pointe mit der Stelligkeit von Prädikatoren zusammen? Beginnen Sie dabei mit der Untersuchung der Aussage „Helmut Kohl ist Ausländer“. Welcher implizite Parameter ist unterstellt, wenn die Aussage wahr ist, welcher ist wirksam, wenn sie falsch ist?

1.1.2 Für alle/Es gibt: Überkletterte Zäune

Über einige Handlungsformen wird ausgiebig nachgedacht, während andere meist vor den Toren der Aufmerksamkeit bleiben. Zu den letzteren zählt für gewöhnlich das Folgern oder Schließen: (Fast) Immer jedoch, wenn Worte wie ‘also’, ‘mithin’, ‘infolgedessen’, ‘deshalb’ und viele hier ungenannte bedeutungsgleiche Redeteile Verwendung finden, vollziehen Autoren Folgerungen. Geschlossen wird also ständig, in Argumentationen, Reflexionen, Disputen, Widerlegungen, Erklärungen, hypothetischen Betrachtungen u.v.a.m.; und indem der letzte Satz geäußert worden ist, konnte ihm eine bestätigende Instanz hinzugefügt werden.

Folgern ist keine Angelegenheit freihändiger Beliebigkeit. Wer z.B. die unter [8] notierte Satzfolge äußert, folgert korrekt:

[8]	Da	Wenn Moby Dick ein Wal ist, dann ist er ein Säuger.
	Da	Moby Dick ist ein Wal.
	Also	Moby Dick ist ein Säuger.

Der Übergang von den Prämissen, den Aussagen der beiden ersten Zeilen, zur Konklusion, der Aussage in der letzten Zeile, ist nicht zu beanstanden. Er hat folgende Form:

[8]*	Da	Wenn p, dann q.

Da p.

Also q.

Wer hingegen die Redesequenz [9] äußert, folgert inkorrekt:

[9] Da Wenn Moby Dick eine Katze ist, dann ist er ein Säuger.

Da Moby Dick ist ein Säuger.

Also Moby Dick ist eine Katze.

Hier ist zwischen den Prämissen und der Konklusion ein Zaun zu ziehen; und wer hier gleichwohl folgert, überklettert den Zaun, folgert inkorrekt. Diesem Übergang korrespondiert die Form:

[9]* Da Wenn p, dann q.

Da q.

Also p.

An [9] läßt sich auch ablesen, warum ein derartiger Übergang inkorrekt ist: Die Prämissen sind wahr, die Konklusion ist aber falsch; korrekte Schlüsse dürfen jedoch nicht von wahren zu falschen Aussagen führen, sondern müssen die Wahrheit der Prämissen an die Konklusion weitergeben und damit diese Eigenschaft bewahren; das korrekte Schließen ist wahrheitserblich bzw. wahrheitskonservativ.

Wenn, wie unterstellt, unstrittig ist, daß aus Beliebigem nicht Beliebiges folgen darf, stellt sich die Frage, welche Aussagen aus welchen Aussagen gefolgert werden dürfen. In der Metapher: Wo stehen Schlußzäune? Wo ist freier Durchgang zu gewähren? Da diese Fragen sich nicht von selbst erledigen, wird ihnen seit den philosophischen Anfängen eine eigene Wissenschaft, die Logik (im engeren Sinne), zugeordnet. Die Notwendigkeit einer eigenen Disziplin wird unmittelbar nachvollziehbar bei der Betrachtung komplizierterer Schlüsse. Man betrachte den unter [10] notierten Übergang:

[10] Da Es gibt eine ganze Zahl *x*, die kleiner ist als jede positive ganze Zahl *y*.

Also Für jede positive ganze Zahl *y* gibt es eine ganze Zahl *x*, so daß *x* kleiner ist als *y*.

Dieser Übergang ist korrekt; die allgemeine Form solcher Übergänge ist unter [11] notiert:

[11] Da Es gibt ein F-Ding *x*, das in R zu jedem G-Ding *y* steht.

Also Für jedes G-Ding *y* gibt es ein F-Ding *x*, so daß *x* in R zu *y* steht.

Dabei entspricht dem F- bzw. G-Sein die Eigenschaft, eine ganze bzw. eine positive ganze Zahl zu sein; dem Stehen in R korrespondiert das Kleinersein. – Ausdrücke wie 'für jedes' und 'es gibt (ein)' zeigen die (groben) quantitativen Verhältnisse an und heißen deshalb (grobe) Quantoren; 'für jedes *y*' bzw. 'für alle *y*' ist der Universalquantor; 'es gibt ein *x*' bzw. 'für wenigstens ein *y*' ist der Partikularquantor; die notierte Schlußform ist der Quantorentausch. Partikular- und Universalquantor tauschen ihren Platz. In Frage stehe nun, ob ein solcher Quantorentausch auch bei umgekehrter Reihenfolge der Quantoren möglich ist, ob also auch Übergänge korrekt sind, deren allgemeine Form unter [12] notiert ist:

[12] Da Für jedes G-Ding *y* gibt es ein F-Ding *x*, so daß *x* in R zu *y* steht.

Also Es gibt ein F-Ding *x*, das in R zu jedem G-Ding *y* steht.

Die Inkorrektheit dieser Form macht man sich klar durch ein Gegenbeispiel, d.h. eine Instanz von [12], deren Prämissen wahr sind, deren Konklusion aber falsch ist:

[13] Da Für jede ganze Zahl *y* gibt es eine positive ganze Zahl *x*, so daß *x* größer ist als *y.*

Also Es gibt eine positive ganze Zahl *x*, die größer ist als jede ganze Zahl *y*.

[13] entsteht aus [12] durch folgende Zuordnungen: Dem F-Sein entspricht die Eigenschaft, eine positive ganze Zahl zu sein, dem G-Sein entspricht die Eigenschaft, eine ganze Zahl zu sein; dem Stehen in R korrespondiert das Größersein. Die Prämisse ist wahr: Die Nachfolger einer beliebigen ganzen Zahl sind stets größer als diese Zahl und sie sind positiv. Eine positive ganze Zahl, die größer wäre als jede ganze Zahl, wäre jedoch größer als sie selbst und größer als alle ihre Nachfolger; das ist arithmetisch falsch. – Noch ein Gegenbeispiel für die Klientel mit Abneigung gegen Zahlenverhältnisse: Daraus, daß jeder Mensch einen Kopf zwischen den Schultern hat, kann man nicht folgern, daß es wenigstens einen Kopf gibt, den jeder Mensch

zwischen seinen Schultern hat. Um durch ein weiteres Beispiel philosophisches Terrain zu betreten: Daraus, daß jedes Ereignis eine Ursache hat, die es bewirkt, folgt nicht, daß es wenigstens eine Ursache gibt, die jedes Ereignis bewirkt.

Interesse gewinnt dieser Fehlschluß deshalb, weil er häufig und unbemerkt an Schlüsselstellen von (dann ungültigen) Argumentationen auftritt. Dazu zwei weitere Illustrationen: (i) Viele Auffassungen vom Handeln gehen davon aus, daß mit jeder Handlung ein, genauer: wenigstens ein, Zweck verfolgt wird. Man liest das Skriptum, um logische Fertigkeiten zu gewinnen, um die Klausur zu bestehen. Man raucht, um sich zu entspannen, man sät, um zu ernten, man fährt nach X, um Y zu treffen usf. Für das Folgende wird Plausibilität dieser Ansätze unterstellt. Man betrachte nun aber folgenden Schluß:

[14] Da Für jede Handlung *h* gibt es einen Zweck *z*, so daß *z* mit *h* verfolgt wird.

Also Es gibt einen Zweck *z*, so daß *z* mit jeder Handlung *h* verfolgt wird.

Wer so schließt, liefert eine Instanz von [12], überklettert also einen Zaun. Wer den Fehlschluß nicht bemerkt und die Prämisse akzeptiert, wird auch zur Konklusion stehen. In der Wendung ‘es gibt ein(e/n)’ steckt ferner eine folgenreiche Zweideutigkeit. Diese kann man sich durch Unterstreichung vor Augen führen: ‘es <u>gibt</u> ein(e/n)’ steht ‘es gibt <u>ein(e/n)</u>’ gegenüber. Die erste Ausdrucksverbindung liest man im Sinne der Vereindeutigung besser als ‘es gibt <u>wenigstens</u> ein(e/n)’; die zweite wird deutlicher in der Lesart ‘es gibt <u>genau</u> ein(e/n)’. Der Partikularquantor ist also vom Einsquantor zu unterscheiden; ihre Verwechselung stellt eine Quantorenkonfusion dar.

Zurück zum Beispiel: Da nun aber das ‘es gibt ein’ oft als ‘es gibt genau ein’ gelesen wird, muß, wer so schließt, die Frage akzeptieren, welches denn <u>dieser eine Zweck</u> ist, der mit jeder Handlung verfolgt wird. Aber ehe man nun den an dieser Stelle angesagten Einladungen zu weltanschaulichen Reisen folgt – häufig wird ‘Zweck’ noch durch ‘Sinn’ und ‘verfolgt’ durch ‘realisiert’ ersetzt – , sollte man, philosophisch instruiert, den windigen Reiseunternehmern die rote Karte mit dem Eintrag „Überkletterter Zaun“ vorhalten.

(ii) Ein zweites, bewußt extrem gewähltes Beispiel: Es ist eine logische Wahrheit, daß jeder Gegenstand mit sich identisch ist; und daraus läßt sich korrekt folgern, daß es zu jedem Gegenstand einen Gegenstand gibt, der mit ihm identisch ist. Der folgende Schluß wählt diese Wahrheit als Prämisse:

[15] Da Für alle *x* gibt es wenigstens ein *y*, so daß *x* mit *y* identisch ist.

Also Es gibt wenigstens ein *y*, so daß für alle *x* gilt: *x* ist mit *y* identisch.

Dabei wird neuerlich – fast – derselbe Zaun überklettert: Dem in R-Stehen korrespondiert das Identischsein; die Gegebenheiten *x* und *y* werden jedoch nicht weiter ausgesondert, sondern sind beliebig. Wenn alles mit etwas identisch ist, folgt daraus keineswegs, daß es einen Gegenstand gibt, der mit allem identisch ist. Letzteres besagt nämlich, anders gelesen, daß es wenigstens und höchstens, also genau ein Ding gibt: Neben *y* kann es nämlich kein von *y* verschiedenes Ding *x* geben, da alle *x* mit *y* identisch sind. Damit ist insbesondere auch der Autor mit seinen Lesern identisch, die sich auch ihrerseits nicht voneinander unterscheiden. Der Ausgangspunkt war eine unstrittige logische Wahrheit, am Ende der Reise steht der Monismus, die sehr wohl bestreitbare Auffassung also, nach der, salopp geredet, das, was weniger als alles ist, auch schon nichts ist.

Ü2 a) Suchen Sie eine weitere Gegeninstanz zu dem unter [12] notierten Schema!

b) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, daß die folgenden Schlüsse inkorrekt sind! Ein Gegenbeispiel ist dabei eine Redesequenz, die dieselbe Form hat, deren Prämissen wahr und deren Konklusion falsch ist.

ba) Da Greifswald ist eine Hansestadt.

Also Greifswald ist eine Hansestadt und Essen liegt in Nordrhein-Westfalen.

bb) Da Greifswald ist eine Hansestadt oder Greifswald ist eine Universitätsstadt.

Also Greifswald ist eine Universitätsstadt.

bc) Da Es gibt *x*-Gegenstände, die rot sind, und es gibt *x*-Gegenstände, die rund sind.

Also Es gibt *x*-Gegenstände, die rot und rund sind!

1.1.3 Etwas/Nichts: Entglittene Fragen

Während die Offenlegung verdeckter Bezugspunkte und das Ziehen von Folgerungszäunen in beliebigen kognitiven Geschäften vorkommt – und damit eben auch in der Philosophie – , soll nun, wiederum exemplarisch, eine als genuin philosophisch geltende Problemstellung studiert werden. Es ist nämlich dem Vorurteil entgegenzutreten, daß philosophische Analyse im hier vorgeführten und zur Nachahmung empfohlenen Stil gerade bei den >wirklichen<,

>substantiellen<, >ernsten< und >tiefen< philosophischen Problemen nichts auszurichten vermag.

Zu erörtern ist eine Frage, die zu den Kostbarkeiten der Metaphysik gerechnet wird und der deshalb auch der Titel „Sanctissimum der Metaphysik“ zuerkannt worden ist. Seit Leibniz sie 1697 erstmals formulierte, hat sie eine anhaltend beeindruckende Konjunktur vorzuweisen. Sie lautet:

[16] Warum gibt es überhaupt etwas – und nicht vielmehr nichts?

Es ist insbesondere Betroffenheit, ja geradezu Erschütterung, die dieser Frage ihre Karriere sicherte. Ein Philosoph allerdings, der derlei Gefühle an die Stelle von Analyse und (Re)Konstruktion setzt, taugt ebensoviel wie ein Klempner, der in Anbetracht eines Rohrbruchs gebannt in die austretenden Wassermassen starrt. Das gilt, anbei bemerkt, auch und insbesondere dann, wenn es sich um die Bearbeitung moralphilosophischer Fragen handelt, um Fragen also, bei deren Behandlung Betroffenheit oft mit Kompetenz und analytische Distanz mit Inkompetenz verwechselt wird (↑1.1.4). – Es ist also ohne Umschweife zu den Werkzeugen zu greifen!

Vorgegeben ist eine Warum-Frage. Warum-Fragen verlangen als Antworten Erklärungen – und Erklärungen sind umgekehrt Antworten auf Warum-Fragen: Warum fällt der Barometerstand? Der Barometerstand fällt, weil Sturm aufzieht. Die Weil-Phrase liefert die Erklärung. Genauer: Die Weil-Phrase liefert gemeinsam mit meteorologischen und meßtheoretischen Unterstellungen, kurz: mit einer Hintergrundtheorie, die Erklärung.

Die mit der Hintergrundtheorie gegebene Hierarchie ist wesentlich: Obwohl nämlich relativ auf diese Theorie gilt, daß der Barometerstand genau dann fällt, wenn Sturm aufzieht, wäre die Verlautbarung ‘weil der Barometerstand fällt‘ keineswegs als Antwort auf die Frage ‘Warum zieht Sturm auf?‘ zu akzeptieren.

Ferner muß das zu Erklärende wahr sein. Wird uns die Frage gestellt, warum Bananen gerade sind, dann sinnen wir nicht auf eine Antwort, sondern weisen die Frage zurück. In Erklärungen geht es also nicht – wie etwa in Beweisen – darum, Wahrheiten allererst zu etablieren, sondern lediglich darum, schon feststehende, anderweitig gewonnene Wahrheiten in ein System von Wahrheiten einzufügen.

Wie hinter allen Fragen steht auch hinter Warum-Fragen genau ein Fragezeichen. Wird damit aber auch genau eine Frage aufgeworfen? – Zunächst eine scheinbar eindeutige, im abendländischen Kulturkreis aus der Schöpfungserzählung wohlbekannte Warum-Frage:

[17] Warum aß Adam den Apfel?

Die unter [18] notierten Antworten:

[18] a) weil Adam keine Lust hatte, ihn zu malen,

b) weil die Schlange keine Äpfel mochte,

c) weil die Schlange die Banane, die er vorgezogen hätte, versteckt hat,

machen klar, daß in der Ausgangsfrage wenigstens drei Fragen stecken, auch hier helfen die Unterstreichungen weiter:

[19] a) Warum aß Adam den Apfel – und warf ihn nicht weg, malte ihn nicht,...?

b) Warum aß Adam den Apfel – und nicht vielmehr die Schlange, Gott,...?

c) Warum aß Adam den Apfel – und nicht vielmehr die Banane, die Kiwi,...?

Erst durch die hinter dem Gedankenstrich notierten kontrastiven Elemente wird deutlich, was zu erklären ist; und der Fragesteller präsupponiert auch, daß die kontrastiven Elemente falsch sind: Denn hätte Adam sowohl den Apfel als auch die Banane gegessen, wäre die Frage ‘Warum aß Adam den Apfel – und nicht vielmehr die Banane?‘ zurückzuweisen.

Damit sind noch nicht alle Eigenarten von Warum-Fragen zutage getreten. Zur Hebung einer weiteren ist nochmals die Frage ‘Warum aß Adam den Apfel – und nicht vielmehr die Schlange, Gott...?‘ nebst einem Auszug aus der Antwortpalette zu betrachten:

[20] a) weil die Schlange keine Äpfel mochte,

b) weil Adam Menschsein schlechthin darstellt und Gott nur durch Adams Sündenfall sein Heilswerk ausführen konnte,

c) weil nur Adams Speichelproduktion durch Aussehen und Duft des Apfels so angeregt war, daß er mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.8 zubeißen mußte.

Die erste Erklärung entstammt dem Alltag, die zweite ist theologischer, die dritte ist ernährungsphysiologischer Natur. Was jeweils als relevante Erklärung zählt, kann nur den Erwartungen der Fragesteller und der darin unterstellten Hintergrundtheorie entnommen werden.

Mit diesen allgemeinen Instruktionen zum Erklären ist die unter [16] aufgeschriebene Leibniz-Frage zu inspizieren: Ein kontrastives Element ist bereits mitgenannt – und es scheint keine

weiteren kontrastiven Elemente zu geben; schon das weist auf den außergewöhnlichen Charakter der Frage hin.

Als Hintergrundtheorie fungiert (irgend)eine metaphysische Konzeption: Die Möglichkeit, daß [16] lediglich eine elliptische, d.h. stark verkürzte, Fassung eines >konkreteren< Problems darstellt und damit in den Zuständigkeitsbereich einer entsprechend spezielleren Wissenschaft fällt, ist definitiv auszuschließen.

Ferner präsupponiert die Frage, daß das zu Erklärende wahr sein muß, die kontrastiven Elemente aber falsch. Die erwähnten Faktoren lauten unter Vernachlässigung stilistischer Elemente:

[21] a) es gibt etwas.

b) es gibt nichts.

Das Explanandum, das zu Erklärende, scheint – würde graduierende Rede hier Sinn machen – so wahr und das kontrastive Element so falsch, daß die Frage nach Wahrheit und Falschheit sich zu erübrigen scheint. Gleichwohl soll hier das Problem aufgeworfen werden, wie man über Wahrheit/Falschheit dieser Aussagen entscheiden könnte. Dieses Anliegen führt zwangsweise auf das Problem der Bedeutung der verwendeten Ausdrücke; und damit steht man bei der Frage, welches denn die Teilausdrücke von Explanandum und kontrastivem Element sind.
Die (an dieser Stelle ohne weitere Erläuterung benutzte) Standardanalyse – die bei vielen anderen Vorkommen der Ausdrücke ‘etwas’, ‘nichts’ und ‘es gibt’ bewährte Analyse – würde [21] so paraphrasieren:

[22] a) Es gibt ein *x*: *x* ist identisch mit *x*.

b) Nicht: Es gibt ein *x*: *x* ist identisch mit *x*.

Die erste Aussage ist eine identitätslogische Wahrheit; eine Variante kam bereits bei der Erörterung des Monismus ins Spiel (↑1.1.2.) Die zweite ist logisch falsch; und in beiden Fällen wird überhaupt nicht nach Erklärungen gefragt, sondern nur nach Beweisen und Widerlegungen. Insbesondere würde in diesem Feld kein Metaphysiker auf Erklärungssuche gehen; das läge schlichtweg außerhalb seines >Geschäftsbereichs<.

Hält man an der Standardanalyse fest, muß man die Frage aufgeben: Eine hoch gehandelte interrogative Irritation wäre aus der Welt geschafft! Umgekehrt kann man jedoch – unter anderen Prämissen – auch zu dem Schluß kommen, daß die Standardanalyse bei gerade diesem Vorkommen der Schlüsselausdrücke versagt; dann ist man jedoch gehalten, eine

Alternative anzubieten: Man gibt es nicht auf, den Nagel in die Wand zu schlagen, weil der Stiel des Hammers morsch ist; zu suchen ist vielmehr ein Hammer mit intaktem Stiel, ein besseres, d.h. zweckmäßigeres, Werkzeug. Eine alternative Analyse könnte etwa so lauten:

[23] a) Es gibt ein *x*: *x* existiert.

b) Nicht: Es gibt ein *x*: *x* existiert.

Wer [23] akzeptieren möchte, steht allerdings vor der Aufgabe anzugeben, was er mit dem Vexierwort ‘existieren’ meint, denn nur dann ist feststellbar, ob die Präsuppositionen der Warum-Frage zutreffen. Derartige Fragestellungen verlangen eine Explikation der Bedeutung des Wortes ‘existiert‘.– Die Literatur kennt viele andere Deutungen, Lesarten, Varianten. Die prominenteste lautet so:

[24] a) Die Welt existiert.

b) Nicht: Die Welt existiert.

Wer die Leibniz-Frage aufwirft und damit [24] anzielt, legt allerdings weite Wege zwischen das, was er sagt, und das, was er (mutmaßlich) meint. Gleichwohl hat er damit nicht alle Minen hinter sich gelassen: Wie sein Vorgänger muß er dartun, wie er den zusätzlichen Ausdruck ‘existiert’ zu verwenden gedenkt; überdies hat er eine Erläuterung für die Vokabel 'die Welt' anzubieten. Die – wie später gesagt wird (↑3.2.1, 7.) – Individuenkonstante ‘die Welt’ könnte, entlang der Idee, daß die Welt eben alles, aber auch wirklich alles (außer sich selbst) als Teil enthalten soll, etwa so eingeführt werden:

[25] Die Welt = dasjenige *x*, das alle von *x* verschiedenen *y* zum Teil hat.

‘dasjenige *x*’, der Kennzeichnungsquantor (↑3.3.2, 7.), ist allerdings ein notorischer Querulant. Schon eine elementare Intuition geht fehl. Sie lautet:

[26] Dasjenige *x*, das ein so und so ist, ist (eben) ein so und so.

Die kleinste natürliche Zahl ist kleinste natürliche Zahl und der höchste Berg Deutschlands ist eben höchster Berg Deutschlands! Schließlich soll eine Eigenschaft, mit deren Hilfe wir einen Gegenstand von allen anderen unterschieden, dem unterschiedenen Gegenstand auch zukommen! Was könnte plausibler sein? Aber gilt etwa auch:

[27] Dasjenige *x*, das größte natürliche Zahl ist, ist größte natürliche Zahl.

Träfe [27] zu, dann gäbe es eine größte natürliche Zahl – und die Negation dieser Aussage ist bekanntlich arithmetisch beweisbar. Insgesamt würde also gelten:

[28] Es existiert ein *x*: *x* ist größte natürliche Zahl.

Nicht: Es existiert ein *x*: *x* ist größte natürliche Zahl.

Wiederum wäre man bei einem Widerspruch angelangt! – Aber auch wenn man die allgemeinen Probleme um den Kennzeichnungsquantor bewältigt, bleiben die anderen Teile der vorgeschlagenen Weltdefinition, allen voran der Ausdruck '..hat .. zum Teil', zu etablieren: Was wären, so würde der philosophische Profi sofort fragen, passende Einsetzungen für die universalquantifizierten Variablen: Nominatoren für Individuen, Gegenstände, Sachverhalte, Tatsachen, Ereignisse, Zustände, Prozesse, Elementarteilchen usf.? Anders gefragt: Welcher Art sind die Gegebenheiten, die Teile der Welt sind? Wie umfassend, so würde der Profi nachsetzen, ist der Universalquantor – auf dem Hintergrund der Antinomiengefährdung >universaler< Größen – anzusetzen? Wie wäre außerdem der Prädikator '...ist Teil von...' einzuführen? Fragen über Fragen! Wer die Debatten, die die Beantwortung dieser Fragen begleiten, kennt und überdies die Standards der Begriffsbildung durchzusetzen gewillt ist, wird niemanden um die Bearbeitung dieser Folgeaufgaben beneiden.

Man ist es, so das Fazit, gewohnt, Warum-Fragen aufzuwerfen und ohne Umstände zu ihrer Beantwortung überzugehen – und die Leibniz-Frage sieht zunächst wie eine gewöhnliche Warum-Frage aus. Normale Warum-Fragen, auch solche mit 'Etwas' und 'Nichts', sind fest im Griff, die Leibniz-Frage ist entglitten: Es bleibt – jedenfalls auf Basis der hier zu Beispielzwecken vorgeführten Untersuchungen – unklar, was denn erfragt wird, was überhaupt Kandidat einer einschlägigen Klärungsbemühung sein könnte.

An dieser Stelle sind zwei Warnschilder aufzurichten: <u>Erstens</u> ist nicht zu dem Verdacht zu ermuntern, daß <u>alle</u> handelsüblichen Deutungen die genannten oder ähnliche Schwierigkeiten auf sich ziehen. Um diesen Verdacht zu erhärten, müßten eben alle vorliegenden Deutungsvorschläge inspiziert werden. Selbst wenn eine solche Inspektion einen negativen Ausgang hätte, wäre es verfehlt, aus de facto gescheiterten Versuchen schon auf die Unmöglichkeit des Gelingens eines jeden zukünftigen Anlaufs zu schließen. Wer so schlösse, überkletterte einen Zaun – siehe dazu Absatz 1.1.2!

Und noch viel ferner sollte es <u>zweitens</u> liegen, Sinnlosigkeitsverdikten Vorschub zu leisten: Denn zum einen läßt sich gegenüber einem nicht klar identifizierten Gebilde ein solches Urteil kaum geltend machen; und zum anderen ist 'sinnlos' ein Ausdruck mit verstecktem

Maßstabparameter, über dessen Verwendung im jeweiligen Kontext erst zu befinden wäre – siehe dazu 1.1.1!

Die Haltung indes, die hiermit gegenüber der Leibniz-Frage – wie auch gegenüber anderen durch sie hier nur repräsentierten >großen< Fragen – empfohlen wird, ist diese: Keinen Antworten beitreten, insbesondere: keine >weltanschaulichen< Positionen beziehen, und keiner Beurteilung der Frage z.B. als unbeantwortbar oder gar sinnlos zustimmen, bevor die/eine grammatische Struktur und die/eine Bedeutung der verwendeten Ausdrücke nach den später etablierten Regeln der Kunst gesichert ist! Man sollte derartige Gebilde nicht als >beantwortungsfertige< Fragen behandeln, sondern eher als Frageprovisorien, aus denen man über meist langwierige und in aller Regel alternativenreiche Prozesse der grammatischen Strukturierung und Bedeutungszuweisung (vielleicht) eine oder (in der Regel) mehrere Fragen bilden kann (↑12., 16.). – Das hier Gemeinte verdeutlicht sich die Leserin am besten dadurch, daß sie den nächsten Absatz in einem interrogativen Licht liest, so also, als ginge es um die Klärung der Frage, ob das Leben unantastbar ist.

Ü3 a) Geben Sie Beispiele für Warum-Fragen, die wegen falscher Fragepräsuppositionen zurückzuweisen sind!

b) Suchen Sie Warum-Fragen, die sich nach dem Muster von [18] bearbeiten lassen!

c) Suchen Sie Warum-Fragen, die sich nach dem Muster von [20] bearbeiten lassen!

d) Geben Sie weitere Beispiele dafür, daß die unter [26] notierte Intuition scheitert!

1.1.4 Antastbar/Unantastbar: Moralphilosophische Klärungen

Beim letzten Beispiel für den philosophischen Vollzug wird über eine Debatte in einem moralphilosophischen Arbeitskreis berichtet. Geprüft, d.h. auf Sinn, Begründbarkeit und Konsequenzen untersucht, wird folgende These:

[29] Das Leben ist unantastbar.

Zum Start meldet sich ein Skeptiker zu Wort. Als enttäuschter, aber klug gewordener Kenner philosophischer Auseinandersetzungen fordert er, man möge zunächst die Bedeutung der an der These hauptsächlich beteiligten Redemittel, nämlich der Worte ‘das Leben‘ und ‘unantastbar‘, klären. Er korrigiert sich sofort: Es sei ihm sehr wohl klar, daß diese Redeteile (wie die meisten philosophischen Wörter) mehrere Bedeutungen aufweisen; und er bittet – aus naheliegenden Gründen – darum, daß man sich bei beiden Worten auf ein Verständnis

festlegt, um so eine eindeutige These zum (eben dadurch erst) gemeinsamen Thema zu haben.

Ein zweiter Teilnehmer, der stets um >konstruktive< Auseinandersetzungen bemüht ist und mehr oder minder die Rolle eines Mentors spielt, nimmt das Votum des Skeptikers auf. Er schlägt vor, die Wendung ‘das Leben‘ im Sinne von ‘alle Lebewesen‘ zu verstehen:

[29]* Alle Lebewesen sind unantastbar.

Der Skeptiker akzeptiert diese zweite Lesart, weist aber – mit Blick auf anwesende Erstsemester – vorsorglich darauf hin, daß eine solche Deutung nicht in allen Redezusammenhängen möglich ist. Nimmt man etwa Aussagen wie ‘So ist das Leben‘, ‘Das ist mein Leben‘ oder ‘Sie schenkte ihm im August das Leben‘, dann verletzt man mit Paraphrasen wie ‘So sind alle Lebewesen‘, ‘Das sind alle meine Lebewesen‘ oder ‘Sie schenkte ihm im August alle Lebewesen‘ den Sinn der Ausgangsaussage.

Nach dieser allgemein akzeptierten Warnung wendet man sich dem zweiten Redeteil zu, dem Wort ‘unantastbar‘. Einigkeit herrscht darüber, daß das direkte Verständnis im Sinne von ‘unberührbar‘ nicht einschlägig ist. Ein anwesender Psychologiestudent schlägt vor, Unantastbarkeit im Sinne der Nichtbeeinträchtigung des jeweiligen Lebensplans aufzufassen. Umständlicher, aber vielleicht etwas genauer:

[29]$^{+}$ Für alle Lebewesen gilt, daß ihr Lebensplan nicht beeinträchtigt werden darf.

Dieser Vorschlag ruft wiederum den Skeptiker auf den Plan, der gleich zwei Bedenken vorträgt. Zum einen: Mit der Ersetzung von ‘unantastbar‘ durch ‘unbeinträchtigbar‘ sei wirklich kein Klärungsfortschritt erzielt; es handle sich vielmehr um ein glattes obscurum per obscurius! Ein dunkles Wort werde durch ein noch dunkleres ersetzt! Zum andern: Von Lebensplänen könne man prinzipiell nur bei reflexionsfähigen Wesen sprechen, aber nicht bei Fliegen und Sumpfdotterblumen; wer Lebenspläne besitze, müsse sich Ziele setzen und Mittel zum Erreichen dieser Ziele aussondern können. Über diese hätten auch manche reflexionsfähige Wesen keinen Lebensplan und andere wechselten diesen wie ihre Schuhe; damit wäre die Rede von <u>dem</u> Lebensplan ohnedies nicht berechtigt.

In Anbetracht dieser Schwierigkeit weist der Mentor darauf hin, daß man sich gegenwärtig erst in einer Explorationsphase befinde: Man suche nach allgemein mitvollziehbaren Deutungen einer Aussage. An diesem Punkt könne man auf (wenigstens) zwei Weisen fortfahren. Erstens: Man könne Rettungsversuche für die vorgeschlagene Deutung starten, indem man z.B. von Lebensplänen tatsächlich nur in Bezug auf reflexionsfähige Lebewesen

spricht, bei den übrigen Lebewesen aber z.B. von einem artgerechten Umgang. Die These hätte dann zwei Teile: Für nicht reflexionsfähige Lebewesen wird der artgerechte Umgang gefordert, bei den reflexionsfähigen darf der Lebensplan nicht beeinträchtigt werden. Damit wäre zumindest eine vom Skeptiker vorgetragene Schwierigkeit behoben; natürlich müsse noch geklärt werden, worin die Beeinträchtigung von Lebensplänen bestehen könnte. Zweitens: Man könne nach einer anderen Deutung von ‘unantastbar‘ Ausschau halten und die These unter dieser Interpretation untersuchen. Eine geradezu >handfeste< Lesart bestünde etwa darin, Unantastbarkeit im Sinne des Tötungsverbots zu deuten: Kein Lebewesen darf getötet werden. Näher an früheren Formulierungen wäre:

[29]° Für alle Lebewesen gilt: es ist verboten, diese zu töten.

Da alle an der Debatte Beteiligten diese Fassung der Unantastbarkeitsthese in der Folge erörtern wollen, greift an dieser Stelle eine logisch versierte Kommilitonin ein. Sie hebt zunächst hervor, daß ‘töten‘ ein Handlungsverb ist, bislang aber die handelnde Instanz in den Formulierungen noch gar nicht zur Geltung gebracht worden ist: Jemand tötet jemanden. Von der Logischen Grammatik her müsse man ‘töten‘ als (wenigstens) zweistelligen Prädikator ansetzen: ‘..tötet..‘. Sodann schlägt die Logikerin vor, die Aussage im Sinn der Logischen Grammatik übersichtlicher zu strukturieren und dabei z.B. den Textindikator ’diese‘ durch eine Variable zu ersetzen. Beide Vorschläge setzt sie um, indem sie folgende Reformulierung vorschlägt:

[29]** Für alle *x* : Wenn *x* ein Lebewesen ist, dann gilt für alle *y*: es ist verboten, daß *y* tötet *x*.

Bei diesem Entwicklungsstand weist der Skeptiker darauf hin, daß es in der Sprache unseres Alltags völlig unüblich ist, vom Töten von Pflanzen zu sprechen: Man fälle Bäume, mähe Getreidehalme und pflücke oder schneide Blumen, aber dies sei kein Töten von Bäumen, Getreidehalmen und Blumen. Vergleichend führt er an, daß man zwar von einem Massaker in einer Menschenmenge, nicht aber von einem Massaker in einem Tulpenbeet sprechen könne. Ihm sei gedient, wenn man unter ‘Lebewesen‘ Tiere oder Menschen verstehe; und natürlich beuge es allen Mißverständnissen vor, wenn man das auch ausdrücklich macht:

[29]$^{++}$ Für alle *x* : Wenn *x* ein Mensch oder ein Tier ist, dann gilt für alle *y* : es ist verboten, daß *y* tötet *x*.

Damit scheint die These erstmals in eine Form gebracht, die nicht mehr nach weiterer Bedeutungsklärung verlangt, sondern auf Haltbarkeit untersucht werden kann. Der in der Bedeutungs- bzw. Problementwicklung zurückgelegte Weg kann so dargestellt werden:

[30] Bedeutungsentwicklung

[29] Das Leben ist unantastbar.

↓

[29]* Alle Lebewesen sind unantastbar.

↙ ↘

[29]° Für alle Lebewesen gilt:
es ist verboten, sie zu töten.

[29]$^{+}$ Für alle Lebewesen gilt,
daß Ihr Lebensplan nicht beeinträchtigt werden darf.

↓

[29]** Für alle *x*: Wenn *x* ein Lebewesen ist,
dann gilt für alle *y*: es ist verboten,
daß *y* tötet *x*.

↓

[29]$^{++}$ Für alle *x*: Wenn *x* ein Mensch oder
ein Tier ist, dann gilt für alle *y*: es ist verboten,
daß *y* tötet *x*.

Der Mentor hat gleich seine Sympathie für die These erkennen lassen und sich damit dem Angriff einer Teilnehmerin, die bekennende Vegetarierin ist, ausgesetzt: Wie er es mit diesem Tötungsverbot zusammenbringe, daß er heute Nachmittag noch unter vernehmlichen Genußbekundungen ein riesiges Steak verzehrt habe; mit dieser Handlung verwickle er sich doch in einen glatten Widerspruch!

Widersprüche – hier greift die Logikerin neuerlich ein und schafft damit dem Mentor eine kurze Atempause – bestünden aus der Verbindung einer Aussage und ihrer Negation. Hier aber habe man es mit einer Handlung und einer (probehalber übernommenen) Überzeugung zu tun. Man solle deshalb besser so reden, daß eine Handlung einer Überzeugung zuwiderlaufe; und dieses Zuwiderlaufen müsse man dann letztlich so erklären, daß die die Handlung legitimierende Überzeugung im Widerspruch zu obigem Tötungsverbot stehe; und das sei – wie immer die Einzelheiten dieses Klärungsprozesses aussehen – zweifellos erwartbar.

Die Reaktion des Mentors kommt nun prompt: Er schwächt die These ab, indem er nur noch Menschen als die Gegebenheiten ansieht, für die das Tötungsverbot Geltung haben soll. Seine modifizierte These lautet also:

[31] Für alle *x* : Wenn *x* ein Mensch ist, dann gilt für alle *y* : es ist verboten, daß *y* tötet *x*.

Die Vegetarierin nimmt diesen Rückzug keineswegs hin. Sie erinnert den Mentor an ein Einverständnis, das in einer früheren Debattenrunde hergestellt worden ist: Tötungsverbot bestehe prinzipiell gegenüber allen leidensfähigen Wesen:

[32] Für alle *x* : Wenn *x* ein leidensfähiges Wesen ist, dann gilt für alle *y* : es ist verboten, daß *y* tötet *x*.

Unter einer naheliegenden Prämisse ergebe sich dadurch die uneingeschränkte Aussage $[29]^{++}$. Wer zu einer Überzeugung stehe, müsse auch deren Konsequenzen akzeptieren; und deshalb sei der Mentor gehalten, $[29]^{++}$ ohne Wenn und Aber anzunehmen. Sollten ferner den Worten Taten folgen, habe er überdies in das Lager der praktizierenden Vegetarier überzutreten. – An dieser für den Mentor überaus heiklen Stelle möge der Bericht über die Unantastbarkeitsdebatte abbrechen! Die Übung nimmt zwei Folgeprobleme auf!

Ü4 a) Welches ist die naheliegende Prämisse, mit deren Hilfe aus [32] die Aussage $[29]^{++}$ folgt?

b) Wie müßte die Aussage [31] in möglichst sparsamer Weise modifiziert werden, damit sie das Verbot der Selbsttötung nicht mehr einschließt?

c) Wie müßte die Aussage [31] in möglichst sparsamer Weise modifiziert werden, damit sie das Verbot der Tötung in Notwehr nicht mehr einschließt?

1.2 Zum Zweck der philosophischen Vorschule

Die vier Beispiele für den philosophischen Vollzug mögen (hinreichend) repräsentativ für die folgende Analyse sein. Diese zielt zunächst auf die Feststellung, daß Philosophieren eine durchgehend sprachliche Tätigkeit ist und erläutert ferner einige Besonderheiten (1.2.1). Sodann kann die Eingangsfrage nach dem Anfang des Philosophierens neuerlich aufgenommen werden: Die methodisch aufgefaßte Sprachphilosophie bzw. die in einem weiten Sinne genommene Logik ist als Erste Philosophie auszuzeichnen (1.2.2).

1.2.1 Zur Analyse des exemplarischen Vollzugs

Im Links-Rechts-Beispiel entsteht eine paradoxe Situation als Ergebnis von über Wahrnehmungen zustande gekommenen Feststellungen bzw. aufgrund des gezielten Schließens aus diesen Feststellungen. Der Philosoph beschreibt dieses Paradox. Er unterstellt mit Gründen seine Unerwünschtheit und er schlägt schließlich eine Auflösung vor.

Im Überkletterte-Zäune-Beispiel gilt die Aufmerksamkeit einer bestimmten, alle unsere Tätigkeiten durchdringenden, Redehandlung, dem Folgern oder Schließen. Es wird verdeutlicht, daß die inkorrekte Exekution dieser Handlung in hohem Maße unerwünschte Folgen hat, und daß, allgemein gesprochen, hinsichtlich dieses Redevollzugs erheblicher Reglementierungsbedarf besteht.

Paradoxe Situationen entstehen in allen Erkenntnisfeldern, und deshalb auch in der Philosophie. Die Folgerungshandlung spielt in den übrigen Beispielen ebenfalls eine zentrale Rolle, ebenso wie in allen kognitiven Bemühungen, also auch in der Philosophie. Im Etwas-Nichts-Exempel wird nun eine Erkenntnishandlung erörtert, die in dieser Instanziierung nur in der Philosophie vorkommt. Die Analyse fragt zunächst ganz allgemein nach den Bedingungen des Warum-Fragens, um sich dann, mit offenem Ausgang, der Frage zu widmen, wie man aus dem Frageprovisorium eine bearbeitbare Frage bilden könnte.

Das Antastbar-Unantastbar-Beispiel hat mit dem Etwas-Nichts-Exempel einen wichtigen Zug gemeinsam: Es geht über weite Strecken um mögliche Bedeutungen der zentralen Ausdrücke, um Verständnismöglichkeiten, Sinnzuschreibungen. Die Entwicklung des Szenarios kommt jedoch insofern ein Stück weiter, als schließlich eine These verfügbar ist, die sich mit Sinn auf ihre Konsequenzen und damit auch auf (Un)Verträglichkeiten untersuchen und erörtern läßt. Der Auszug aus einer moralphilosophischen Debatte verdeutlicht auch, daß sich die Arbeit in

diesem Feld in wesentlichen Zügen nicht von den Bemühungen in anderen philosophischen Gebieten unterscheidet.

Einseitig sind die meisten Beispiele insofern, als weder nur (philosophische oder nichtphilosophische) Redehandlungen noch nur Handlungen und ihre Ingredienzien zum philosophischen Thema werden können. Dessen ungeachtet läßt sich aber festhalten: Wenn die obigen Vorführungen philosophisches Tun exemplifizieren, dann steht außer Frage, daß Philosophieren ein durchgängig sprachlicher Vollzug ist: Kein Zug im philosophischen Spiel entbehrt der sprachlichen Verfaßtheit! Gleichgültig, worüber man redet, man redet darüber! Diese Feststellung bedürfte auch dann keiner Modifikation, wenn beliebige weitere Beispiele als Grundlage herangezogen würden. Wer philosophiert, vollzieht Redehandlungen wie das Behaupten, Fragen, Folgern und Bestreiten und bringt damit Wahrheits- und Falschheitsansprüche zur Geltung; und im Vollzug dieser Redehandlungen werden einzelne Ausdrücke verwendet; ferner sind diese Redehandlungen häufig zu Redesequenzen, z.B. zu Erklärungen, Begründungen, Beweisen, Disputen usf., verknüpft. Auch Tätigkeiten wie das Vergleichen, Unterscheiden, Kritisieren, Abgrenzen, Charakterisieren, Fundieren, Entfalten, Entwickeln, Spekulieren, Plausibilisieren, Abstrahieren, (Re) bzw. (De)Konstruieren, Analysieren usf. sind durchgängig sprachlich verfaßt.

All dies – so ist nicht nur einzuräumen, sondern ausdrücklich hervorzuheben – stellt lediglich eine notwendige Bedingung des Philosophierens dar, jedoch keine hinreichende, und damit erst recht keine vollständige. Auch alle übrigen Wissenschaften vollziehen sich, ebenso wie das lebensweltliche Erkennen, notwendig sprachlich; und es ist umgekehrt keineswegs nur die Erkenntnistätigkeit, die sprachlich verfaßt ist.

Obgleich bereits das prinzipielle Faktum der sprachlichen Verfaßtheit des Philosophierens zur Beantwortung der Frage nach den Anfängen des Philosophierens zureicht, mag die Betrachtung der Beispiele die Eigenart der philosophischen Redehandlungen etwas verdeutlichen. Das Philosophieren ist nicht nur eine sprachlich verfaßte Tätigkeit, sondern thematisiert auch solche sprachlichen Vollzüge (und damit auch die eigenen Akte). Dazu wird – zum ersten – eine grammatische Terminologie benötigt: Man erinnere sich an die Verwendung der Ausdrücke ‘Ausdruck’, ‘Redeteil’, ‘Konjunktor’, ‘Teilausdruck’, ‘Variable‘, ‘Aussage’, ‘Widerspruch’, ‘Negation’, ‘Prädikator’, ‘Negatprädikator’, ‘Kennzeichnungsquantor’, ‘Zweistelligkeit’, ‘Universalquantor’, ‘Existenzquantor’ usf. Außerdem muß eine redehandlungsbezügliche Terminologie im weitesten Sinne bereitstehen, also Ausdrücke wie ‘Redehandlung’, ‘Behauptung’, ‘These‘, ‘Folgerung’, ‘Schlußregel’, ‘Prämisse’, ‘Konklusion‘, ‘Grund’, ‘Beweis’, ‘Widerlegung’, ‘Kontroverse’, ‘Disput’, ‘Diskurs’, ‘Wahrheit/Falschheit’,

‘Bedeutung‘, ‘Sinn‘, ‘Verständnis‘ usf. Natürlich hängen die beiden grob unterschiedenen Begriffsmannschaften engstens zusammen: Die erste wird nur entwickelt, um im Zusammenwirken mit der zweiten die Redehandlungen und alles darin Involvierte zum Thema machen zu können.

1.2.2 Sprachphilosophie/Logik als Erste Philosophie

Womit soll nun der Anfang des Philosophierens in Erwerbs- und Vollzugsordnung gemacht werden? Will man eine komplexe Tätigkeit organisieren, dann mag man als generelle Orientierung folgende Maxime setzen: Mache den Anfang mit dem, was für die Gestaltung des gesamten Vollzugs unverzichtbar ist, was ferner im Fortgang die Hilfen maximiert und mögliche Revisionen minimiert! – Da das Philosophieren im Vollzug von Redehandlungen besteht, ist als Erste Philosophie eine elementare Verständigung über das Redehandeln anzusetzen. Gibt man diesem Projekt den Titel ‘Sprachphilosophie’ bzw. ‘Logik’, dann ist damit die Sprachphilosophie/Logik als Erste Philosophie ausgezeichnet.

Die geforderte elementare Verständigung umfaßt alle mit den Redehandlungen, insbesondere den kognitiven Redehandlungen, aufgeworfenen Fragen, auch und an vorderer Stelle die normativen Problemstellungen. In allen vorgeführten Beispielen spielten z.B. Widersprüche eine zentrale Rolle. Unterstellt war stets, daß Widersprüche nicht beweisbar sein dürfen und daß im Falle des Auftretens von auch nur plausibel scheinenden Widersprüchen allemal eine Revision angesagt ist. Warum ist das so? Und was ist daran eigentlich so fatal? Das sind Fragen, die in sehr grundsätzlicher Weise auf die Gestaltung der Folgerungshandlung und damit das >Innenleben< aller Diskurssorten zielen. Bei der elementaren Verständigung geht es also nicht etwa nur darum, aus dem Kontinuum der Rede eine Handlung wie das Schließen als eigene >Einheit< herauszuheben; auch die Frage, wie man diese Handlung reglementieren soll und im Blick auf welche Zwecke eine solche Gestaltung gerechtfertigt werden kann, steht zur Debatte!

Zur Mißverständnisprophylaxe sind einige Ergänzungen für >Kenner< angesagt: (i) Die hier unterlegte Auffassung von Sprachphilosophie ist – zum einen – neutral gegenüber der Unterscheidung zwischen normal- und idealsprachlich ausgelegter (Sprach)Philosophie: Wer die hier dargestellte Auffassung teilt, ist bei konkreten philosophischen Problemen noch nicht von vornherein gehalten, diese mit normal- oder idealsprachlichen Mitteln (dieser oder jener Provenienz) anzugehen. Sie trifft – zum anderen – Unterscheidungen, die beide Tendenzen benötigen, in aller Regel aber nicht selbst entwickeln und zur Geltung bringen.

(ii) Sprachphilosophie wird nicht als >Bindestrich-Philosophie< aufgefaßt, der die Aufgabe zufällt, alle mit dem Sprachthema verbindbaren Topoi philosophischer Relevanz abzuarbeiten: Die Rolle der Sprache zur Expression emotionaler Tiefen- und Höhenlagen mag in der Bindestrich-Sprachphilosophie, in der Anthropologie oder Ästhetik verhandelt werden; sie stellt jedoch kein Thema der Sprachphilosophie als Erster Philosophie dar.

(iii) Auch die fachwissenschaftliche Tätigkeit läßt sich, wie schon erwähnt, als Vollzug von Redehandlungen konzipieren. Insoweit die Sprachphilosophie sich mit Redehandlungen überhaupt und insbesondere auch in normativer Hinsicht befaßt, darf sie nicht nur als „prima philosophia“ gelten, sondern auch als „prima scientia“: Die philosophische Vorschule ist auch Propädeutik für das wissenschaftliche Arbeiten und in diesem (gut scholastischen) Sinne „scientia scientiarum“.

(iv) Die Überlegung verlangt insofern nach Erweiterung, als der Erkenntnisvollzug sich nicht in Fachwissenschaften und Philosophie erschöpft; diese gehören gemeinsam dem sonderweltlichen Feld an, dem das umfassende und fundierende lebensweltliche Erkennen gegenübersteht (↑13.). Da jedwedes Erkennen sprachlich verfaßt ist und auch das Wünschen, Wählen, Wollen und Entscheiden von zuvor getroffenen Unterscheidungen getragen wird, kommt der „Vorschule der Philosophie“ ein schlechterdings unbeschränktes Einsatzfeld zu. „Vorschule der Philosophie“ ist also im Sinne des genitivus subjectivus wie auch des genitivus objectivus zu lesen: die <u>von</u> der Philosophie für alle Erkenntnisvollzüge veranstaltete Vorschule und (damit auch) die <u>für</u> die Philosophie ins Werk gesetzte Vorschule. – Das hier nur angedeutete Konzept von Philosophie, insbesondere das Geflecht von Vollzug, Störung, Reflexion und reflektiertem Neuvollzug wird erst abschließend ausgearbeitet (↑16.).

(v) Der propagierte Ansatz läuft nicht darauf hinaus, daß, wann und worüber auch immer philosophiert wird, ipso facto Sprachphilosophie betrieben wird, nach dem Muster: In der Ethik wird nicht mehr gesagt, was unter welchen Umständen zu tun oder zu lassen erlaubt, geboten, verboten, empfohlen ist; lediglich die Bedeutung der Redeteile ‘tun’, ‘unterlassen’, ‘geboten’, ‘verboten’ usf. steht zur Verhandlung. In der Religionsphilosophie geht der Streit nicht darüber, ob Gott existiert oder nicht, ob ihm diese oder jene Eigenschaften zukommen oder nicht; lediglich Bedeutung und mögliche Bedeutungsverleihung hinsichtlich der Redeteile ‘Gott’, ‘existiert’, ‘allmächtig’ usf. ist zu erörtern.

Ganz im Gegenteil: Weiterhin wird – um im ersten Beispiel zu bleiben – Ethik betrieben; und das geschieht, indem die erwähnten Ausdrücke in kognitiven Redehandlungen <u>verwendet</u> werden. Aber die >zweiten< Philosophien werden <u>anders</u> exekutiert, nämlich <u>sprachphilosophisch bzw. logisch aufgeklärt</u> und <u>instrumentiert</u>: Ehe etwa das

handlungsbezogene und ge- sowie verbietendende Vokabular in der Ethik >schlicht<, >wild< und >naiv< – und damit in bekannte unrentable Kontroversen führend – benutzt wird, muß es nach den Regeln der Kunst aufgeklärt und bereitgestellt werden; dann erst – und nun fernab von hinderlichen Scheingefechten – kann man in das von Sprachphilosophie sehr wohl zu unterscheidende moralphilosophische Geschäft eintreten.

1.3 Das Programm der philosophischen Vorschule

Wie bei jedem größeren Lehr- und Lernprojekt ist es – für beide Parteien – hilfreich, vorab einen Eindruck von den Stationen des zurückzulegenden Weges zu geben (1.3.1). Hinweise zum Umgang mit diesem Text und damit zur erfolgeichen Absolvierung der philosophischen Vorschule leiten zu den Literaturempfehlungen über (1.3.2). – Für die Anfängerin werden zahlreiche Ausdrücke in der folgenden Übersicht neu und unverständlich sein; es empfiehlt sich zur Herstellung von Überschaubarkeit und zur Erleichterung der eigenen Plazierung, nach Bearbeitung der einzelnen Kapitel sowie am Ende des Textes nochmals auf diesen Überblick zurückzukommen.

1.3.1 Die Stationen der Durchführung

Zunächst ist der Gesamtansatz in seinen leitenden Intuitionen plausibel zu machen: Was sind Redehandlungen? Aus welchen Momenten sind sie aufgebaut? Wie gelangt man zu der Idee, Redehandlungen seien von Regeln geleitet? Was legt es nahe, Sprachen als Regelwerk für Redehandlungen anzusetzen, dem eine entsprechende Grammatik vorangestellt ist. Wie lassen sich das Wahrheits- und das Bedeutungsthema lokalisieren in der Landschaft, die in Beantwortung der vorstehenden Fragen gezeichnet wird? Das Weitere geht von diesem Umriß ins Detail (2.).

Sodann ist der erste Faktor von Sprachen, die Grammatik, einer detaillierten Betrachtung zuzuführen. Nach einer Auszeichnung der Rationalen oder Logischen Grammatik aus der Fülle der Kategorisierungsofferten für Redeteile wird die Standardgrammatik erster Stufe vorgestellt. Die atomaren Kategorien werden ausführlich erläutert. Insbesondere finden die Konzepte des offenen und geschlossenen Terms sowie der offenen und geschlossenen Formel Präzisierung. Dabei läßt sich auch ein erster Eindruck vom induktiven bzw. rekursiven Vorgehen gewinnen, das, anbei bemerkt, auch bei Programmiersprachen eine Schlüsselrolle spielt (3.).

Der dritte Durchführungsschritt konzentriert sich auf die Folgerungsregeln und damit auf die Verwendungsregeln für die Junktoren, Quantoren und den Identitätsprädikator. Für jedes logische Zeichen wird zweierlei spezifiziert: Unter welchen Bedingungen kann man auf eine Aussage schließen, deren Hauptoperator das zu regulierende logische Zeichen ist? Was kann man aus einer Aussage schließen, deren Hauptoperator das zu regulierende logische Zeichen ist? Die Formulierung und Erläuterung solcher Einführungs- und Beseitigungsregeln wird ergänzt durch die Einübung in ihre Benutzung, d.h. durch den Beweis erster logischer Wahrheiten (4.).

Die Beherrschung der logischen (Grund)Regeln ist eine Sache, die Fertigkeit, sich über Folgerungsverhältnisse zu verständigen eine andere. Es ist die zuletzt erwähnte Kompetenz, die im vierten Durchführungsschritt in Anfängen zu vermitteln ist. Dabei wird auf den Zusammenhang von Folgerungsregeln und Folgerungsrelation besondere Aufmerksamkeit gerichtet. Auf Basis des Folgerungsbegriffs können weitere metalogische Konzepte wie etwa ‘Konsistenz‘ und ‘Abhängigkeit‘ bereitgestellt werden. – Der Kontext legt außerdem einige Ergänzungen nahe: Das Folgern wird verkürzt durch die sogenannten zulässigen Regeln, die Methode der Gegenbeispiele erlaubt die Diagnose des „non-sequitur“. Da der Gedanke der Einzigkeit in vielen Kontexten eine zentrale Rolle spielt, wird auch der Einsquantor im Detail vorgestellt. Der in einem Zusatz plazierte Hinweis auf alternative logische Regelwerke öffnet ein Tor zur Philosophie der Logik (5.).

Die beiden soeben vorgestellten Kapitel betreffen die Logik, d.h. (letztlich) einige Junktoren, Quantoren und den aufgrund seines formalen Status ausgezeichneten Identitätsprädikator. Mit Junktoren und Quantoren lassen sich, wie in der Rationalen Grammatik beschrieben, aus atomaren molekulare Aussagen aufbauen. Die atomaren Aussagen zerfallen in Nominatoren und Prädikatoren. Die über die bloßen grammatischen Eigenschaften hinausgehenden Besonderheiten dieser Redeteile bzw. der mit ihrer Verwendung vollzogenen Redeteilhandlungen der Nomination und Prädikation sind in den beiden Folgekapiteln zu behandeln.

Was ist die Aufgabe der Prädikation innerhalb einer Redehandlung? Welche Arten von Prädikatoren sind unter nichtgrammatischer Rücksicht zu unterscheiden? Wie läßt sich das Prädikatorennetz beschreiben? Wie lassen sich die formalen Eigenschaften von Prädikatoren – etwa die schon verwendete Asymmetrie (↑1.1.1) – in systematischer Absicht erfassen? Wie verhalten sich Prädikatoren zu Begriffen und Eigenschaften? Im Kontext der Beantwortung dieser Fragen kann auch das altehrwürdige Universalienproblem aufgenommen werden (6.).

Prädikatoren können Gegenständen nur dann beigelegt werden, wenn diese in der Rede Vertretung finden. Nominatoren sind derartige Vertreter für Gegenstände. Drei Formen der Nomination und entsprechend drei Typen von Nominatoren – Benennen durch Eigennamen, Anzeigen durch Indikatoren, Beschreiben durch deskriptive Nominatoren – sind zu unterscheiden und in ihrem Zusammenhang zu untersuchen; die Analyse und Rekonstruktion von Kennzeichnungen, einer Unterklasse der beschreibenden Nominatoren, bildet einen Schwerpunkt (7.).

Redehandlungen sind in der Regel in Rede(handlungs)sequenzen eingebettet; und die Regeln für Redehandlungen, an vorderster Stelle die Folgerungsregeln, nehmen ausdrücklich Bezug auf Konstellationen, die durch den Vollzug weiterer Redehandlungen herbeigeführt werden können. Aus dem Spektrum der Redesequenzen sind die Diskurse auszugrenzen, d.h. die Sequenzen, deren Glieder ausschließlich kognitive Redehandlungen sind. Vor dem Hintergrund einer groben Sortierung der Diskurse sind Argumentationen, Begründungen und Beweise im Detail zu studieren. Im Zentrum steht dabei die Frage nach den Ansatzpunkten für die kritische Auseinandersetzung mit vorgelegten Argumentationen (8.).

Die von einer breiten Mehrheit getragene Auffassung, Philosophieren bestehe wesentlich oder gar ausschließlich im Studium oder in der Deutung überkommener (älterer oder neuerer) Textbestände, wird in der Folge nicht geteilt. Die philosophische Ausbildung zielt nicht auf die Erzeugung philosophiehistorischer Experten. Dennoch kann auch diese Tätigkeit erheblich profitieren von der Fertigkeit, Diskurse >in Normalform< zu überführen in Diskurse >in Explizitform<. Diese Fertigkeit wird in drei Schritten vermittelt: Zuordnung grammatisch-logischer Strukturen zu gebrauchssprachlichen Gebilden, exemplarische Überführung explizitgefaßter Diskurse in normalgefaßte (=Dekonstruktion) und exemplarische Überführung normalgefaßter Diskurse in eine Explizitfassung (=Rekonstruktion); für den letzten Schritt dienen u.a. prominente philosophische Texte als Beispiel. Die Behandlung der Leibniz-Frage bietet diesbezüglich einen Vorgeschmack (9.).

In allen ihrem Thema nach skizzierten Kapiteln werden Prädikatoren und Mitglieder anderer Ausdruckssorten erläutert, gelegentlich auch förmlich definiert. Verwiesen sei etwa auf die Fixierung der grammatischen Begrifflichkeit oder auf die Etablierung der logischen Redeteile. Diese Praxis der Bedeutungsfestlegung ist erwartungsgemäß keine Angelegenheit freihändiger Beliebigkeit. Die drei folgenden Kapitel widmen sich der Frage nach den Bedingungen der korrekten Bedeutungsfixierung, der Einführung.

Ausdrücke, so die allgemeine Bestimmung, werden mit Bedeutung versehen, indem spezifiziert wird, wie sie in Redehandlungen korrekt verwendet werden. Verschiedene

Einführungsformen können unterschieden werden, insbesondere die definitorische und die nicht-definitorische Einführung. Das Startkapitel zur Einführungslehre behandelt neben den Grundlagen die nicht-definitorischen Formen: die operationale und die axiomatische Einführung (10.).

Die Definition stellt die mit Abstand am besten untersuchte Einführungsform dar. Zwischen (meta- bzw. konstruktionssprachlichen) Definitionsschemata und (objekt- bzw. konstruktsprachlichen) Definitionen wird strikt unterschieden. Für alle grammatischen Kategorien (mit Ausnahme der Performatoren) sind Definitionsregeln zu formulieren und zu erläutern. Besonderes Gewicht liegt auf der systematisierenden Wirkung eines strikt definitorischen Vorgehens (11.).

In allen sprachlich verfaßten Vollzügen, den lebens- wie den sonderweltlichen, entsteht häufig der Bedarf, bereits in Verwendung befindliche Ausdrücke neuerlich zu etablieren, und zwar mit Rücksicht auf die schon bestehenden Gepflogenheiten. Der Ausdruck ‘Die Welt‘ wird nicht etwa >freiweg<, sondern in Anknüpfung an schon gegebene Bedeutungen etabliert. Solche Einführungen sind explikativer Natur. Sie spielen in den Sozial-, Rechts- und Kulturwissenschaften eine besonders wichtige Rolle. In der Philosophie stehen fast ausschließlich explikative Einführungen an; und alle Kandidaten können auf ein bewegtes Vorleben zurückblicken. Die besondere Aufmerksamkeit gilt den explikationsanbahnenden Tätigkeiten (12.).

Ein eher theoretisch ausgelegtes Kapitel nimmt die bereits bei der Errichtung der sprachphilosophischen Plattform hergestellten Verbindungen zwischen Wahrheit und Bedeutung neuerlich auf. Zunächst sind die Vorfragen zur Wahrheit zu beantworten: Wovon sagt man wie, es sei wahr bzw. falsch? Was sind die Kriterien, Bedingungen, Definitionen, Regeln der Wahrheit und wie ist ihr Zusammenhang zu beschreiben? Sodann stehen die Hauptfragen an: Inwieweit wird mit den Wegen des alethischen Vollzugs die Bedeutung von Ausdrücken fixiert, und umgekehrt? Nach welchen Prinzipien hat die Bedeutungsfixierung resp. die Festlegung der Wahrheitsbedingungen zu erfolgen? – Vor diesem Szenario werden dann die Begriffe des lebens- und sonderweltlichen Erkennens resp. Wissens porträtiert. Damit ergibt sich auch der Grund zu den wissenschaftsphilosophischen Erörterungen der Folgekapitel (13.).

Die analytisch-strukturellen Wissenschaften werden an einer gebräuchlichen, umfassenden, gut entwickelten und untersuchten Klassensprache, jener von Neumann, Bernays und Gödel mit Urelementen (= NBGU) exemplifiziert. In Rechtfertigung der axiomatischen Basis wird dabei ein Faden aufgenommen, der bereits mit der Erörterung der Stufenerhöhung in der

Rationalen Grammatik (↑3.3.3) ausgelegt und an mehreren Stellen (↑6.) weitergesponnen worden ist. Die Entwicklung von NBGU erfolgt kursorisch; hervorgehoben wird die Tatsache, daß derartige Klassensprachen die Rolle übernommen haben, die vordem der „Allgemeinen Metaphysik“ („metaphysica generalis“) zugewiesen worden ist (14.).

Philosophische Anstrengungen umfassen gewöhnlich drei Phasen: den heuristisch-assoziativen Anfang, die Festigung und gegebenenfalls Korrektur der Startintuitionen durch Beispiele und schließlich die begriffliche Bearbeitung. Mit der Konstruktion und dem Gebrauch von NBGU soll bezüglich der analytisch-strukturellen Wissenschaften Präsenz in der zweiten Phase dokumentiert werden. Um dieses Ziel auch für die empirisch-synthetischen Wissenschaften zu erreichen, wird eine Zeitsprache konstruiert und gebraucht; auf der Herausstellung des empirischen Gehaltes und damit der speziellen Ausgestaltung der operationalen Bedeutungsfestlegung liegt besonderes Gewicht (15.).

Der vorliegende Text ist, wie oben erläutert (↑1.2), eine Vorschule der Philosophie im Sinne des objektiven wie des subjektiven Genitivs. Im Schlußkapitel werden beide Fälle zusammengeführt, indem das Erarbeitete auf philosophische Problemstände Anwendung findet. Überdies steht die in den vorangehenden Kapiteln nur rhapsodisch aufgegriffene Wozu-Frage, die Frage nach Sinn und Zweck der Philosophie, zur abschließenden Beantwortung an. Es liegt nahe, in diesem Kontext einige prinzipielle Überlegungen zu Funktion und Form sowie Gliederung und Aufbau der Philosophie vorzulegen; dabei läßt sich auch der Beschäftigung mit der Geschichte der Philosophie ihr Platz anweisen (16.).

1.3.2 Arbeitshinweise

Die vorliegende Vorschule bietet die systematische Entfaltung <u>einer</u> (sprach)philosophischen bzw. logischen Position. Sie zielt <u>nicht</u> auf eine umfassende Darstellung des gegebenen Konzeptionenspektrums, weder in dia- noch in synchroner Rücksicht. Die systematischen Darlegungen werden auch <u>nicht</u> historisch-kritisch angebahnt oder begleitet: Es finden sich also auch keine Auseinandersetzungen mit anderen Ansätzen.

Damit soll die positive und negative historische >Vermittlung< der dargelegten Position keineswegs geleugnet werden: Wie jede philosophische Auffassung ruht sie auf ganzen Traditionsketten und setzt sich – mit Gründen – von anderen Auffassungslinien ab (↑16.). Für Hörer/Leser, die an einer externen Lokalisierung des Dargelegten interessiert sind, bedeutet das, daß sie die hier nicht gebotenen Kenntnisse <u>anderweitig</u> erwerben müssen. Die am Ende

der Kapitel angefügten Literaturlisten geben diesbezüglich erste Hinweise auf alternative Positionen und auf einschlägige Kontroversen.

Im Zentrum der Arbeit steht die Lektüre des Textes und – insbesondere – die sorgfältige Lösung der Übungsaufgaben. Die Leserin muß die Beobachterperspektive zugunsten der Teilnehmerperspektive verlassen; wer sich in absehbarer Zeit seines Verstandes „ohne Leitung eines anderen“ bedienen will, muß sich zunächst – unter Leitung von anderen – üben. Die Bearbeitung der Übungsaufgaben hat schriftlich zu erfolgen. Philosophieren ist eine Tätigkeit, die unter dem Verschriftlichungsschock steht: Was sich mündlich oder >in Gedanken< recht plausibel anhört und dem Autor (und oft genug auch seinen Zuhörern) als ausgesprochen leicht darstellbar und auch erfaßbar erscheint, verliert rapide an Plausibilität, wenn es Schritt für Schritt zu Papier gebracht wird; schon dieser Vorgang ist überaus schmerzhaft. Die nochmalige zeitversetzte Lektüre enthüllt dann meist weitere Schwächen des (ersten) schriftlichen Versuchs.

Die Lösung einer Aufgabe wird im übrigen nicht dadurch zu Papier/auf den Bildschirm gebracht, daß man sich Stichworte notiert – obwohl das oft ein erster Schritt sein wird. Sie besteht vielmehr in der satzhaften Ausformulierung! Wer sich hier das Motto “Das große Werk ist getan, der Rest wird sich finden.“ zu eigen macht und auf die detaillierte Ausformulierung verzichtet, ist auch schon aus dem philosophischen Geschäft ins Lager der Assoziierer und Schwadronierer gewechselt. – Auch alle bei der Lektüre entstehenden Fragen sollten selbstredend eine schriftliche Fassung finden: Erst dadurch wird dem Fragesteller in aller Regel klar, was bzw. wonach er fragt oder was er tun muß, um klarzulegen, wonach er fragt.

Vorschulen lassen sich nicht axiomatisieren. Wäre dies möglich, so wären sie für Einsteiger, also für ihre eigentlichen Adressaten, nicht mehr absolvierbar. Als bewältigbare Aufgabe leben sie in extremer Weise von Vor- und Rückgriffen; und häufig genug muß Plausibilität bittweise unterstellt und die Leserin um Geduld ersucht werden. Ohne die verständige und wohlwollende Mitarbeit der Adressaten gelangt man nicht einmal auf den Weg, geschweige denn zum Ziel. – Um die ersten Erfolgserwartungen auf realistischem Boden zu halten, ist ferner festzuhalten, daß der Erwerb logischer Fertigkeiten eher dem Violin- als dem Klavierlernen gleicht: Man hat eine längere Durststrecke zu bewältigen, ehe sich erste Erfolge einstellen.

Im übrigen – und davor kann keine noch so ausgeklügelte pastorale Veranstaltung den Leser bewahren – ist auch der Eintritt in die philosophische Vorschule ein Sprung in den philosophischen See; und diesbezüglich greift der Slogan dieses Kapitels: „Es gibt keine elementare Philosophie. Der philosophische See hat keine flachen Ufer“.

1.4 Literatur

Dummett, M.: Ursprünge der analytischen Philosophie; Frankfurt/Main 1988.

Dieses Werk entwickelt die Idee des „linguistic turn“, und damit den Gedanken einer methodenliefernden Sprachphilosophie, aus ihren (näheren) historischen Wurzeln (Husserl, Frege, Brentano); empfehlenswert nicht nur als historisch-kritische Ergänzung zu 1.2. Dummett ist auch eine Leitfigur des konstruktiven Philosophierens.

Føllesdal, D./Walle, L./Elster, J.: Rationale Argumentation. Ein Grundkurs in Argumentations- und Wissenschaftstheorie; Berlin/New York 1988 [O: Argumentasjonsteori og vitenskopsfilosofi; Oslo 1977]

Empfehlenswert insbesondere wegen der wissenschaftsphilosophischen Kapitel III – VI, die eine gute Ergänzung zu den Kapiteln 13-15 darstellen. Die Stoffgliederung ist allerdings eher rhapsodisch: Sie folgt keinem (erkennbaren) einheitlichen Leitfaden.

Kamlah, W./Lorenzen, P.: Logische Propädeutik. Vorschule des vernünftigen Redens; Mannheim 1996[3].

Der deutschsprachige Propädeutikklassiker ist zum einen empfehlenswert für ein geistes- bzw. kulturwissenschaftlich orientiertes Publikum: Die „Einleitung“ entwickelt für dieses Klientel in einfühlsamer Weise den Gedanken der Ersten Philosophie; hier finden sich auch überzeugende Ausführungen zur Abkehr von der „Bildungssprache“, d.h. zur Abkehr von der philosophischen Normalität. Das Werk entwickelt, obwohl in eher intuitiver Manier, zum anderen (fast) den Gesamtstoff dieses Kurses. – Zur näheren Rezeption nicht empfehlenswert ist die im letzten Kapitel entwickelte dialogische Logik: Diese besitzt kaum Kontakt zur diskursiven Praxis, insbesondere nicht zum dialogischen Teil derselben.

Kraml, H.: Sprachphilosophie I und II (Vorlesungstyposkript S 92/93 und SS 93 an der Geisteswissenschaftlichen Fakultät der Universität Innsbruck)

Kraml behandelt die Themen des vorliegenden Kurses aus einer ähnlichen philosophischen Grundeinstellung, folgt aber einer anderen didaktischen Konzeption. Er legt ein Musterbeispiel klarer und verständlicher philosophischer Prosa auf einem informellen Darstellungsniveau vor. Der gesamte erste Teil ist insofern komplementär, als dort eine Erklärung der Sprachgenese vorgelegt wird.

Lorenzen, P.: Methodisches Denken; Frankfurt/Main 1974.

Lorenzen, P.: Konstruktive Wissenschaftstheorie; Frankfurt/Main 1974

Im ersten Sammelwerk sind die Beiträge „Collegium Logicum“ (S.7-23), „Methodisches Denken“ (S.24-59), „Logische Strukturen in der Sprache“ (S.60-69) sowie „Logik und Grammatik“ (S.70-80) einschlägig. Aus dem zweiten Sammelband sind insbesondere die Essays „Logik und Hermeneutik“ (S.11-21) sowie „Regeln vernünftigen Argumentierens“ (S.47-97) zu empfehlen. Alle Texte stellen vorzügliche Werbungen für die methodische Einstellung dar.

Rosenberg, J.F.: Philosophieren. Ein Handbuch für Anfänger; Frankfurt/m. 1986 [O: The Practice of Philosophy. A Handbook for Beginners; Englewood Cliffs New Jersey 1984]

Rosenberg entfaltet – wie der vorliegende Text – eine ausdrücklich handwerkliche Auffassung der Philosophie, die insbesondere in den Kapiteln 5-11 als Ergänzung zu den hier bereitgestellten Instrumenten benutzt werden kann, um die Distanz zur philosophisch üblichen Arbeit zu überbrücken.

Stegmüller, W.: Hauptströmungen der Gegenwartsphilosophie I; Stuttgart 1989[7].

Stegmüller, W.: Hauptströmungen der Gegenwartsphilosophie II; Stuttgart 1987[8].

Stegmüller gilt zu Recht als ausgezeichneter Darsteller analytischer Positionen und Autoren. Beide Werke sind zur Beleuchtung des historischen Hintergrunds bzw. der begleitenden Debatten der im Kurs entfalteten Auffassung hilfreich: In „Hauptströmungen I“ sind die Kapitel IX bis XI zu empfehlen, „Hauptströmungen II“ ist als Ganzes einschlägig.

Tugendhat, E.: Vorlesungen zur Einführung in die sprachanalytische Philosophie; Frankfurt/Main 1987[4].

Die „Vorlesungen“ eignen sich vor allem für Leser, die von klassischen philosophischen Problemstellungen herkommen und sich die Frage vorlegen, warum sie sich eine sprachphilosophische Zugriffsweise aneignen sollen; der gesamte I. Teil ist der Auseinandersetzung mit dem seins- und bewußtseinsphilosophischen Paradigma und damit genau dieser Frage gewidmet.

Tugendhat, E./ Wolff U.: Logisch-semantische Propädeutik; Stuttgart 1986.

Tugendhat und Wolff vollbringen in einem kleinen Text ein didaktisches Meisterwerk, indem sie Hauptthemen der Sprachphilosophie und (Philosophie der) Logik in leicht nachvollziehbarer Weise darstellen. Das Werk zeigt auch, wie historisch-kritische Bildung der sachlich-

systematischen Arbeit dienlich gemacht werden kann: Die schlußendlich bezogene Position wird in der Regel am historisch kritischen Durchgang entwickelt.

2. Das Rahmenwerk: Rede – Sprache – Wahrheit – Bedeutung 39

2.1 Die Redehandlung und ihre Momente 39

2.1.1 Redehandlungen: Exemplarische Erläuterungen 40

2.1.2 Performatives versus propositionales Moment 41

2.1.3 Performatives und propositionales Moment im scheiternden Verstehen 43

2.1.4 Kategorisierung: Satz - Performator - Aussage 46

2.1.5 Standardform und Standardisierung 48

2.1.6 Teilhandlungen von Redehandlungen: Performation und Proposition 49

2.1.7 Sequenzen aus Redehandlungen 51

2.2 Sprache: Einheit aus Performatorik und Grammatik 53

2.2.1 Die Unbeliebigkeit im Verhältnis von Performation und Proposition 53

2.2.2 Regeln für Redehandlungen 54

2.2.3 Sprache: Einheit aus Performatorik und Grammatik 55

2.2.4 Tätigkeiten bezüglich einer Sprache 57

2.3 Redehandlungen in ihrer Umgebung 60

2.3.1 Redeagenten: Autor - Adressat - Rezipient 60

2.3.2 Die Sprachgemeinschaft 62

2.3.3 Praetext - Posttext - Kontext 63

2.3.4 Situation und Umgebung 64

2.3.5 Zur Bewältigung der Umgebungssensitivität 65

2.4 Vorblick: Wahrheit und Bedeutung 66

2.4.1 Wahrheit: Zum >Sitz im Leben< 67

2.4.2 Wahr- und Falschperformation 69

2.4.3 Wahr- und Falschheitskriterien 71

2.4.4 Wahr- und Falschprädikation 71

2.4.5 Wahr- und Falschheitsdefinition 73

2.4.6 Wahrheit und Bedeutung: Exemplarisches 74

2.4.7 Wahrheit und Bedeutung: Begriffliches 76

2.5. Literatur 78

Die Bedeutung eines Wortes ist sein Gebrauch in der Sprache.
...
Zwei Wörter haben dieselbe Bedeutung, wenn für ihre Verwendung dieselben Regeln gelten.

Ludwig Wittgenstein

2. Das Rahmenwerk: Rede – Sprache – Wahrheit – Bedeutung

Das zweite Kapitel legt in intuitiv-exemplarischer Weise den Gesamtansatz dar. Es soll deutlich werden, daß es sich lohnen könnte, den angedeuteten Weg zu beschreiten. Detaillierte begriffliche Arbeit ist dazu weder nötig noch dienlich. Sie wäre überdies auch nicht möglich: Die zu einem solchen Unternehmen benötigten (Rede)Mittel können erst nach und nach bereitgestellt werden.

Zunächst ist zu verdeutlichen, Handlungen welcher Art die Redehandlungen darstellen und aus welchen Momenten sie aufgebaut sind (2.1). Sodann ist darzutun, daß der Vollzug von Redehandlungen keine Angelegenheit freihändiger Beliebigkeit darstellt, sondern unter Regeln steht, die gemeinsam die jeweilige Sprache bilden (2.2). Redehandlungen finden in einer Umgebung statt; die Umgebungsfaktoren, wie etwa Autor, Adressat, Kontext und Situation, sind kenntlich zu machen (2.3). Endlich kann kursorisch erläutert werden, wie von dieser Plattform aus Wahrheit und Bedeutung, die >vornehmen< Themen der Theoretischen Philosophie, erreichbar sind (2.4).

2.1 Die Redehandlung und ihre Momente

Zunächst ist über Beispiele ein Vorverständnis bezüglich der Redehandlungen herzustellen (2.1.1), an denen sich sodann zwei Momente, ein performatives und ein propositionales, unterscheiden lassen (2.1.2). Diese Differenzierung wird gefestigt anhand des scheiternden Verstehens (2.1.3). Wenn an Redehandlungen zwei Momente unterscheidbar sind, dann sollte man dafür bei den Redemitteln eigene grammatische Kategorien bereithalten, Performator und Aussage, die dann Teilausdrücke des jeweiligen Satzes darstellen (2.1.4). Um die aufs Prinzipielle zielenden Überlegungen von gebrauchssprachlichen Zufälligkeiten und Besonderheiten frei zu halten, ist sodann eine Standardform des Satzes zu etablieren (2.1.5). Die Unterscheidung von Teilausdrücken des Satzes wird durch die Unterscheidung von Teilhandlungen der Redehandlung, von Performation und Proposition, parallelisiert (2.1.6). Redehandlungen können ihrerseits in endliche Folgen aus Redehandlungen eingehen; derartige Sequenzen sind abschließend zu betrachten (2.1.7).

2.1.1 Redehandlungen: Exemplarische Erläuterungen

Durch den Vollzug geeigneter Redehandlungen kann man z.B. eine These aufstellen, um eine Gefälligkeit bitten, die Unterlassung einer Handlung anraten, bislang in Abrede Gestelltes einräumen, jemanden zu etwas ernennen, einen Schluß ziehen, eine Mitteilung machen, etwas auf Indizien gestützt vermuten, ein Vorhaben untersagen, ein Problem aufwerfen, sich für einen faux-pas entschuldigen, eine Auskunft geben – und anderes mehr!

Die Vielfalt der Redehandlungsmöglichkeiten und der damit realisierbaren Ziele ist Teil des Variantenreichtums des Handlungsspektrums und der handelnd verfolgten Zwecke im allgemeinen: Wer redet, der handelt; und Redehandlungen sind mit den sonstigen, den nichtsprachlichen Vollzügen in mannigfacher Weise verflochten. Hand- und Mundwerk bilden gemeinsam den Lebensvollzug. Zugleich kann das Redehandeln in die Rolle des >Spiegels< für Handlungen jedweder Sorte treten: Denn redend lassen sich Akte aller Art zum Thema machen. Nicht zuletzt können die Redehandlungen selbst als Gegenstand von Redehandlungen auftreten. Auf dieser Möglichkeit beruhen die hier vorgetragenen Überlegungen.

Die angefangene Reihe der Beispiele für Redehandlungen dürfte von sich aus zur Fortsetzung anregen und Sicherheit bei der Anlage einer Liste mit Gegenbeispielen geben:

Ü1 a) Zählen Sie weitere Redehandlungen auf.

b) Nennen Sie Handlungen, die keine Redehandlungen sind.

A fortiori sind alle Gegebenheiten, die keine Handlungen sind, auch keine Redehandlungen. Weniger offensichtlich ist die Antwort auf die Frage, Gebilde welcher Art Redehandlungen näherhin darstellen, aus welchen Teilen sie zusammengesetzt sind, welche Zwecke mit ihnen gewöhnlich verfolgt werden, welche Rolle sie in Handlungssequenzen spielen usf. Auch hier ist von Beispielen auszugehen: Indem ein Autor die unter [1] notierten Zeichenverbindungen äußert, vollzieht er – bei geeigneter Umgebung – jeweils eine Redehandlung:

[1] a) Es gilt, daß niemand sein eigener Vater ist.

b) Ich empfehle die Beendigung der Lektüre dieses Machwerks!

c) Trifft es zu, daß alle Philosophen Vampire sind?

d) Bitte ein Bit!

Im einzelnen wird, eine passende Äußerungsumgebung unterstellt, eine Behauptungs-, eine Empfehlungs-, eine Frage- und eine Bitthandlung vollzogen.

2.1.2 Performatives versus propositionales Moment

An Redehandlungen lassen sich zwei Momente, ein performatives und ein propositionales, unterscheiden: Wer a) äußert, stellt – bei passender Umgebung – eine Behauptung auf (performatives Moment); behauptet wird dabei, daß niemand sein eigener Vater ist (propositionales Moment). Der Autor drückt das performative Moment durch Verwendung von ‘Es gilt’ aus, bei der (hier immer schriftsprachlichen) Äußerung unterstützt vom Punkt ‘.’. Das propositionale Moment findet durch die Ausdruckseinheit ‘daß niemand sein eigener Vater ist’ Mitteilung. – Wer b) äußert, empfiehlt (performatives Moment), die Lektüre dieses Machwerks einzustellen (propositionales Moment). Zum Ausdruck des performativen Momentes dient ‘Ich empfehle’, sekundiert vom Ausrufezeichen ‘!’. Das propositionale Moment wird durch die Zeichenverbindung ‘die Beendigung der Lektüre dieses Werks’ übermittelt. – Wer c) äußert, wirft eine Ob-Frage auf (performatives Moment); erfragt wird dabei, ob die Eigenschaft des Vampirseins allen Philosophen zukommt (propositionales Moment). Zum Ausdruck des performativen Moments dient die Wendung ‘Trifft es zu’ in Verbindung mit dem Fragezeichen ‘?’. Das propositionale Moment findet durch die Zeichenverbindung ‘daß alle Philosophen Vampire sind’ Übermittlung. – Wer d) äußert, gibt einer Bitte Ausdruck (performatives Moment), in der schriftsprachlichen Realisierung durch ‘Bitte’ und ‘!’ signalisiert; gebeten wird dabei um einen unter Kennern geschätzten Gerstensaft (propositionales Moment). Der Inhalt der Bitte wird durch Verwendung der Wortreihe ‘ein Bit’ übermittelt.

In der folgenden Tabelle findet sich die Zeichenverbindung für das performative Moment unterstrichen, die Ausdrücke für das propositionale Moment erscheinen normal:

[1]* a) Es gilt, daß niemand sein eigener Vater ist.

b) Ich empfehle die Einstellung der Lektüre dieses Machwerks!

c) Trifft es zu, daß alle Philosophen Vampire sind?

d) Bitte ein Bit!

Ü2 Vergegenwärtigen Sie sich weitere Zeichenverbindungen, durch die bei passender Umgebung Redehandlungen vollzogen werden können, und führen Sie eine analoge Zergliederung in performatives und propositionales Moment durch!

Bei unverfänglicher und >normaler< Verwendung des Ausdrucks ‘meinen’ (↑2.1.3) läßt sich das exemplarisch Vorgeführte allgemein so formulieren: Mit der Zeichenverbindung für das performative Moment zeigt der Autor an, wie, in welchem Modus, mit welcher Kraft er den Inhalt meint. Mit der Wortreihe für das propositionale Moment läßt er den Rezipienten wissen, was er meint, was der Ge- bzw. Inhalt des in dem und dem Modus Gemeinten ist.

Spricht man, wie oben geschehen, die durch Äußerung von a),...,d) vollzogenen Redehandlungen als Behauptung, Empfehlung, Frage und Bitte an, so legt man dabei das performative Moment zugrunde. Die gesamte Redehandlung wird im Ausgang vom performativen Moment charakterisiert. Differenzierungen im propositionalen Moment machen es möglich, Redehandlungen auch von dorther unterscheidbar zu machen, z.B. als elementare, konjunktive oder universalquantifizierende Redehandlung (↑3.2.3).

Performatives und propositionales Moment verweisen aufeinander. Auf die – nicht durch Umgebungsfaktoren ergänzbare - Verlautbarung von ‘Ich empfehle’ wird ein Rezipient allenfalls mit der Äußerung von ‘Was empfiehlst Du denn nun?’ reagieren. Umgekehrt kann auf die – wiederum nicht aus der Kenntnis der Umgebung zu vervollständigende – Mitteilung von ‘daß niemand sein eigener Vater ist’ die Gegenfrage nur lauten, wie in aller Welt dies denn gemeint sei. Beide Fragen zielen auf die Komplettierung des vorliegenden Redehandlungsfragments. Erst wenn sowohl performatives als auch propositionales Moment vorliegen, kann der Rezipient eine Verstehensleistung erbringen und auf dieser Basis in qualifizierter Weise reagieren, indem er, um in den Beispielen zu bleiben, der Behauptung zustimmt oder sie bestreitet und der Empfehlung folgt oder sie unbeachtet läßt.

Insofern erst die Gegebenheit beider Momente eine qualifizierte Reaktion – und nicht nur ein Nachsetzen bezüglich Modus oder Inhalt – erlaubt, bildet die Redehandlung bzw. das Geäußerte eine vollständige und eigenständige Kommunikationseinheit; da sich intuitiv keine kleineren Kommunikationseinheiten mit dieser Eigenschaft auszeichnen lassen, ist auch die Rede von der kleinsten vollständigen Kommunikationseinheit berechtigt: Eine Redehandlung stellt einen eigenständigen „Zug im Sprachspiel“ (Wittgenstein) dar.

2.1.3 Performatives und propositionales Moment im scheiternden Verstehen

Ein Rezipient versteht nach dem Ausgeführten eine Redehandlung bzw. das Geäußerte nur dann vollständig, wenn er beide Momente versteht, wenn er also versteht, in welchem Modus der Autor welchen Gehalt meint. - Entsprechend sind auch beim scheiternden Verstehen eine performative und eine propositionale Komponente zu unterscheiden: Das vollständige Verstehen der gesamten Redehandlung scheitert schon dann, wenn eines der beiden Momente nicht verstanden wird.

In einem groben Zugriff werden zwei Formen scheiternden Verstehens unterscheidbar: das Nichtverstehen bzw. – resultativ gesehen – das Unverständnis und das Mißverstehen bzw. – in Ergebnissicht – das Mißverständnis. Der in einem Mißverständnis befangene Rezipient geht irrigerweise davon aus, daß sein Verstehensversuch gelungen ist – und vollzieht (sprachliche und nichtsprachliche) Folgehandlungen auf der Basis seines nicht bemerkten Scheiterns bzw. seines nur gewähnten Verstehens. Der von Unverständnis geschlagene Rezipient weiß um sein Scheitern und kann seinen Zustand durch gezieltes Rückfragen zu verbessern suchen. Das Nichtverstehen von performativem und propositionalem Moment schlägt sich in verschiedenen Typen von Rückfragen nieder. Mit Fragen wie ‘Wie meinst Du das?’, ‘Welches ist der Modus Deiner Äußerung?’ oder (spezieller) ‘Ist das als eine Behauptung oder lediglich als eine Vermutung zu verstehen?’, ‘Ist das eine Bitte oder aber ein Befehl?’ kann der (nun die Rolle des Autors übernehmende vormalige) Rezipient versuchen, seinen Mangel an Verständnis bezüglich des performativen Momentes zu beheben.

Mit Fragen wie ‘Was meinst Du eigentlich?’ oder (spezieller) ‘Soll das eine universale Aussage sein oder nicht?’, ‘Was hat man unter diesem Teilausdruck zu verstehen?’ läßt sich propositionales Unverständnis artikulieren. Beispiel: In einer Debatte über landsmannschaftliche Eigenarten äußert ein Autor die Ausdrucksverbindung ‘Der Bayer ist königstreu’. Hier lassen sich leicht Umstände ausdenken, in denen man mit ‘Ist das eine Vermutung oder eine Behauptung?’ sein performatives Unverständnis artikulieren kann, während man mit ‘Meinst Du wirklich alle Bayern oder nur alle typischen Bayern oder viele Bayern oder genügen schon ein paar Hundert’ sein propositionales Unverständnis zum Ausdruck bringen kann, das in diesem Falle genauer ein Unverständnis bzgl. der quantitativen Verhältnisse ist. Der so befragte Autor kann durch Antworten wie ‘Es handelt sich lediglich um eine Vermutung’ und ‘Eigentlich meine ich nicht alle, sondern nur die meisten Bayern’ die vorgebrachten Verständniswünsche – wenigstens vorläufig - befriedigen. Durch diese Erläuterungen wird zugleich deutlich, welche Leistung zu erbringen ist, um die Redehandlung als korrekte oder inkorrekte ansprechen zu können (↑2.2).

Ü3 Fingieren Sie Redeumgebungen, d.h. denken Sie sich Redeumgebungen aus, die Anlaß zu performativem und propositionalem Unverständnis geben, und formulieren und beantworten Sie verständnissuchende Fragen!

Sind es beim Unverständnis die verschiedenen Frage(type)n, die die Unterscheidbarkeit von propositionalem und performativem Moment verdeutlichen, so sind beim Mißverstehen allein die Folgehandlungen des Rezipienten, Redehandlungen und andere, aufschlußreich, um der Unterscheidung von performativem und propositionalem Moment weitere Plausibilität zu verleihen. Wer z.B. eine strenge Begründung fordert, wo nur der Aufweis von Indizien angezeigt ist, mißversteht eine Vermutung als Behauptung. Wer eine auszuführende Handlung bedenkenlos und mit bestem Gewissen unterläßt, mißversteht ein Gebot als Empfehlung. – Wer hingegen auf die Äußerung von 'Der Bayer ist königstreu', aufgefaßt als 'Die meisten Bayern sind königstreu', in widerlegender Absicht mit Hinweis auf einen gewissen Franz reagiert, der, obwohl Bayer, bekennender Antiroyalist ist, mißversteht eine Fast-alle-Quantifikation als strikte Universalaussage.

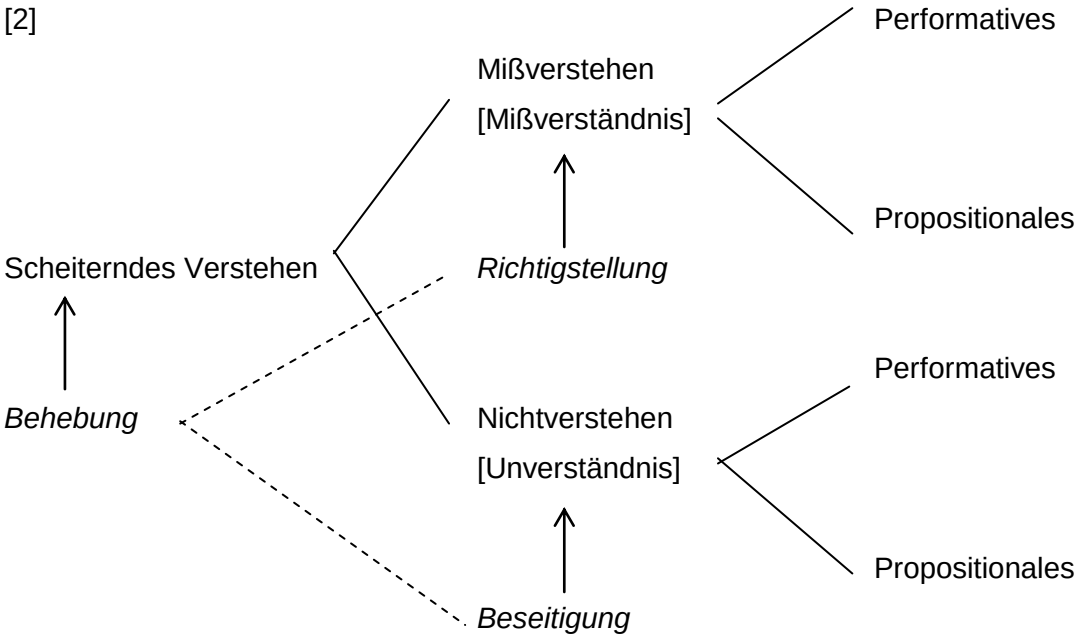
Ü4 Fingieren Sie Redehandlungen und Umgebungen, die Anlaß zu performativem und propositionalem Mißverständnis geben, und beschreiben Sie Folgehandlungen, an denen das performative und propositionale Mißverständnis abzulesen ist!

Wer die Verständlichkeit seiner Rede garantieren möchte, um so dem Scheitern des Verstehens und allen Folgemißständen vorzubeugen, wird sie so gestalten, daß beide Momente den Adressaten leicht erkennbar sind: Er wird seine Redehandlungen <u>performativ</u> und <u>propositional</u> für den je intendierten Adressaten zugänglich vollziehen.

Bei der Behebung des scheiternden Verstehens, d.h. bei der <u>Verständnisherstellung</u> – sowohl bei der <u>Richtigstellung eines Mißverständnisses</u> als auch bei der <u>Beseitigung von Unverständnis</u> – spielen Redehandlungen wiederum eine wesentliche Rolle. Artikuliert ein Rezipient sein Verständnis einer Redehandlung oder einer Redehandlungssequenz oder kommentiert ein Autor aus gegebenem Anlaß seine Vollzüge, dann legen sie – redend – eine <u>Interpretation</u>, eine <u>Deutung</u> von Handlungen bzw. Handlungsresultaten vor. Die Vokabeln 'meinen' und 'sagen' sowie ihre Ableitungen werden – vor jeder philosophischen Spezialuntersuchung – eingesetzt, wenn es um die Artikulation von scheiterndem Verstehen und um die Verständnisherstellung zu tun ist. Auch in der Miß- und Unverständnisprophylaxe haben sie ein wichtiges Einsatzfeld.

Die Ausführungen zum scheiternden Verstehen von Redehandlungen bzw. des in Redehandlungen Geäußerten lassen sich in folgendem Schaubild wiedergeben:

[2]



Weitere Differenzierungen im propositionalen Moment erlauben entsprechende Unterscheidungen des scheiternden Verstehens, wie etwa das prädikative, nominative oder quantorale Miß- oder Unverständnis, die später gemeinsam mit dem jeweiligen Redeteil behandelt werden. – Verstehen als Leistung des Adressaten bzw. Rezipienten ist keine Angelegenheit des Alles oder Nichts, sondern stets eine des Mehr oder Weniger. Das ergibt sich schon aus dem arbeitsteiligen Charakter der Rede (↑2.3.2). Wer eine komplexe Aussage beweisen kann, hat sie sicherlich in einem vollkommenen Sinn verstanden. Aber auch diejenige, die einen Teil des Beweises liefern kann und den Rest versteht, hat ein gerütteltes Maß an Verständnis der behaupteten Aussage vorzuweisen; und – der Leser möge das Spektrum vervollständigen – auch der, der das logische Gerüst der Aussage in dem Sinn kennt, daß er in vielen Kontexten mit den verwendeten logischen Redeteilen umgehen kann, hat ein Verständnis der Aussage vorzuweisen, wenn auch kein vollständiges.

Eine Zweideutigkeit ist an dieser Stelle zu markieren: Ein Gebilde kann unverständlich in einem adressatenbezogenen subjektiven und einem sprachbezogenen objektiven Sinne sein: Was für diesen oder jenen Rezipienten unverständlich ist, braucht diesen Zug für andere Rezipienten keineswegs aufzuweisen. Ist ein Gebilde objektiv unverständlich – hier soll hinfort der Ausdruck ‘unverstehbar’ benutzt werden – kann kein verstehensbemühter Agent zu einem Verständnis kommen: Wenn etwa Gebilde gegen semantische oder grammatische Regeln verstoßen, also bedeutungslos oder nicht wohlgeformt sind, sind sie als unverstehbar anzusprechen.– Der Aufweis von Verstehbarkeitsillusionen zählt zu den zentralen kritischen Aufgaben der Philosophie (↑16).

2.1.4 Kategorisierung: Satz – Performator – Aussage

Bislang war bezüglich des Geäußerten undifferenziert von Ausdrücken, Ausdrucksverbindungen, Redemitteln usf. die Rede. Wenn es jedoch plausibel ist, an Redehandlungen zwei Momente zu unterscheiden, dann sollte man bezüglich der Redemittel für beide Momente eine eigene grammatische Ausdruckskategorie bereitstellen.

Zum Ausdruck des performativen Anteils diene der Performator; die Wendungen ‘Es gilt’ und der Punkt ‘.’, ‘Ich empfehle’ und das Ausrufezeichen ‘!’, ‘Trifft es zu’ und das Fragezeichen ‘?’, ‘Bitte’ und das Ausrufezeichen ‘!’ fungieren in den Beispielen als Performatoren, und zwar als Behauptungs-, Empfehlungs-, Frage- und Bittperformator. – Um ganz allgemein über Performatoren sprechen zu können, wird im weiteren das große griechische Xi (Ξ) als Mitteilungszeichen verwendet; statt von Performatoren ist in der Literatur gelegentlich auch von Modifikatoren oder Illokutionssignalen die Rede.

Zum Ausdruck des propositionalen Momentes diene die Aussage; die Wendungen ‘daß niemand sein eigener Vater ist’, ‘die Beendigung der Lektüre dieses Machwerks’, ‘daß alle Philosophen Vampire sind’, ‘ein Bit’ fungieren in unseren Beispielen als Aussage. Um ganz allgemein über Aussagen (später: über Formeln) sprechen zu können, werden im weiteren die großen griechischen Buchstaben Alpha (A), Beta (B), Gamma (Γ), Delta (Δ), nötigenfalls indiziert, verwendet .

Das insgesamt in einer Redehandlung Geäußerte soll ein Satz sein. Sätze sind demnach die unter [1] a),...,d) notierten Gebilde. Um über Sätze allgemein sprechen zu können, wird der große griechische Buchstabe Sigma (Σ) verwendet. Danach ist auch klar, daß Sätze Σ zusammengesetzt sind aus einem Performator Ξ und einer Aussage Γ. Umgekehrt sind Performatoren und Aussagen Teilausdrücke des Satzes. Mit Blick auf den Aufbau einer einheitlichen grammatischen Terminologie (↑3.) soll so gesprochen werden: Ein Satz Σ entsteht aus der Anwendung eines Performators Ξ auf eine Aussage Γ. –

Die hier geübte Verwendung von ‘Satz’ und ‘Aussage’ stimmt nicht mit den Gepflogenheiten in Linguistik und Sprachphilosophie überein. Generell werden diese und andere hier verwendete Vokabeln nicht von allen Autoren in gleicher Weise verwendet – ebenso wenig wie etwa der Ausdruck ‘Emotion‘ von Psychologen immer gleich gebraucht wird. Aus dieser terminologischen Lage folgt (unter normativen Zusatzprämissen) zweierlei: Ein Autor sollte den von ihm bevorzugten Gebrauch klar umreißen – und sich daran halten. Ein Adressat sollte die entsprechende Festlegung zur Kenntnis nehmen – und bei Lektüre nicht irgendein anderes Verständnis unterstellen!

Das Sprechen über sprachliche Gegebenheiten – Redehandlungen, Sätze, Ausdrücke, Aussagen usf. – erfolgt seinerseits stets in einer Sprache. Die Sprache, über die gesprochen

wird, ist die Objektsprache. Die Sprache, in der über die objektsprachlichen Gegebenheiten gesprochen wird, ist die Metasprache (zur jeweiligen Objektsprache). Wird ein einzelnes Zeichen zum Gegentand der Rede, dann werden häufig Anführungsnamen benutzt. Diese werden dadurch gebildet, daß man das jeweilige Zeichen in einfache Anführungszeichen setzt. Um allgemein über Zeichen einer bestimmten Sorte nachzudenken, verwendet man die jeweils erläuterten griechischen Buchstaben.

Denkt man sich den Performator als ein Gebilde, das durch die Aussage zu einem Satz ergänzt wird, dann liegt es nahe, diese Ergänzungsfähigkeit eigens zu signalisieren, indem man den Performator durch eine horizontale Linie als Anzeiger für eine Aussage ergänzt. Statt ‘Es gilt’ wäre also ‘Es gilt___‘ zu notieren. Ein Satz Σ entsteht dann dadurch, daß die durch den waagerechten Platzhalter angedeutete freie Stelle des Performators durch eine Aussage besetzt wird. Der Waagerechte dient auch im Fortgang als Anzeiger einer freien Stelle für Aussagen bzw. (allgemeiner) für Formeln. – Ersetzt man in einem Satz einen Performator resp. Aussage durch einen anderen Performator oder eine andere Aussage, so fällt das neu entstandene Gebilde wieder unter die Kategorie der Sätze.

Später werden die Performatoren unter die Operatoren subsumiert, die Aussagen unter die Operanden, die Sätze unter die Operata. Operata entstehen jeweils dadurch, daß Operanden an die n freien Stellen von Operatoren gesetzt werden bzw. daß Operatoren auf n Operanden angewendet werden; dabei ist n eine positive natürliche Zahl. – Die Performatoren sind dann als einstellige, aussagenbestimmende und satzerzeugende Operatoren zu charakterisieren (↑3.3.1). Sätze sind solche Operata, die ihrerseits nicht operandenfähig sind: Sie können nicht an freie Stellen irgendwelcher Operatoren treten.

Der Performator ist ein atomarer Ausdruck: Er ist nicht zerlegbar in Teilausdrücke, d.h. in solche Ausdrücke, die ihrerseits einer Kategorie der hier leitenden Grammatik angehören. Der Hinweis, der Performator ‘Trifft es zu’ bestehe doch immerhin aus drei wohlunterschiedenen Wörtern, erlaubt es, den Punkt zu verdeutlichen: Die uns geläufige traditionelle Grammatik >sieht< hier drei Wörter, wobei jedes einzelne Wort weiterer Bestimmung innerhalb dieser Grammatik fähig ist. So ist etwa ‘es’ ein unpersönliches Fürwort. Die im weiteren entfaltete Rationale Grammatik betrachtet die Wendung lediglich in ihrer Funktion als Ausdruck des performativen Moments; und diese Funktion nehmen die drei Worte gemeinsam wahr. Die Wendung ist demnach atomar und die drei Worte der traditionellen Grammatik werden nicht als Teilausdrücke, sondern als (unselbständige) Ausdrucksteile eines atomaren Ausdrucks >gelesen<; man mag sich dies zusätzlich markieren, indem man die einzelnen Wörter von ‘Trifft es zu’ durch Bindestriche zusammenfaßt. Insgesamt ergibt sich dann: ‘Trifft-es-zu__’ (↑3.3.1). Diese Verbindungstaktik zur Signalisierung der Atomarität soll in der Folge beibehalten werden.

Die Aussage ist stets ein molekularer Ausdruck. Sie ist zerlegbar in Ausdrücke, die ihrerseits wiederum Kategorien der hier veranschlagten Grammatik angehören, sie ist, umgekehrt formuliert, aus Teilausdrücken (und nicht bloß aus Ausdrucksteilen) aufgebaut. Die Aussage ‘Sokrates ist ein Vampir’ enthält z.B. den Eigennamen ‘Sokrates’ und den einstelligen Prädikator ‘..ist ein Vampir’ als Teilausdrücke. – Die Art des Aufbaus von Aussagen variiert nach dem gewählten Typ der Rationalen Grammatik (↑3.3.5).

2.1.5 Standardform und Standardisierung

Propositionales und performatives Moment finden in den Gebrauchssprachen, d.h. in der Alltagssprache, in der Bildungssprache, in den handwerklichen, wissenschaftlichen und sonstigen Fachsprachen, in vielfacher, in der Regel nur aus Umgebungsfaktoren zu ermittelnder Weise Ausdruck. So dienen verschiedene Performatoren dem Ausdruck desselben performativen Momentes, und ein Zeichen mag zur Übermittlung verschiedener performativer Momente taugen. Schrift- und lautsprachliche Realisierungen kennen diverse Varianten, und aus Gesten muß häufig sowohl der propositionale wie auch der performative Gehalt unter Zuziehung der Umgebungsfaktoren gewonnen werden: So mag ein Nicken als Zustimmung oder (in anderen Kulturen) als Ablehnung gedeutet werden; und dasjenige, dem zugestimmt wird, ergibt sich dem Rezipienten aus vorangehenden Verlautbarungen, dem Praetext. Ein besonders dramatisches Beispiel ist das Senken des Daumens durch den Cäsar.

Um bei prinzipiellen Betrachtungen – und um diese geht es vornehmlich - nicht an Zufälligkeiten der gebrauchssprachlichen Realisierung der Sätze gebunden zu sein, ist eine Standardform zu etablieren: Der Satz Σ wird so dargestellt, daß links der Performator Ξ und rechts die Aussage Δ notiert wird; die Gepflogenheit, den Operator links von seinen Operanden zu notieren, wird später beibehalten (↑3.2, 3.3).

[1]** Satz Σ

Performator Ξ	Aussage Δ
a) Es-gilt	niemand ist sein eigener Vater
b) Ich-empfehle	die Lektüre dieses Machwerks wird eingestellt
c) Trifft-es-zu	alle Philosophen sind Vampire
d) Ich-bitte	ich bekomme ein Bit

Die Satzzeichen sind getilgt; ebenso die Wendung ‘daß’. Die Überführung einer gebrauchssprachlichen Verlautbarung in die Standardform, die Standardisierung, muß als nichttriviale Aufgabe angesehen werden, die das zu standardisierende Gebilde mannigfachen Veränderungen unterwirft. – Ist man mit der Konstruktion einer Sprache (↑2.2.4) beschäftigt, dann wird man seine Festlegung so treffen, daß Sätze von vornherein dieser (oder einer anderen) Standardform genügen.

Die verschlungenen und in der Regel durch den Willen zu Kürze und Bequemlichkeit veranlaßten und insoweit auch rechtfertigbaren gebrauchssprachlichen Wege zur Realisierung der Momente einer Redehandlung führen gelegentlich, wenn auch nicht häufig, zu Irritationen, d.h. zu scheiterndem Verstehen, schon in der Redepraxis: Hier greifen die Mittel der Verständnisherstellung. Die elliptische Ausdrucksweise beirrt aber insbesondere die zugeordneten analytischen Bemühungen. Die Erläuterung der Umgebungsfaktoren gibt Gelegenheit, für den Umgang mit gebrauchssprachlichen Gebilden zwei Maximen zu formulieren (↑2.3.5). Die hermeneutischen Überlegungen (↑9.) sowie die Behandlung der Wahrheitsthematik geben später Anlaß zu entsprechenden Fallstudien (↑13.).

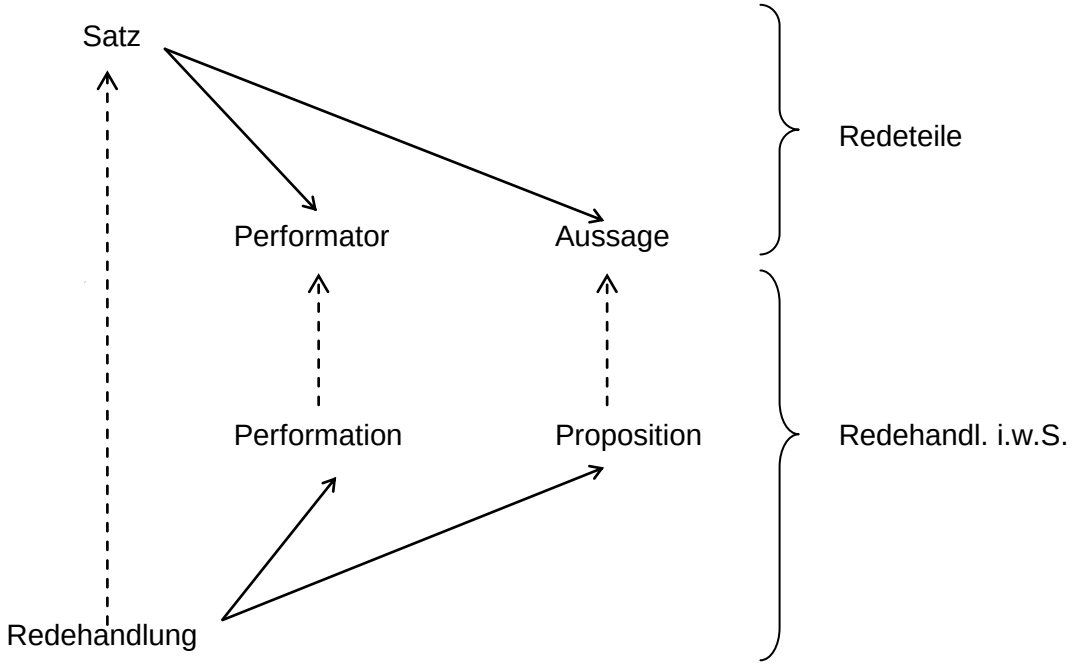
2.1.6 Teilhandlungen von Redehandlungen: Performation und Proposition

Verwendet ein Autor einen Satz Σ, dann vollzieht er eine Redehandlung. An einem Satz lassen sich, wie vorgeführt, Teilausdrücke unterscheiden: der Performator als Operator und die Aussage als Operand. Die in die Satzverwendung eingebettete Verwendung von Performator und Aussage soll entsprechend als Teilhandlung der gesamten Redehandlung angesprochen werden. Die Verwendung des Performators ist die Performation, die Verwendung der Aussage die Proposition. Die Proposition ist die Operandumhandlung, die Performation die

Operatorhandlung. – Der Ausdruck ’Proposition‘ findet hier in einem unüblichen Sinn Verwendung (↑13.).

Trifft man die unten ausgedehnte (↑2.1.7) terminologische Entscheidung, die Teilhandlungen von Redehandlungen und die Redehandlungen selbst den Redehandlungen im weiten Sinne zu subsumieren, dann ergeben sich folgende spiegelbildliche Zuordnungen zwischen dem Part der Redehandlungen i.w.S. und der Seite der Redemittel:

[3]



Der gestrichelte Pfeil ist so zu lesen: Die und die Redehandlungen i.w.S. werden vollzogen durch Verwendung der und der Redeteile. Der durchgezogene Pfeil indiziert den Aufbau des Pfeilursprungs aus den Pfeilenden.

Ebenso wie der Satz aus Perfomator und Aussage aufgebaut ist, zerfällt die Redehandlung in Performation und Proposition. Da der Performator einer atomaren Kategorie angehört, die Performation in der Verwendung des Performators besteht, ist die Performation eine atomare Teilhandlung. Da Aussagen einer molekularen Kategorie angehören, die Proposition in der Verwendung einer Aussage besteht, stellt sie eine molekulare Teilhandlung dar: Ebenso wie die Aussage in weitere Teilausdrücke zerfällt, ist die Proposition aus weiteren Teilhandlungen aufgebaut. Die (einfachste) elementare Aussage, z.B. ‘Sokrates ist ein Philosoph’ zerfällt in den einstelligen Prädikator ‘...ist ein Philosoph’ und den Nominator ‘Sokrates’; die Proposition ist entsprechend aus den Teilhandlungen der Prädikation, der Verwendung des Prädikators, und der Nomination, der Verwendung des Nominators, aufgebaut. – Die Teilhandlungen einer Redehandlung sind, wie die genauere Analyse von Regeln zeigen wird (↑4., 6., 7.), keine eigenständigen „Züge im Sprachspiel“.

2.1.7 Sequenzen aus Redehandlungen

Redehandlungen im Zuge intuitiver Näherung als kleinste vollständige Kommunikationseinheiten anzusprechen, verweist auf größere, umfassendere Komplexe. Dispute, Erzählungen, Verhöre, Gebete, Predigten, häusliche Streitereien, Abwägungen, Beratungen, Beweise, Argumentationen, Erklärungen und anderes mehr sind (unsortierte) Beispiele für derartige endliche Folgen, d.h. Sequenzen aus Redehandlungen; das dabei jeweils Geäußerte sind – gemäß der vorgenommenen Zuordnung – Satzsequenzen bzw. Texte. Die Glieder einer Redehandlungssequenz sind Redehandlungen; diese besitzen zwar Teilhandlungen, sind aber ihrerseits keine Teilhandlungen, sondern Glieder der Redehandlungssequenz. Redehandlungs- und Satzsequenzen sind einander eineindeutig zugeordnet; und Ausführungen über die eine Seite lassen sich mit Routineänderungen unschwer auf die andere übertragen.

Man betrachte z.B. die Redehandlung des Schließens/Folgerns (↑1.1.2): Autoren schließen, von Ausnahmen abgesehen, stets aus Aussagen auf eine (dann als Operand des Folgerungsperformators vorkommende) Aussage. Die Aussagen, aus denen man schließt, werden durch andere Redehandlungen, z.B. durch Annahmen, Anziehungen oder selbst wiederum Folgerungen als Prämissen bereitgestellt. Das Folgern ist demnach >naturgemäß< in Sequenzen von Redehandlungen eingebettet, ebenso wie das gerade erwähnte Annehmen oder Anziehen. Man betrachte – zweites Beispiel – eine Bezweifelung: Diese macht nur dann Sinn, wenn zuvor ein Autor eine starke oder schwache affirmative Redehandlung bezüglich der bezweifelten Aussage, z.B. eine Vermutung, vollzogen hat. Üblicherweise wird der Diskurs dann z.B. durch stützende Redehandlungen fortgeführt, auf die sich Zustimmungen oder weitere Bezweifelungen beziehen können.

Aus der Gesamtklasse der Redesequenzen werden später diejenigen ausgesondert, die ausschließlich kognitive Redehandlungen als Glieder haben, die Diskurse. Das Behaupten, Folgern, Vermuten, Dahinstellen, Fragen, Bestreiten sind kognitive Redehandlungen. Das Auffordern, Empfehlen, Versprechen, Erlauben, Verbieten sind Beispiele für nichtkognitive Redehandlungen. Insbesondere der Diskurstyp der Argumentationen wird exemplarisch studiert. Erklärungen, Dispute, Gedankenexperimente sind weitere Diskurstypen (↑8.). Diskurse können als Teilsequenz in Redesequenzen vorkommen, in denen auch nichtkognitive Redehandlungen gegeben sind: Man denke etwa an eine auf Empfehlungen abzielende Beratung, bei der zunächst durch kognitive Redehandlungen der Ist-Zustand und das Präferenzenkataster der Klientel erhoben wird. Überdies können Redesequenzen als Teilsequenz in Handlungssequenzen vorkommen, die auch von Redehandlungen verschiedene Handlungen enthalten: Das Einkaufen läßt sich als eine Handlungssequenz

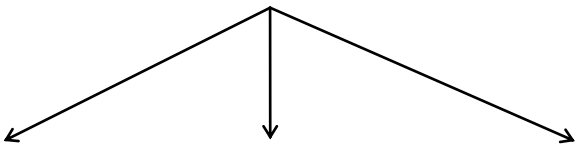
fassen, das in den letzten Gliedern, oft auch in Zwischengliedern, gewöhnlich eine Redesequenz enthält.

Ü5 Bilden Sie (i) ein Beispiel für einen Diskurs, (ii) ein Beispiel für eine Redesequenz, die einen Diskurs als Teilsequenz enthält, (iii) ein Beispiel für eine Handlungssequenz, die eine Redesequenz als Teilsequenz enthält, die ihrerseits einen Diskurs als Teilsequenz enthält!

Die Fassung als Sequenz, d.h. als endliche Folge, erlaubt den Zugriff auf das jeweils n-te Glied der Sequenz und die zur Charakterisierung oft hilfreiche formale Strukturierung von Handlungssequenzen in die Anfangs- oder Eröffnungshandlung, die Zwischen- oder Fortsetzungshandlungen und die Schluß- oder Endhandlung. Der Anfangshandlung geht keine Handlung (in der unterlegten Sequenz) voran, wohl aber den Fortsetzungshandlungen; und der Schlußhandlung folgt keine Handlung (in der jeweiligen Sequenz). – Eine Argumentation (↑8.) wird z.B. durch eine Behauptung eröffnet und eine Erklärung durch eine Warum-Frage (↑1.1.3). Es folgen Annahme-, Anziehungs- und Folgerungshandlungen. Die Endhandlung ist stets eine Folgerungshandlung.

Subsumiert man auch die Redesequenzen unter die Redehandlungen i.w.S. und schließt man diese Klasse damit ab, dann ergibt sich folgende Übersicht:

[4] Redehandlungen im weiten Sinne



(Rede)Teilhandlungen Redehandlungen Rede(handlungs)sequenzen

Der Suggestion der Klammern folgend, werden Redeteilhandlungen in der Folge kurz als ‘Teilhandlungen’ angesprochen und Redehandlungssequenzen als ‘Redesequenzen’.

Ü6 Suchen Sie zu den drei erreichten Endpunkten von Schaubild [4] Beispiele, die sich aus dem Text ergeben!

Wie Redehandlungen, ihre Teilhandlungen und die Redesequenzen im einzelnen zusammenspielen, insbesondere wie die mit ihnen typischerweise verfolgbaren Zwecke zusammengehen, wird später ausführlich und immer wieder zum Thema. – Im Sinne des besseren Verstehens des schon Verstandenen wird empfohlen, die ausgezeichneten Zeilen [8] bis [13| des Kapitels 1. neuerlich zu betrachten; dort sind die entsprechenden Sätze bereits aus der Performator-Aussage-Perspektive in Standardform notiert.

2.2 Sprache: Einheit aus Performatorik und Grammatik

An Redehandlungen bzw. Sätzen, so das Zwischenergebnis, lassen sich Performation und Proposition bzw. Performator und Aussage unterscheiden. Nun ist das Verhältnis der Unterschiedenen in den Mittelpunkt zu rücken: Zunächst ist diesbezüglich Unbeliebigkeit festzustellen (2.2.1). Sodann werden Regeln als allgemeine Form der Antwort auf die Frage präsentiert, welches performative mit welchem propositionalen Moment zusammengeht (2.2.2). Ausgehend von einem Vorbegriff der Sprache als Reglement von Redehandlungen, wird diese sodann als Einheit aus Grammatik und Performatorik bestimmt (2.2.3). Bezüglich einer Sprache sind wenigstens sechs Tätigkeiten zu unterscheiden; dies geschieht abschließend im Stenostil (2.2.4).

2.2.1 Die Unbeliebigkeit im Verhältnis von Performation und Proposition

Die Inspektion des Verhältnisses von performativem und propositionalem Moment führt zu zwei Feststellungen: Einerseits kann derselbe propositionale Gehalt mit verschiedenen performativen Momenten auftreten. So mögen Autoren die Aussage ‘niemand ist sein eigener Vater’ mit behauptender, schließender, fragender, zustimmender usf. Kraft äußern:

[5]	a)	Es gilt	
	b)	Also	
	c)	Trifft es zu	Niemand ist sein eigener Vater
	d)	Ich stimme zu	
	...	...	

Andererseits kann derselbe performative Modus verschiedene propositionale Gehalte aufnehmen. So lassen sich etwa die Aussagen ‘niemand ist sein eigener Vater’, ‘Sokrates ist ein Philosoph’, ‘Zu jeder natürlichen Zahl gibt es eine größere’, ‘Essen bietet ausgezeichnete Einkaufsmöglichkeiten’ alle mit behauptender Kraft äußern:

[6]		a)	Niemand ist sein eigener Vater
	Es gilt	b)	Sokrates ist ein Philosoph
		c)	Zu jeder natürlichen Zahl gibt es eine größere
		d)	Essen bietet ausgezeichnete Einkaufsmöglichkeiten
		..	...

Insgesamt gilt: Ein propositionaler Gehalt ist mit verschiedenen Kräften kombinierbar, und umgekehrt kann ein performativer Modus verschiedene propositionale Gehalte aufnehmen.

Die Kombinierbarkeit eines propositionalen Gehaltes mit verschiedenen Modi sowie umgekehrt die Aufnahmefähigkeit eines Modus für verschiedene propositionale Gehalte führt zwanglos und zwangsweise auf die Frage, ob Modi und propositionale Gehalte sich beliebig zusammenstellen lassen. Anders: Kann jede Performation mit jeder Proposition in einer Redehandlung zusammengehen? Ist jeder Performator mit jeder Aussage kombinierbar? Oder in der Terminologie des Meinens: Kann ein Autor beliebige propositionale Gehalte beliebig meinen?

Man macht sich an Beispielen deutlich, daß diese Frage zu verneinen ist. Es ist gerade der Witz des (korrekten) Behauptens, daß etliche Aussagen außerhalb des Behauptbaren angesiedelt sind; und es ist inkorrekt, eine undurchführbare Handlung zu empfehlen. Ebenso ist es, wie schon gesehen (↑1.1.2), die Pointe des (korrekten) Schließens, daß eben nicht alles aus allem geschlossen werden darf, und (korrekt) prognostizieren bzw. retrodizieren läßt sich nur Zukünftiges resp. Vergangenes. Einen Delinquenten verurteilen kann nur ein Richter nach ordentlichem Prozeß, und zu dogmatischen Verlautbarungen ist der normale katholische Christenmensch nicht in der Lage. Kurz: Das Verhältnis der beiden Momente einer Redehandlung ist unbeliebig. Damit ist ein normativer Gesichtspunkt in die Betrachtung aufgenommen!

Ü7 Verdeutlichen Sie sich an weiteren Redehandlungen die Unbeliebigkeit im Verhältnis von Performation und Proposition!

2.2.2 Regeln für Redehandlungen

Wenn nun erstens dieselbe performative Kraft mit verschiedenen propositionalen Gehalten verknüpfbar ist, wenn zweitens und umgekehrt derselbe propositionale Gehalt mit verschiedener performativer Kraft geäußert werden kann, wenn drittens jedoch propositionaler Gehalt und performative Kraft sich nicht beliebig verknüpfen lassen, dann ist zu fragen:

Welche Performatoren dürfen/sollen/... auf welche Aussagen angewendet werden bzw. welche Performationen dürfen/sollen/... mit welcher Proposition in einer Redehandlung zusammen ausgeführt werden bzw. – inhaltlicher – was kann/soll/... ein Autor wie meinen, mit welcher Kraft dürfen/sollen/... welche propositionalen Gehalte geäußert werden bzw. – in globalem Zugriff – welche Redehandlungen darf/soll/... man unter welchen Bedingungen vollziehen?

Die Frage ist offenkundig nur gesondert für die einzelnen Arten von Redehandlungen zu bearbeiten. Zunächst sind einige Antwortbeispiele zu vergegenwärtigen:

[7] a) Wenn es eine Begründung für eine Aussage Δ gibt, dann darf man Δ behaupten.

b) Wenn H eine von S durchführbare und im wohlverstandenen Eigeninteresse von S liegende Handlung ist, dann darf man S die Durchführung von H empfehlen.

c) Wenn es eine Begründung für die Negation einer Aussage Γ gibt, dann darf man Γ bestreiten.

d) Wenn eine Aussage Γ Konsequenz einer von einem Disputanten S_1 akzeptierten Aussagenmenge X ist und der Kodisputant S_2 die Konzessionsfrage bzgl. Γ aufwirft, dann ist S_1 gehalten, Γ zu konzedieren.

e) Wenn Indizien für/gegen die Plausibilität einer Aussage Γ vorliegen, dann darf man Γ bis auf weiteres vermuten/bezweifeln.

f) Wenn man eine Universalaussage in Abhängigkeit von weiteren Aussagen gewonnen hat, darf man jede ihrer Instanzen in Abhängigkeit von diesen Aussagen folgern.

Für die materialen Antwortangebote läßt sich eine gemeinsame allgemeine Form, nämlich die Form der Regel, vorsehen. Wenn anzugeben ist, unter welchen Bedingungen welche Redehandlungen vollzogen werden dürfen/sollen/..., dann läßt sich den einzelnen Antworten eine gemeinsame Form aufprägen: Wenn das und das der Fall ist, dann darf/soll ein Autor die und die Redehandlung vollziehen. Der Wenn-Teil ist das Regelantezedens, der Dann-Teil bildet das Regelsukzedens. Das Verhältnis von Redehandlung, Redezweck und Redehandlungsregel wird exemplarisch und systematisch erst später zum Thema (↑).

2.2.3 Sprache: Einheit aus Performatorik und Grammatik

Wenn Regeln jene Instanzen sind, die spezifizieren, unter welchen Umständen man welche Redehandlungen vollziehen darf/soll, dann liegt es in der Linie der angebahnten Auffassung von Sprachen als Systemen der Redeorganisation, diese für die hier leitenden Zwecke

kurzerhand mit dem Reglement zu identifizieren, das die für die jeweilige Sprache typischen Redehandlungen anleitet: Sprachen – so die Einstiegsbestimmung – sind Systeme von Redehandlungsregeln, Redehandlungsreglements.

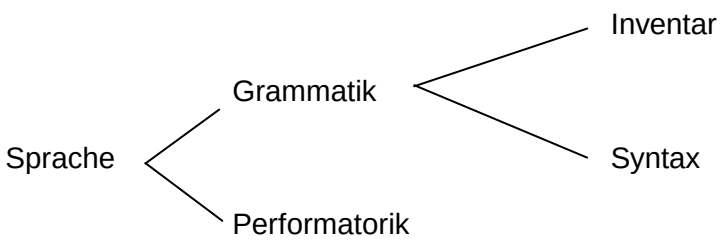
Die einzelnen Elemente von Sprachen, die die Redehandlungen regierenden Regeln, nehmen, wie sich an der Beispielliste ablesen läßt (↑[7]), in ihrem Antezedens und ihrem Sukzedens auf Ausdrücke dieser Sprachen, insbesondere auf Aussagen und Aussagenmengen einer bestimmten Art, Bezug. Dieser Umstand zeigt einen Charakterisierungsbedarf an: Welche Ausdrucksverbindungen sind (wohlgeformte) Gebilde der jeweiligen Sprache, welche Sorten von Ausdrucksverbindungen sind zu unterscheiden usf.? Das Ergebnis solcher Bestimmungen ist die Grammatik der jeweiligen Sprache. Hebt man von der Grammatik das auf diese zurückgreifende Regelwerk als Performatorik ab, dann lassen sich Sprachen – in Differenzierung der Einstiegscharakterisierung – als Einheiten aus Grammatik und Performatorik begreifen. – Die Bezeichnung ‘Performatorik’ wird gewählt, weil jede Redehandlungsregel wenigstens die Verwendung des für sie einschlägigen Performators reglementiert.

Die Grammatik muß zwei Sorten von Informationen bereithalten: Zum einen ist anzugeben, welches die (relativ auf den kategorialen Rahmen) atomaren Gebilde sein sollen, die in den atomaren Kategorien zusammengefaßt werden; diese Information ist dem Inventar der Sprache zu entnehmen. Zum andern muß spezifiziert werden, wie sich aus den atomaren Gebilden die molekularen Verbindungen, die in den molekularen Kategorien deponiert werden, ergeben; diese Information bietet die Syntax der Sprache.

Jede Sprache enthält die atomare Kategorie der Performatoren und die molekularen Kategorien der Sätze und Aussagen. Aus atomaren und molekularen Teilen welcher Art Aussagen auf welchem Wege aufgebaut sind, variiert von Sprache zu Sprache und zeichnet sie unter grammatischer Rücksicht aus (↑3.3).

Insgesamt lassen sich Sprachen – in für die hier leitenden Zwecke zureichender Weise – als Einheiten aus Grammatik und Performatorik bestimmen, wobei die Grammatik ihrerseits in Inventar und Syntax zerfällt:

[8]



Bei der exemplarischen Behandlung analytischer und synthetischer Wissenschaften wird diese Sprachkonzeption exemplifiziert (↑14., 15.).

2.2.4 Tätigkeiten bezüglich einer Sprache

Die Unterscheidung von sechs Tätigkeiten bezüglich einer Sprache ist zur Lokalisierung und differenzierten Behandlung zahlreicher methodenbezogener Problemstellungen unerläßlich. Zu unterscheiden ist zwischen dem Gebrauch, dem Erwerb, der Konstitution, der Erschließung, der Analyse, der Rechtfertigung einer Sprache; auch Kombinationen aus diesen Tätigkeiten sind möglich und üblich.

Ein Autor gebraucht eine Sprache, wenn er sie korrekt oder inkorrekt gebraucht. Korrekter Gebrauch liegt vor, wenn der Autor gemäß der Performatorik der jeweiligen Sprache agiert. Das wiederum ist der Fall, wenn er Sätze äußert, deren Aussagen den jeweiligen Regelbedingungen genügen. Widrigenfalls ist inkorrekter Gebrauch gegeben. So wird z.B. mit der Äußerung von ‘Es gilt, daß niemand sein eigener Vater ist’ bei Zugrundelegung der oben notierten Behauptungsregel (↑[7]a)) in der deutschen Sprache eine korrekte Behauptung vollzogen; wer hingegen die Aussage ‘mancher ist sein eigener Vater’ durch Äußerung eines passenden Satzes behauptet, vollzieht eine inkorrekte Behauptung und bietet damit ein Beispiel für inkorrekten Sprachgebrauch.

Wenn ein Autor eine Redehandlung durch Äußerung eines Satzes vollzieht, dann verwendet er sämtliche Teilausdrücke dieses Satzes. Was als Teilausdruck zählt, ergibt sich aus der unterlegten Grammatik. Ist die Redehandlung (in)korrekt, dann werden alle Teilausdrücke des Satzes (in)korrekt verwendet. Die erwähnten Beispiele führen u.a. die (in)korrekte Verwendung des Teilausdrucks ‘Vater’ vor.

Agenten erwerben eine Sprache, wenn sie die Fertigkeit gewinnen, diese Sprache korrekt zu gebrauchen; dabei eignen sie sich die korrekte Verwendung der einzelnen Ausdrücke an. Mit dem Spracherwerb wachsen sie in die jeweilige Sprachgemeinschaft hinein. Bei den meisten Sprachen, bei der Gebrauchssprache des Alltags, aber auch bei handwerklichen und laborwissenschaftlichen Fachsprachen, sind der Erwerb sprachlicher und nichtsprachlicher Fähigkeiten ineinander verwoben. ‘Erwerben’ umfaßt dabei sowohl ‘Sich-Instandsetzen’ als

auch ‘Instandgesetztwerden’: Manchmal erfolgt der Spracherwerb mit Lehrern im weitesten Sinn, gelegentlich autodidaktisch und oft sowohl fremd- wie selbstvermittelt. Das Erlernen der Primärsprache erfolgt (wenigstens in den Anfangsstadien) stets ohne eine Erwerbssprache. Beherrscht man hingegen bereits eine Sprache, so kann diese mit Gewinn beim Erwerb von Zweitsprachen, etwa beim Erlernen einer Fremdsprache oder einer Wissenschaftssprache, eingesetzt werden. Der Grad der erreichten Sprachbeherrschung läßt sich am sprachlichen und sprachbezogenen Handeln ablesen.

Sprachen werden konstituiert oder konstruiert, indem zunächst die Grammatik und sodann die Performatorik der Sprache hergestellt wird. Anzugeben ist mithin, Gebilde welcher Art Ausdrücke der Sprache sind, und unter welchen Umständen sie im Vollzug von Redehandlungen korrekt verwendet werden. Im Zuge der Konstitution werden die atomaren Ausdrücke dieser Sprache eingeführt. Die Konstitution der Performatorik erfolgt demnach durch Setzen von Redehandlungsregeln. – Da der Gebrauch der Sprache vorgegebenen Zwecken dient, ist die Sprache in zweckrealisierender Weise zu konstituieren: Aus den Zwecken ergeben sich Richtlinien der Konstitution.

Wer eine Sprache L_1 konstituiert, trifft Festlegungen und setzt Regeln als Handlungsanleitungen, vollzieht also seinerseits in einer Sprache L_2 Redehandlungen: Das Konstituieren einer Sprache ist – anders als der Spracherwerb – stets an eine Sprache, die Konstitutionssprache, gebunden. Damit stellt sich die Frage nach der Stärke der Konstitutionssprache: Welche Redemittel muß eine Konstruktionssprache bereithalten, um zur Konstitution einer so und so beschaffenen Sprache zu taugen? – Diese Fragestellung bietet einen aufschlußreichen Einteilungsgesichtspunkt für Programme der Konstitution bzw. Konstruktion (insbesondere) von (Wissenschafts)Sprachen.

Da die Konstitutionssprache L_2 vor der konstituierten Sprache L_1 verfügbar sein muß, stellt sich die Frage, wie L_2 ihrerseits zustandegekommen ist. Bei Strafe des infiniten Regresses können nicht alle Konstitutionssprachen ihrerseits konstituierte Sprachen sein. Bei der Genese von Sprachen ist neben der konstitutionellen eine nichtkonstitutionelle Form anzunehmen. Sprachen kommen nicht nur durch ausdrückliche Anfertigung zustande, sondern auch so, daß sich die verschiedenen Handlungsmöglichkeiten allmählich unter miteinander kooperierenden, gemeinsam Zwecke verfolgenden und Interessen teilenden Agenten einspielen, wie das auch bei nichtsprachlichen Handlungsformen der Fall ist.

Die meisten Gebrauchssprachen, die Sprache des Alltags ebenso wie die wissenschaftlichen und nichtwissenschaftlichen Fachsprachen, sind vollständig oder zu großen Teilen über nichtkonstitutionelle Genese zustandegekommen. Bei den zuletzt genannten Sprachen liegt in der Regel gemischte Genese vor. Sprachen konstitutioneller Genese finden sich vornehmlich in wissenschaftlichen Kontexten; sie dienen oft allein dem Zweck der Analyse im Sinne des

Objektseins für Analysen. – Unter Verwendung der Konventionssprechweise läßt sich formulieren: Bei konstitutioneller Genese kommen Sprachen durch explizite Konvention zustande, bei nichtkonstitutioneller durch implizite; bei gemischter Genese sind explizite wie implizite Konventionen am Werk.

Da die meisten Sprachen sich nichtkonstitutioneller Genese verdanken, sind sie nur mittelbar, d.h. über die Ergebnisse bzw. Spuren ihres Gebrauchs, gegeben. Sie müssen daher im Bedarfsfall erschlossen werden, indem den Gebrauchsresultaten eine Grammatik und eine Performatorik zugeordnet wird: Durch Veranschlagung welcher grammatischen Kategorialität gelingt es, alle und nur die Zeichengebilde zu erzeugen, die die Autoren als Ausdrücke dieser Sprache betrachten? Welches sind die Regeln, die den Vollzug genau der korrekten Redehandlungen ermöglichen? Zur Erschließung wird eine Erschließungssprache benötigt. Die Spracherschließung ist überdies ein alternativenhaltiges Unternehmen und stets eine Angelegenheit des Grades. Von faktisch gebrauchten Sprachen werden meist für die jeweilige Untersuchung interessante Fragmente erschlossen. – Indem man Sprachen erschließt, ermittelt man die Bedeutung der atomaren Ausdrücke dieser Sprache.

Ist eine Sprache – sei es per Konstitution oder Erschließung – gegeben, dann läßt sie sich zum Gegenstand der Analyse machen. Dazu benötigt man eine Analysesprache, die sich in weiten Teilen mit Konstitutions- und Erschließungssprache überschneidet. Häufig bezieht sich die Analyse auch auf mehrere unter einem Gesichtspunkt gleiche Sprachen, z.B. auf Sprachen mit gleicher Grammatik oder auf Sprachen, die ein bezüglich einer Redehandlung gleiches Reglement aufweisen.

Redend verfolgen Autoren Zwecke. Das, was redend gebraucht oder verwendet wird, die Sprache oder Teile derselben, kann mithin als Mittel zum Erreichen solcher Zwecke angesehen werden. Der Nachweis, daß die Sprache oder ihre Teile, die Grammatik, die Performatorik, Regelgruppen oder Regeln und einzelne Ausdrücke, die intendierten Zwecke (tatsächlich, wahrscheinlich, mutmaßlich, eher als eine so und so beschaffene Alternative **..** usf.) herbeizuführen erlauben, ist die Rechtfertigung der Sprache. Diese unterliegt der Zweck-Mittel-Rationalität. Rechtfertigungsfragen ergeben sich z.B. dann in augenfälliger Weise, wenn gut bearbeitete Regelwerke – man denke etwa an die Folgerungsreglements – miteinander konkurrieren oder wenn man das Problem aufwirft, warum Sprachen überhaupt widerspruchsfrei oder doch nichttrivialisierbar sein sollen (↑5., 10.).

Häufig werden die Tätigkeiten hintereinandergeschaltet: Man konstruiert oder erschließt eine Sprache, um sie sodann zu analysieren und man führt die Analyse durch, um für die anschließende Rechtfertigung von geklärtem Terrain ausgehen zu können.

Ü8 Die soeben erläuterte Unterscheidung von sechs Tätigkeiten faßt Sprache wesentlich als ein Mittel auf. Weisen Sie an anderen Mitteln, z.B. an Geräten wie einem Hammer, Korkenzieher, Messer usf., das Unterscheidungssextett nach!

2.3 Redehandlungen in ihrer Umgebung

Die meisten der nachfolgend erläuterten Redemittel befinden sich vorangehend schon in Verwendung. Das erhoffte rechte Verständnis soll durch die folgenden Darlegungen stabilisiert, Unverständnis soll beseitigt und Mißverständnis korrigiert werden. – Autoren richten Redehandlungen an Adressaten, die nicht immer mit den Rezipienten identisch sind: Autoren, Adressaten und Rezipienten sind die Redeagenten (2.3.1). Alle diejenigen, die imstande sind, als Redeagenten bezüglich einer Sprache aufzutreten, bilden die Sprachgemeinschaft (2.3.2). Isoliert man eine Redehandlung i.w.S. oder die zugehörige Ausdrucksverbindung zu weiterer Betrachtung, dann ist ihr Prae-, Post- und Kontext zu unterscheiden (2.3.3). Der Vollzug und die Rezeption von Redehandlungen erfolgen stets in bestimmten Situationen. Die Redeagenten, die Texte und die Situation bilden zusammen die Umgebung einer Redehandlung i.w.S. bzw. der zugeordneten Ausdrucksverbindung (2.3.4). Insbesondere gebrauchssprachliche Verlautbarungen sind hochgradig umgebungssensitiv. Zwei Maximen, die Naturierungs- und die Relativierungsmaxime, leiten den weiteren Umgang mit der Umgebungssensitivität an (2.3.5).

2.3.1 Redeagenten: Autor - Adressat - Rezipient

<u>Autor</u> einer Redehandlung ist der-/die-/dasjenige, der/die/das die Redehandlung vollzieht. Je nach Art der Redehandlung ist vom Behauptungs-, Aufforderungs-, Empfehlungs-, Verbotsautor usf. die Rede. Der Autor einer Redehandlung ist zugleich Autor der mitvollzogenen Teilhandlungen. Bei Autoren denkt man zunächst und naheliegenderweise an Personen; aber auch andere Agenturen mit Redepotential, z.B. Kollektive, Institutionen, Gruppen, Parteien usf., können als Autoren fungieren.

Diese Ausgangsbestimmung ist zunächst so zu erweitern, daß auch von Autoren von Redesequenzen gesprochen werden darf. Je nach Art der Redesequenz ist von Beweis-, Begründungs-, Erklärungsautoren usf. die Rede. Weiter sollen nicht nur Handlungen, sondern auch die Redeteile als Handlungsutensilien bzw. die Ergebnisse, die Sätze oder Texte, einen Autor haben. – Für ‘Autor’ findet sich oft auch das (dann aber nicht mehr nur auf den akustischen Realisierungsmodus abstellende) Wort ‘Sprecher’.

Die Kenntnis der Eigenarten des Autors, insbesondere seine kognitiv-volitive Gesamtbefindlichkeit mit ihrer Vorgeschichte, können für das Verständnis mancher der von ihm vollzogenen Redehandlungen hilfreich, in manchen Fällen sogar unentbehrlich sein; es gibt allerdings auch Redehandlungen und Sprachen – wie die später vornehmlich betrachteten Wissenschaftssprachen – in denen dieser Faktor keine Rolle spielt.

Redehandlungen sind von ihrem Autor gerichtet. Diejenigen, an die sie gerichtet sind, sind die Adressaten der Redehandlung. Auch hier soll erweiternd vom Adressat von Redesequenzen und vom Adressat der jeweiligen Sätze oder Texte die Rede sein. Adressaten müssen ebensowenig wie Autoren Einzelpersonen sein. Der Autor selbst kann ebenfalls zu den Adressaten zählen. Im Grenzfall, etwa beim Selbstgespräch, dem Monolog, dem Denken, fallen Autor und Adressat zusammen. - Das Wissen über Unterstellungen des Autors, Eigenarten des Adressaten betreffend, insbesondere über seine kognitiv-volitive Gesamtbefindlichkeit, kann für das Verständnis der Redehandlung oder Redessequenz der Redehandlungssequenz bzw. der Sätze oder Texte hilfreich, gelegentlich auch unentbehrlich sein. Für die später im Mittelpunkt stehenden Wissenschaftssprachen läßt sich dieser Gesichtspunkt wiederum ausblenden.

Nicht alle Redehandlungen erreichen ihre Adressaten und häufig gelangen Redehandlungen zu anderen, nichtintendierten Agenten. Zwischen Adressaten und denen, die die Redehandlung tatsächlich erreicht, den Rezipienten, ist also zu unterscheiden. Von Rezipienten soll ebenfalls bezüglich ganzer Redesequenzen und der jeweiligen Sätze bzw. Texte die Rede sein. Das Nichterreichen des intendierten Kreises und das Erreichen nichtintendierter Agenturen ist damit so formulierbar: Die Menge der Adressaten und Rezipienten kann auseinanderfallen, gelegentlich sogar ohne gemeinsames Element sein. Die alltägliche Kommunikation bietet ebenso wie die Geistesgeschichte Exemplifizierungen in Hülle und Fülle. Beispiel: Thomas von Aquin verfaßt die „Summa contra Gentiles“ für die im arabischen Kulturkreis missionierenden Mitbrüder aus dem Dominikanerorden, denen damit die Adressatenrolle zukommt. De facto gelesen wird dieser Text seit seiner Abfassungszeit bis auf den heutigen Tag und wohl darüber hinaus auch und mehrheitlich von einem nicht-dominikanischen Lektorium. Der Rezipientenkreis ist also weitaus umfassender als die Klasse der Adressaten; ähnliches läßt sich an allen denkgeschichtlich wirkungsstarken Texten feststellen.

Die Rezipienten, die der Autor nicht als Adressaten angezielt hat, müssen oft außergewöhnliche Verstehensleistungen erbringen, die sich gelegentlich in verschlungenen Interpretationstraditionen dokumentieren. Die Unterschiede in den kognitiv-volitiven Profilen von Autor und Rezipient, die Differenzen in ihren >Horizonten<, zählen zu den Ursachen für das Entstehen und Fortwähren von Un- und Mißverständnis (↑9.).

Autoren nehmen häufig auf sich und auf ihre Adressaten Bezug, aber auch auf solche Agenten, die weder mit dem Autor noch dem Adressaten identisch sind. Dafür hält die Gebrauchssprache agentensensitive Redeteile wie ‘ich’, ‘Du’/’Sie’, ‘er’, ‘wir’, ‘Ihr’, ‘sie’ bereit: Mit ‘ich’ kann der Autor etwa auf sich Bezug nehmen, mit ‘Du’/’Sie’ auf den Adressaten. Verschiedene Autoren nehmen mit der Verwendung solcher Vokabeln demnach auf verschiedene Agenten Bezug, der Gegenstand der Bezugnahme wechselt in systematischer Weise (↑7.). Neben den Personalpronomina zählen auch die Possessivpronomina zu den indirekt agentensensitiven Redeteilen. In Verwendung von ‘Dein Hemd’ in ‘Bitte laß Dein Hemd an!’ nimmt der Autor der Bitte auf ein Kleidungsstück des Adressaten Bezug. Der Redeteil ‘Dein Hemd’ enthält mit ‘Dein’ einen agentensensitiven Anteil.

Ü9 Fingieren Sie verschiedene Agenten zu der durch Äußerung von ‘Du sollst mein Diener sein!’ vollzogenen Redehandlung!

Gebrauchssprachen sind stets agentensensitiv: Sie enthalten – in einer anderen Terminologie – agentenbezügliche Indikatoren. Man benötigt einfache, d.h. von Eigennamen und Kennzeichnungen verschiedene, Redemittel, um auf sich oder Adressaten oder dann verschiedene Dritte Bezug zu nehmen. Viele explizit konstruierte Wissenschaftssprachen, z.B. die arithmetischen oder die mereologischen, kommen ohne solche Redeteile aus.

2.3.2 Die Sprachgemeinschaft

Die Sprach(gebrauchs)gemeinschaft ist der Zusammenschluß all der Agenten, die >prinzipiell und potentiell< in der Lage sind, die Agentenrollen zu übernehmen; häufig ist auch von der Kommunikationsgemeinschaft die Rede. Die Mitglieder der Kommunikationsgemeinschaft teilen die in der jeweiligen Sprache vorgesehenen Redehandlungsmöglichkeiten bzw. das dafür bereitgestellte Vokabular; und nur für Mitglieder der Kommunikationsgemeinschaften sind die jeweiligen Redehandlungen bzw. Sätze usf. verstehbar, mitteilbar und kommunizierbar. Da Redehandlungen stets >part and parcel< von Handlungssequenzen und -netzen sind, die (letztlich) auf Lebensbewältigung angelegt sind, gilt: Sprachgemeinschaften stellen stets Lebensbewältigungsgemeinschaften dar.

Da, wie betont, der Redevollzug allemal Teil und Stütze des Lebensvollzugs insgesamt darstellt, seinen Part im Ensemble der Vollzüge spielt, spiegeln die sprachlichen Möglichkeiten die sonstigen lebensweltlichen Bedürfnisse und Fähigkeiten. Augenfällige und daher in der Literatur oft und auch mit Recht angeführte Beispiele sind etwa die Differenzierungen, die Eskimos bei Schneesorten oder Zigarrenroller bei Brauntönen vornehmen. Die Beispiele liegen allerdings so nahe, daß man sie übersieht und lieber zu geographisch entfernten

Sprachgemeinschaften blickt: Eine Vokabel wie ‘Bildschirm’ oder ‘Telefon’ ist spezifisch für technisierte Sprachgemeinschaften; noch etwa im 18. Jahrhundert bestand kein Bedarf an Unterscheidungen und Subsumtionen, die mit ihrer Hilfe erbracht werden können. Typisch für eine Sprachgemeinschaft sind aber auch die jeweils vorgesehenen institutionellen Redehandlungen, z.B. das Verurteilen, Ernennen oder Lossprechen. Zwar finden sich alle Sprachgemeinschaften durchdringende Redeteile, z.B. solche für nahe stehende Personen, für Eß- und Trinkbares usf.; dennoch sind sowohl in dia- wie auch in synchroner Sicht erhebliche Unterschiede zwischen den einzelnen Sprachen festzustellen.

Mitglied in einer Sprachgemeinschaft ist man stets >in Graden<: Sprachbeherrschung ist, wie schon den Bemerkungen zum Verstehen entnehmbar, keine Angelegenheit des Alles oder Nichts, sondern eine des Mehr oder Weniger. Das ergibt sich einerseits schon daraus, daß man allmählich in eine Sprachgemeinschaft hineinwächst, indem man die Sprache Zug um Zug erwirbt. Andererseits stellt eine realistische Gebrauchssprache ein so weitverzweigtes Gebilde dar, daß hier, wie auch in anderen lebensweltlichen Vollzügen, Arbeitsteilung angesagt ist. Zwar können die meisten Autoren der deutschen Gebrauchssprache korrekt fragen, ob dieser oder jener Baum eine Ulme ist; zu einer korrekten Feststellung sind in schwierigen Fällen aber nur einige Spezialisten, etwa Förster oder Botaniker, in der Lage. Zwar kann auch der Weinliebhaber fragen, nach wie vielen Jahren der Tanin in dem eben gekosteten Wein abgebaut sein wird; zu einer verläßlichen Prognose ist indes nur der professionelle Verkoster imstande. Auch bezüglich der Benutzung von Eigennamen herrscht Arbeitsteilung: Bergbewohner sind in der Benutzung von Eigennamen für ihre Gipfel weitaus kompetenter als der Tourist, der es nach einigen Wochen zur Konstatierung einiger einfacher Identitätsaussagen bringt. Das durch die sprachliche Arbeitsteilung gegebene Kompetenzgefälle bezüglich der korrekten Verwendung der Vokabeln eines bestimmten Bereichs ist eine weitere Ursache von Miß- und vor allem Unverständnis.

2.3.3 Praetext – Posttext – Kontext

Isoliert man aus einer Redesequenz/einem Text eine Teilsequenz/einen Teiltext bzw. aus einer Redehandlung/einem Satz eine Teilhandlung/einen Teilausdruck bzw. aus einer (molekularen) Teilhandlung/einem (molekularen) Teilausdruck eine Teilhandlung/einen Teilausdruck bzw. aus einer atomaren Teilhandlung/einem atomaren Teilausdruck einen Handlungsteil/einen Ausdrucksteil, dann ist das jeweils Vorangehende, Vollzüge oder Texte, der Praetext, das jeweils Folgende, Vollzüge oder Texte, der Posttext; der Zusammenschluß von Prae- und Posttext ist der Kontext. Die X-Text-Prädikatoren sollen im übrigen transitiv verwendet werden: Wenn der Satz Σ etwa Kontext des Teilausdrucks μ ist, seinerseits aber den Text T zum Kontext hat, dann soll auch μ in T als Kontext eingebettet sein.

Kürze und Bequemlichkeit bringen es mit sich, daß Gebrauchssprachen über eine Fülle von Redemitteln verfügen, deren Bezug sich allein aus dem Kontext ergibt. Für diese kontextsensitiven Redemittel einige Beispiele: Mit ‘Er hat es tatsächlich getan’ bezieht sich der Autor auf eine im Praetext wenigstens einmal beschriebene, angezeigte oder benannte Person und Handlung. Mit ‘Das Weitere bringt einige Schwierigkeiten mit sich’ bezieht sich der Redner auf die dem Auditorium in der Folge zugemuteten Verlautbarungen. Durch Verwendung der Prosentenz ‘das’ in ‘Ja, das ist wahr’ kann ein Autor eine Zustimmung vollziehen, ohne die Aussage, der die Zustimmung gilt, eigens zu wiederholen. Prosentenzen sind Ausdrucksverbindungen unterhalb der Aussageebene, die in der Kommunikation für eine Aussage stehen. Mit ‘All dies ist unzutreffend’ kann man eine durch ‘all dies’ vertretene Konjunktion von Aussagen verwerfen. Welches die Aussage ist bzw. welches die Aussagen sind, der zugestimmt bzw. die verworfen werden, ergibt sich allein aus dem Praetext – und variiert entsprechend.

Ü10 Geben Sie weitere Beispiele für das kontextsensitive Vokabular!

Während die Gebrauchssprache, wie gesagt, ausgiebig von kontextsensitiven Redeteilen Gebrauch macht, verfügen explizit konstruierte Wissenschaftssprachen über derartige Redemittel meist nicht.

2.3.4 Situation und Umgebung

Der Vollzug von Redehandlungen, einer einzigen oder einer Sequenz, erfolgt in einer bestimmten Situation, die immer auch durch Raumstelle und Zeitpunkt charakterisierbar ist; Analoges gilt für die Rezeption. Autor- und Rezeptionssituation bilden gemeinsam die kommunikative Gesamtsituation. Wird etwa ein Text von verschiedenen Rezipienten zur Kenntnis genommen, so ergeben sich jeweils neue Gesamtsituationen.

Wiederum hält die Gebrauchssprache zum Zwecke der Kürze und Bequemlichkeit eine Reihe von Redemitteln bereit, deren Bezug sich allein aus der jeweiligen Situation ergibt: ‘hier’, ‘dort’ und ‘drüben’ sind Beispiele für Situationssensitiva, mit denen man sich auf Raumstellen bezieht, während Autoren mit ‘früher’, ‘jetzt’, ‘heute’, ‘später’ situationsabhängig auf Zeitpunkte bzw. -passagen Bezug nehmen. Die angeführten Ausdrücke werden auch als Raum- und Zeitindikatoren angesprochen.

Ü11 Geben Sie Beispiele für situationssensitive Redeteile (↑8.)!

Wiederum gilt: In Wissenschaftssprachen spielen Situationssensitiva keine Rolle, während die Gebrauchssprache ausgiebigen Gebrauch von ihnen macht.

Die Umgebung einer Redehandlung i.w.S. bzw. eines Ausdrucks i.w.S., d.h. eines Textes, Satzes, Teilausdrucks, Ausdruckteils, baut sich auf aus Kontext, Gesamtsituation und Agenten. Agenten-, kontext- und situationssensitive Ausdrücke sind damit auch umgebungssensitiv .

2.3.5 Zur Bewältigung der Umgebungssensitivität

Gebrauchssprachliche Gebilde sind, wie festgestellt, in der Regel in hohem Grade umgebungssensitiv. Meist lassen erst Umgebungsfaktoren erkennen, worauf Autoren sich beziehen, wie ein allgemeiner Ausdruck verwendet wird, in welchem Modus eine Proposition gemeint ist usf. Die Umgebungssensitivität geht also weit über die ausdrückliche Verwendung von Umgebungssensitiva hinaus. Die Unterstellbarkeit der Kenntnis der für das Verständnis jeweils bedeutsamen Umgebungsfaktoren ermöglicht meist erst effiziente Kommunikationswege.

Durch das Fingieren einer passenden Umgebung kann man auch eine beim ersten Hinhören nonsensnahe Rede wie ‘Ich bin geboren worden’ mit gutem Sinn führen: Man stelle sich im Jahr 2025 ein Einstellungsgespräch für Mitarbeiter mit PC-Einsatz vor. Zur Welt kommen Menschen mittlerweile entweder nach längerer Phase in einer Nährflüssigkeit im Labor oder wie bislang durch Geburt. Wer geboren wird, zeigt keine oft zur Arbeitsunfähigkeit führende Allergie, die die Laborkinder bei der Bildschirmarbeit quält. Die Information ‘Ich bin geboren’ unterscheidet die Art des Zur-Welt-Kommens, sie ist wichtig für den Einsteller und – gegebenenfalls – hilfreich für den Kandidaten. – Aus der Möglichkeit, für jede Verlautbarung durch Fiktion einer geeigneten Umgebung gänzlich andere und neue Verständnismöglichkeiten zu schaffen, erklärt sich auch die vorstehend notorisch eingesetzte Klausel ‘bei passender Umgebung’.

Ü12 Denken Sie sich einen weiteren Satz aus, der erst mit der Einbettung in eine passende Umgebung einen Sinn bekommt! – Beschreiben Sie diese Umgebung!

Die herausgestellte Umgebungssensitivität ist unstrittig; gleichwohl findet sie bei der Analyse gebrauchssprachlicher Gebilde oft nicht die geforderte Aufmerksamkeit. So versucht man derartige Objekte gelegentlich >denaturiert<, d.h. ohne eine dazugehörige Umgebung, zu betrachten, oder man entwickelt die Überlegungen bei stillschweigender Voraussetzung einer Umgebung. In beiden Fällen sind die Analyseergebnisse nur unter Beifügung bestimmter Umgebungen annehmbar; etliche Kontroversen in Linguistik und Sprachphilosophie wären durch Spezifizierung der einschlägigen Umgebungsfaktoren vermeid- bzw. behebbar. Die Naturierungsmaxime verlangt deshalb, bei der Analyse gebrauchssprachlicher Gebilde stets

eine Umgebung bzw. die jeweils bedeutsamen Umgebungsfaktoren zu spezifizieren. Entnimmt man das Gebilde einer >wirklichen< Umgebung, dann ist diese zu beschreiben; ansonsten müssen passende Umgebungen fingiert werden.

Ein ebenfalls verbreiteter Mangel bei der Analyse gebrauchssprachlicher Gebilde liegt darin, daß Thesen hinsichtlich grammatischer Eigenart und Verwendbarkeit bestimmter Redeteile, die nur für einige Umgebungstypen gelten, oft – meist unbewußt – mit universaler Reichweite ausgestattet werden. Prominente Beispiele aus der philosophischen Debatte sind Verlautbarungen zur Existenz- und zur Wahrheitsrede: ‘Existenz’ soll stets Prädikator zweiter Stufe (↑3.4.2) und ‘wahr’ nie >reales< Prädikat sein (↑12.). Die ebenfalls mit kontroversenvorbeugender und -behebender Kraft ausgestattete Relativierungsmaxime verlangt demgegenüber, daß man generalisierende Thesen bezüglich gebrauchssprachlicher Gebilde an die einschlägigen Umgebungstypen zurückbindet.

2.4 Vorblick: Wahrheit und Bedeutung

Alle Aufmerksamkeit galt bislang den Redehandlungen, ihren Szenarien und den Sprachen, die als Systeme der solche Handlungen regierenden Regeln aufgefaßt werden. Das Bedeutungsthema dürfte im Ausgang von dieser Plattform noch als erreichbar gelten. Wie man indes von diesen Anfängen zu dem unter dem Titel ‘Wahrheit’ stehenden Komplex gelangt, läßt sich für den Einsteiger, dessen >natürliche< Einstellung meist von konkurrierenden Zugangsweisen, insbesondere der gemeinplätzigen realistischen Korrespondenzintuition, geprägt ist, ungleich schwerer einsehen.

Um die vermuteten Verständnishindernisse auszuräumen, ist dem Wahrheitsthema zunächst sein >Sitz im Leben< anzuweisen (2.4.1). Mit den Wahr- und Falschperformationen bzw. den sie leitenden Kriterien wird das zum Gegenstand, was wir im lebens- und sonderweltlichen Vollzug beständig tun bzw. beanspruchen (2.4.2 und 2.4.3). Der Philosoph, der sich diese Praxis als Wahrheitstheoretiker zum Gegenstand macht, vollzieht hingegen Wahr- und Falschprädikationen (2.4.4); die dazu benötigten Prädikatoren stellt er durch Wahr- und Falschheitsdefinitionen bereit (2.4.5). Der exemplarisch vorgeführte (2.4.6) und begrifflich angedeutete (2.4.7) Zusammenhang zwischen Wahrheit und Bedeutung stellt sich so dar, daß die Fixierung der Bedeutung von Ausdrücken und die Spezifizierung der Wahrheitskriterien nur zwei Seiten einer Medaille sind.

2.4.1 Wahrheit: Zum >Sitz im Leben<

Menschen bewältigen ihr Leben im Rahmen der Zweck-Mittel-Rationalität. Um die handelnd verfolgten Zwecke zu erreichen, benötigt man Wahrheiten als Orientierungspunkte: Was diesen unerträglichen Lärm macht, ist, so die erste Wahrheit des Tages, der Wecker. Er steht – zweite Wahrheit – auf dem Nachttisch. Mit Knopfdruck - dritte Wahrheit – wäre die Ruhe wiederhergestellt. Eben dieser Zustand – vierte Wahrheit – soll sein. Die Betätigung des einschlägigen Teils beschließt erfolgreich die Handlungssequenz.

Wahrheiten fließen in all unser Handeln ein, nicht nur in das Ausführen, sondern auch in das Unterlassen: Um einer Einladung nicht zu folgen, muß man über Erkenntnisse dahingehend verfügen, Handlungen welcher Art man zu welchem Zeitpunkt unterlassen muß. Dieses Involviertsein von Wahrheiten gilt ferner nicht nur für ein auf Überleben oder besseres Leben zielendes Handeln: Auch zum Vollzug >destruktiver< Akte benötigt der Akteur wahre Überzeugungen: Der beflissene Selbstmörder hatte sich eine falsche Auffassung über die geforderte Dicke des Stricks und sein Gewicht gebildet – und muß nun das unerwünschte Leben für's erste in Gips fortsetzen, ehe er, besser instruiert, neuerlich zur Selbsttilgung antritt. Die Rede von Zweck und Mittel ist also formal und unterschiebt nicht schon bestimmte materiale Zwecke.

Ü13 Beschreiben oder fingieren Sie gelingende Handlungen und stellen Sie die von den Agenten vorzunehmenden Wahrvollzüge (oder Übernahmen von Wahrvollzügen) heraus! – Beschreiben oder fingieren Sie aufgrund inkorrekter Wahrvollzüge (oder Übernahmen inkorrekter Wahrvollzüge) mißlingende Handlungen!

Zwar handeln wir gelegentlich auch erfolgreich, wenn Irrtümer glücklich zusammenspielen: Irrtümlich geht der Reisende davon aus, daß der Zug von Essen nach Greifswald von Gleis 6 (statt von Gleis 9) abfährt; und da er zusätzlich Gleis 6 mit Gleis 9 verwechselt, erreicht er dennoch das Reiseziel. Aber diese Zufälle sind selten und mit Hilfe korrekter Wahrvollzüge erklärbar; und niemand baut darauf sein Handeln. Oft kommen wir auch – aus kontingenten oder strukturellen Gründen – nicht zu den gewünschten Wahrheiten und müssen uns mit Vermutungen und Hypothesen, Prognosen und Retrodiktionen begnügen - aber Wahrheiten würden wir jederzeit diesen schwachen epistemischen Qualifikationen vorziehen (↑13.).

Das Bemühen, Gebilde als wahr zu qualifizieren oder an schon vorgenommenen und in Wissensbestände inkorporierten Wahrqualifikationen im Wege der Information teilzuhaben, entspringt dem Wunsch, <u>zielführend zu handeln</u>. Die ausgedehnte, selbstverständliche und zwanglose Praxis des Wahrvollzugs, erfolge diese in der Alltagssprache oder in einer wissenschaftlichen oder nichtwissenschaftlichen Fachsprache, ist also mit unserem sonstigen Handeln unauflöslich verknüpft (↑16.).

Wie qualifizieren Autoren nun Gebilde als wahr? Sie vollziehen Redehandlungen, indem sie (in welcher Realisierungsform auch immer) Sätze äußern wie etwa ‘Es gilt, daß niemand sein eigener Vater ist’. Als wahr qualifiziert wird dabei die verwendete Aussage. Redehandlungen dieser Art werden als Wahrperformationen angesprochen. Wer hingegen bestreitet, daß es eine größte Primzahl gibt, indem er z.B. den Satz ‘Ich bestreite, daß es eine größte Primzahl gibt’ äußert, klassifiziert die entsprechende Aussage als falsch und vollzieht eine Falschperformation. Die in Lebenswelt und Wissenschaft ständig geübte Praxis der Wahrheits- und Falschheitsetablierung erfolgt im Vollzug von Wahr- und Falschperformationen. Jedermann ist mit diesem Vollzug aus dem Alltag und meist aus einer oder mehreren >Sonderwelten< bekannt. – Mit ‘Wahrperformation’ und ‘Falschperformation’ sind, dies zur terminologischen Ergänzung, in diesem Kontext stets die ganzen Redehandlungen gemeint, und nicht bloß die jeweilige Teilhandlung der Performation.

Wer nicht über Primzahlen oder Verwandtschaftsverhältnisse, Längen, Massen, Gedichte, Geschwüre, Gefühle oder sonstwie Zukömmliches und Abträgliches nachdenkt, sondern Aussagen unter der Rücksicht ihrer korrekten Qualifizierbarkeit als wahr oder falsch, kurz: unter der Rücksicht ihrer Wahrheit und Falschheit, zum Thema macht, der verwendet dazu die Prädikatoren ‘wahr’ und ‘falsch’ und erwähnt die jeweiligen Aussagen durch entsprechende Terme. Wenn der Wahrheitstheoretiker etwa Sätze wie ‘Trifft es zu, daß alle beweisbaren Aussagen wahr sind’ oder ‘Es gilt: Es gibt keine zugleich wahren und falschen Aussagen’ äußert, dann vollzieht er Wahr- bzw. Falschprädikationen. Eine Wahr- bzw. Falschprädikation ist eine Redehandlung, in der ein Autor den Wahr- oder Falschprädikator verwendet; nicht abgezielt wird wiederum auf die innerpropositionale Teilhandlung der Prädikation.

Während alle Mitglieder einer Sprachgemeinschaft beständig Wahr- und Falschperformationen vollziehen und so an der Praxis der Wahrheits- und Falschheitsetablierung im Sinne der Arbeitsteilung mehr oder minder partizipieren, erfolgt im Vollzug von Wahr- und Falschprädikationen die Thematisierung eben dieser Praxis. Der Wahrheitsvollzug wird von allen Autoren einer Sprache geübt; das Nachdenken über dessen Bedingungen, Kriterien usf. ist eine Angelegenheit von Spezialisten.

Die – um eine ältere Terminologie aufzugreifen – alethische Praxis und ihre alethiologische Begleitreflexion werden im folgenden provisorisch betrachtet. – Das Verhältnis zwischen beiden Vollzügen ist im übrigen vollständig analog zu der Beziehung zwischen Schluß- bzw. Folgerungspraxis und Schluß- bzw. Folgerungstheorie bzw. logischer Begleitreflexion: Die Autoren jeder realistischen Gebrauchssprache ziehen beständig Schlüsse, indem sie Performatoren wie etwa ‘Also’, ‘Folglich’ und die zugehörigen Aussagen verwenden (↑1.1.2). Wenn hingegen der Logiker – seinem Spezialinteresse folgend – die Schlußpraxis zum Thema

macht, dann benutzt er den Folgerungsprädikator und Terme für Aussagen und Aussagenmengen.

Die Zwecksetzung ist in beiden Fällen dieselbe: Der Alethiologe bzw. der Logiker will sich den >Raum< alethischer und inferenzieller Redehandlungsmöglichkeit als solchen und in seinen Bezügen zu benachbarten Handlungskorridoren überschaubar machen, um so im Scheiternsfalle zu intervenieren, mögliches Scheitern zu verhindern und zur Optimierung dieser Vollzüge beizutragen. Diese Redeweise präsupponiert, daß die betrachteten Redehandlungen wie alle übrigen Vollzüge prinzipiell scheiternsanfällig sind, und de facto auch scheitern. Die alethische wie die logische – wie generell jede erkenntnis-philosophische – Begleitreflexion ist mithin auf den Zweck der Stützung des alethischen, logischen und allgemein kognitiven Handelns hingeordnet (↑16.).

2.4.2 Wahr- und Falschperformation

Die Wahr- bzw. Falschperformationen zählen zu den Redehandlungen, genauer zu den kognitiven Redehandlungen bzw. Erkenntnishandlungen. Im Vorgriff auf eine später im einzelnen erläuterte Kartierung der Erkenntnishandlungen (↑13.) ist festzuhalten: Wahr- und Falschperformationen bilden die affirmativen und negativen Vollformen des Erkennens bzw. der epistemisch stark qualifizierenden Erkenntnishandlungen. Von den Vollformen abgehoben sind die Vorformen bzw. die epistemisch schwach qualifizierenden, kognitiven Redehandlungen: Zu den affirmativen Vorformen zählt etwa das Vermuten, das Prognostizieren und Retrodizieren; das schwache Zweifeln und das hypothetische Verwerfen sind Beispiele für die negativen Vorformen.

Vor- und Vollformen bilden gemeinsam die epistemisch qualifizierenden oder substantiellen Erkenntnishandlungen; diesen stehen die subsidiären Akte, die kognitiven Hilfshandlungen, wie etwa das Folgern, Annehmen und Anziehen gegenüber. Substantielle und subsidiäre Erkenntnishandlungen sind zu den nicht-interrogativen kognitiven Redehandlungen zusammengeschlossen; ihnen stehen die interrogativen Erkenntnishandlungen, die (Entscheidungs- und Ergänzungs)Fragen gegenüber.

Mit der Verortung der Wahr- und Falschperformationen in die Erkenntnishandlungen, die ihrerseits als Gattung der Redehandlungen geführt werden, liegt auf der Hand, daß man sich mit generellen Überlegungen zu Redehandlungen auch einen Zugang zur Wahrheitsthematik verschafft. Diese Zuwegung ist weiter plausibel zu machen durch die Betrachtung einiger Beispiele.

Da ist zunächst die assertorische Wahrperformation >schlechthin<, das Behaupten. Ein Beispiel ist unter [1]a), die dazugehörige Regel unter [7]a) notiert. Sodann ist an das Setzen-

als-Prinzip, das axiomatische oder kategorische Setzen bzw. das Bedeutungspostulieren zu erinnern, das dazu dient, Anfänge für das Beweisen und Widerlegen zu schaffen. Ein Beispiel für eine solche Redehandlung aus dem Umfeld der Arithmetik:

[10] Ich-setze-als-Axiom: Jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger.

Eine aus konstruktivem Geist geborene Regel zu dieser Redehandlung könnte so lauten:

[11] Wenn sich eine Aussage Γ als Stabilisierung lebensweltlich praktizierter Zählhandlungen auszeichnen läßt, dann darf man Γ als Axiom setzen.

Eine weitere Wahrperformation, typisch für synthetische und untypisch für analytische Sprachen, sind die Konstatierungen: Zunächst zwei Regeln:

[12] Wenn man zwei durch θ_1 und θ_2 bezeichnete Körper auf je eine Schale einer ungestörten Balkenwaage legt und die Horizontalstellung eintritt, dann darf man eine Aussage der Art: 'θ_1 gewichtsgleich θ_2' konstatieren.

[13] Wenn sich ein durch θ bezeichneter Körper von einem Diamant nicht ritzen läßt, dann darf man eine Aussage der Art: 'θ ist hart' konstatieren.

Die zuletzt spezifizierten Vollzüge sind für Schreibtischtäter ungeeignet: Nichtdiskursive Zubringerhandlungen, das Hantieren mit Objekten, der Umgang mit Geräten, sind erforderlich und gehen in die abschließende Redehandlung ein. – Weitere Beispiele für alethische Vollzüge sind etwa das (objektsprachliche) Definieren, das starke Zustimmen, das Setzen-Als-Gesetz.

Bezüglich der Falschperformationen, erinnert sei an das Bestreiten, ist lediglich eine Auffälligkeit mit einer Erklärung zu versehen. Das zunächst Unerwartete und damit Erklärungsbedürftige besteht darin, daß es bedeutend weniger Falsch- als Wahrperformationen gibt. Die Erklärung: Das >negative Moment< kann auch durch aussageninterne Operatoren wie Negator oder negative Prädikationsoperatoren (↑3.2.1 und 3.2.5) übernommen werden. Da man diese ohnedies (in realistischen Sprachen) benötigt, werden negative Redeformen meist verzichtbar.

Die Wahr-/Falschvollzüge wirken mit den übrigen Erkenntnishandlungen zusammen: Unter den Erkenntnishandlungen herrschen durchgehend kooperative Verhältnisse: Die diversen Vollzüge greifen ineinander, bilden ein Ensemble; und genau diesen kooperativen Rückraum organisieren bzw. dokumentieren auch die Redehandlungsregeln.

Beispiele: Um Aussagen behaupten oder bestreiten zu können, müssen Beweise oder Widerlegungen vorgelegt werden, also eine Reihe anderer Erkenntnishandlungen, Annahmen, Folgerungen, Anziehungen, gezielt vollzogen werden. Um Fragen aufzuwerfen, müssen zuvor

ihre Voraussetzungen, also weitere Aussagen, als wahr klassifiziert worden sein. Die Leserin inspiziere unter dieser Rücksicht die unter [7] aufgelisteten Regeln.

2.4.3 Wahr- und Falschheitskriterien

Wenn die Vollformen des Erkennens als Wahr- und Falschperformationen angesprochen werden, dann verdienen die sie leitenden Regeln den Titel von Wahrheits- und Falschheitsregeln. Und sie stellen genau das dar, was eine breite und wohlreputierte Tradition neuzeitlicher Erkenntnisphilosophie als Wahrheits-/Falschheitskriterien anspricht. Erstens: In den Wahrheitsregeln dokumentiert sich die Pluralität und Verschiedenheit des Erkenntnisgeschäfts. Jene der Arithmetik dürfen und sollen von denen der Vampirologie, Theologie, Mineralogie und Meßkunst verschieden sein; und die Regeln für eine Aussagensorte müssen auf deren Spezialität Bezug nehmen.

Zweitens: Wahrheitsregeln leiten das Handeln des wahrklassifizierenden Autors an, ohne daß der Autor sie kennen muß; er muß tun können, was das jeweilige Kriterium verlangt, ohne imstande sein zu müssen, die je veranschlagten Kriterien auch formulieren oder gar rechtfertigen zu können. – Drittens: Wahrheitsregeln dienen der Ex-post-Beurteilung der ausgeführten Handlung bzw. des erzielten Resultats. Diese ist insbesondere dann angesagt, wenn Zweifel an der Regeltreue der Exekution laut werden.

Da über Kriterien der Wahrheit und Falschheit häufig und zum Schaden der jeweiligen Erörterungen ohne exemplarische Fixierung gehandelt wird, sollen ausdrücklich schon notierte Beispiele in Erinnerung gerufen werden. Die Bestreitungsregel unter [7]c) ist eine Falschheitsregel, die Behauptungsregel unter [7]a), die Regel für das axiomatische Setzen unter [11] und die Konstatierungsregeln [12] und [13] sind Wahrheitsregeln alias -kriterien.

Die vorgenommene Gleichsetzung erlaubt einen doppelten Wissenstransfer: Was sprach- und handlungsphilosophisch von Regeln und Redehandlungen, von Regeln und Agenten gewußt wird, gilt auch von alethischen Kriterien und kriterientreuen Akten, von Kriterien und kriteriengemäß Agierenden. Und was die erkenntnisphilosophische Tradition von Kriterien und kriterientreuen Akten usf. festhält, läßt sich für die Erörterung von Redehandlungen und Regeln usf. nutzbar machen.

2.4.4 Wahr- und Falschprädikation

In Alltag und Wissenschaft werden Aussagen durch Wahr- und Falschperformationen als wahr oder falsch qualifiziert. Erfolgt dies kriteriengemäß, ist die Wahr- resp. Falschperformation korrekt, sonst inkorrekt. Dazu benötigt man ersichtlich weder den Wahr- noch den

Falschprädikator. Beide Redeteile sind – für diesen Zweck – nicht nur redundant, sondern sogar untauglich (↑13.). Mehr noch: Man benötigt - zu diesem Zweck - überhaupt keinen Redeteil, in dem die Worte ‘wahr’ oder ‘falsch’ als Teilausdrücke oder Ausdrucksteile vorkommen; man vergleiche die exemplarischen Wahrperformationen unter [1]a) und [9]. Wozu sollen dann aber Wahr- und Falschprädikatoren überhaupt gut sein?

Ein Blick auf das Folgern hilft weiter. Zum Vollzug von Folgerungen ist der Folgerungsprädikator ‘..ist eine Folgerung aus..’ nicht nur redundant, sondern sogar ungeeignet. Wir haben aber nicht nur ein Interesse daran, aus bestimmten Aussagen andere Aussagen zu folgern, sondern wir wollen uns auch über die Folgerungsverhältnisse ganz allgemein verständigen und zu Einsichten kommen wie etwa der, daß jede Aussage (unter einer bestimmten Logik) Konsequenz einer inkonsistenten Aussagenmenge ist - und genau dazu wird der Folgerungsprädikator benötigt! Im Bild: Der Folgerungsprädikator dient dazu, auf den ganzen Folgerungsraum, d.h. das Gesamtfeld möglicher Folgerungsverhältnisse, zuzugreifen.

Nun sind die Prädikatoren ‘..ist wahr’ und ‘..ist falsch’ nicht genau einer Erkenntnishandlung zugeordnet, sondern überdecken mehrere. Der Ansatz aber bleibt: Wir benötigen diese Prädikatoren, um über (alle und nur) die Aussagen zu sprechen, die gemäß den Wahrheits- oder Falschheitskriterien in entsprechenden Handlungen als wahr oder falsch hingestellt werden können. Es ist das Interesse am Gesamtfeld möglicher Wahr- und Falschklassifikationen, an den allgemeinen Wahrheits- und Falschheitsverhältnissen, die diese Vokabel zu unseren sonstigen Redemitteln hinzuzusetzen veranlaßt. Und Autoren verwenden diese Prädikatoren, wenn sie etwa in einer Analysesprache folgende Sätze äußern:

[14] a) Es-gilt: Es gibt keine zugleich wahren und falschen Aussagen.

b) Trifft-es-zu, daß Euklids Theorem wahr ist?

Den Unterschied zwischen <u>Wahrperformationen</u> und <u>Wahrprädikationen</u> sollte man sich stets vor Augen führen. Dazu Ziffer [15].

[15] a) Theorem: Zu jeder Zahl gibt es eine größere Primzahl.

b) Trifft es zu, daß Euklids Theorem wahr ist?

c) Es ist falsch, daß alle wahren Aussagen widerlegbar sind.

Mit a) wird eine korrekte Wahrperformation in der arithmetischen Sprache vollzogen; von Wahrprädikation keine Spur. Mit b) wird eine interrogative Handlung in der Analysesprache zur arithmetischen Sprache vollzogen; von Wahrperformation keine Spur. Allerdings liegt eine Wahrprädikation vor: Wahrheit wird prädiziert von Euklids Theorem, das zu diesem Zwecke

erwähnt (und nicht verwendet) wird. Mit c) schließlich wird in der Analysesprache eine Falschperformation vollzogen, in die eine Wahrprädikation eingebettet ist.

Hier ist ein Caveat angebracht: Gebrauchssprachliche Äußerungen wie ‘Das ist wahr’ oder etwa ‘Euklids Theorem ist wahr’ sind ganz vertrackte Gebilde. Wird hier eine Zustimmung vollzogen oder von einer Aussage Wahrheit prädiziert? Will man solche Fragen entscheiden, dann hat man ausführliche Umgebungsbetrachtungen vorzunehmen bzw. Umgebungen zu fingieren (↑2.3.5)! Sie sind nicht geeignet als Basis für schnelle Schlüsse und Schüsse, betreffend die Natur von Wahrheit und die Zwecke und Grenzen von Wahrheitskonzeptionen (↑13.).

2.4.5 Wahr- und Falschheitsdefinition

Was sind nun Definitionen von Wahrheit und Falschheit? Im weitesten Sinne genommen handelt es sich um Bereitstellungen der Prädikatoren ‘wahr’ und ‘falsch’ aller Art: ‘Definition’ wird an dieser Stelle also im weiten Sinne der älteren Methodologie verstanden (↑10.). Damit werden die Wahr- und Falsch<u>prädikationen</u> ermöglicht und beurteilbar. Demgegenüber werden – zur Erinnerung – durch die Wahrheitskriterien alias -regeln die Wahr-/Falsch<u>performationen</u> ermöglicht und beurteilbar. In der Regel handelt es sich um explikative Einführungen. Anschlußkontroversen sind demzufolge typische Explikationsstreite (↑). – Wahrheitsdefinitionen von einiger begrifflicher Schärfe beziehen sich auf explizit konstituierte Sprachen oder auf zu diesem Zweck erschlossene >interessante<, d.h. unter einer bestimmten Aufgabenstellung interessierende, Fragmente von Gebrauchssprachen.

Wahrheitsdefinitionen sind von Wahrheitskriterien wohlunterschieden: Erstere dienen der Bereitstellung eines Wahrheitsprädikators – sie sagen uns, was es heißt, daß eine Aussage wahr ist. Letztere reglementieren die Wahrperformationen – sie sagen uns, wie wir Wahrheiten etablieren; analoges gilt für die Falschheitsseite.

Die <u>Wahrheitstheorie</u> oder – um bei der Reanimierung des alten Ausdrucks zu bleiben – die <u>Alethiologie</u> bezieht sich in erschließender, konstruierender, analysierender und rechtfertigender Absicht auf Wahr- und Falschperformationen. Sie ist damit Teil der Erkenntnisphilosophie, die unter den genannten Rücksichten auf alle Erkenntnishandlungen zielt.

Wenn oben dargelegt worden ist, daß die Praxis der Wahrheits- und Falschheitsetablierung dem Handeln dient, dem weiteren Redehandeln wie auch den sonstigen Vollzügen, dann stellt sich nun die Frage, wem die Wahrprädikation dient. Um die schon gegebene Antwort zu wiederholen: Wie alles Handeln ist auch das Wahr- und Falschperformieren scheiternsanfällig:

Um Scheitern zu verhindern und nach dem Scheitern Hilfe für den neu ansetzenden Vollzug zu geben, wird die Möglichkeit zur Wahr- und Falschprädikation benötigt.

2.4.6 Wahrheit und Bedeutung: Exemplarisches

Abschließend ist der Blick auf das Verhältnis von Wahrheit und Bedeutung zu wenden. Die Überlegung erfolgt zunächst an Beispielen. Die unter [12] notierte Regel bindet die Feststellung der Gewichtsgleichheit zweier Körper an den Umgang mit einer ungestörten Balkenwaage. Es handelt sich – ganz allgemein - um eine Redehandlungsregel. Genauer liegt eine Regel für eine kognitive Redehandlung vor, eine Erkenntnisregel. Noch spezifischer: Eine Regel für eine affirmative Vollform, eine Regel für eine Wahrperformation, ein Wahrheitskriterium.

Die Regel spezifiziert in ihrem Wenn-Teil, was ein Autor der jeweiligen Sprache tun muß, um eine Aussage als wahr zu klassifizieren, deren Hauptoperator das Prädikat '..gewichtsgleich..' ist. Sie spezifiziert also die wahrheitsqualifizierende Prozedur für alle Aussagen mit diesem Hauptoperator.

Damit wird in einem – und darauf kommt es jetzt an! - die Verwendung des Konstatierungsperformators und des Prädikators in Teilen umrissen. Da damit zugleich der korrekte Umgang mit verwendungsgleichen Redeteilen umrissen wäre, ist die Redeweise berechtigt, daß die Bedeutung des Konstatierungsperformators und des Prädikators – wenigstens teilweise – festgesetzt wird.

Für das Beispiel und alle ähnlich gelagerten gilt: Bedeutungsfixierung und Etablierung der wahrheitsqualifizierenden Prozedur sind eins, oder besser, zwei Seiten einer Medaille, zwei Zugriffe auf eine Regel, zwei Weisen, ihre Leistung zu beleuchten. – Und für die Ausführungsseite gilt: Die Wahrperformation wird korrekt vollzogen, die Exekution der wahrqualifizierenden Prozedur wird korrekt inszeniert, wenn sie bedeutungsgemäß vollzogen wird.

Weitere Konstatierungsregeln etablieren diesen Typus der empirischen Wahrperformation und damit die Bedeutung des Performators. Die korrekt konstatierbaren Aussagen sind die Empireme. Weitere Regeln oder Prinzipien fixieren die weitere - dann strukturelle – Bedeutung des Prädikats '..ist gewichtsgleich..' im Sinne einer Gleichheit. Die Balkenwaage hat wesentlich mit der Bedeutung des Prädikators und dem Wahrheitsstatus der Aussagen zu tun, in denen dieser Redeteil Hauptoperator (↑3.3.1) ist. Wer die Idee ausarbeiten möchte, daß unser Erkennen „der Realität verantwortlich" ist, betritt mit der Thematisierung der Konstatierungsregeln einschlägiges Terrain.

Betrachtet man als zweites Beispiel für ein Wahrheitskriterium die Behauptungsregel unter der Ziffer [7]a): Korrekt behauptet ist eine Aussage, wenn es eine Begründung für sie gibt. Direkt in seiner Bedeutung spezifiziert ist hier nur der Behauptungsperformator. Durch den Rekurs auf Begründungen wird jedoch auf andere Redehandlungen rekurriert, deren Regeln wiederum ausführlichere Einführungsleistungen erbringen. Als da sind: Das Setzen als Prinzip, um den Begründungen Anfänge zu verschaffen, und das Folgern, das die als Prinzip gesetzten Anfänge auszubeuten erlaubt. Für das Setzen als Prinzip ist auf [10] und [11] zu verweisen; für das Folgern zunächst als Beispiel die Regel der Partikularquantoreinführung:

[16] Wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenmenge X das Ergebnis der Substitution eines geschlossenen Terms θ für eine Variable ω in einer Formel B, in der genau ω frei ist, gewonnen hat, dann darf man in Abhängigkeit von X die Partikularquantifikation von B bzgl. ω folgern.

Intuitiv: Hat ein bestimmter Gegenstand eine Eigenschaft, dann darf man darauf schließen, daß wenigstens ein Gegenstand diese Eigenschaft hat (↑4.). Diese Tafel ist rot; also ist wenigstens ein Gegenstand rot. In Teilen eingerichtet wird die Folgerungshandlung und die Teilhandlung des Partikularquantifizierens: In seiner Bedeutung in Teilen spezifiziert wird damit der Folgerungsperformator und der Partikularquantor. Das geschieht dadurch, daß die diskursive Lage geschildert wird, die gegeben sein muß, damit eine Folgerung vollzogen werden darf, deren Hauptoperator der Partikularquantor ist. Andere Folgerungsregeln reglementieren den Umgang mit anderen Junktoren, Prädikatoren und Quantifikatoren – und damit zugleich die korrekte Verwendung von Variablen und Parametern (↑4.).

Die Folgerungsregeln etablieren Bedeutungen, ohne selbst Wahrheitsregeln zu sein; sie sind allerdings unverzichtbar für die Behauptungsregel. Sie richten also die mit dem Behaupten vollzogene Wahrperformation indirekt ein, indem sie das Begründen und damit das Behaupten ermöglichen. Die Folgerungsregeln leisten mit ihrer Bedeutungsfestsetzung also einen indirekten Beitrag zur Einrichtung einer wahrheitsqualifizierenden Prozedur.

Am Rande bemerkt: Folgern und Behaupten sind Prototypen diskursiver Redehandlungen: Ihre Zubringervollzüge sind selbst Redehandlungen. Das Konstatieren ist der Prototyp einer nichtdiskursiven, eben empirischen Redehandlung: Sie verlangt Zubringervollzüge, die nicht selbst Redehandlungen sind: Bedeutung und Wahrheit sind an das Agieren von Autoren >in dieser Welt< gebunden, an Wahrnehmungs- und Herstellungshandlungen aller Art und später an die Benutzung von Meßinstrumenten und sonstigem Gerät. Dieses – im Beispiel: die Balkenwaage – stellt sich damit als Wahrheits- und Bedeutungsgerät oder – man denke an den Diamant in [12] – als Wahrheits- und Bedeutungsutensil dar. Das Nachdenken über die Herstellung und Gestaltung von derlei Gerät zählt naheliegenderweise zum Kern der empirie-

bezogenen Abteilung der Alethiologie; und auch wer ein derartiges >alethosemantisches< Gerät herstellt, ermöglicht alethische Vollzüge (↑15.).

Bei aller Verschiedenheit der in den Regelantezedentia spezifizierten Prozeduren gilt: Gemeinsam ist die Form der Regel als wahrheitsetablierende und bedeutungsverleihende Instanz; damit ist nicht behauptet, daß die Bedeutungsfixierung ausschließlich über die Redehandlungsregeln zustandekommt (↑10.).

2.4.7 Wahrheit und Bedeutung: Begriffliches

In – an dieser Stelle – kühner Extrapolation der Beispielbasis läßt sich als These zum Verhältnis von Wahrheit und Bedeutung folgendes Provisorium formulieren. Negativ: Weder stellt sich die Wahrheitsfrage dann, wenn vorausgehend alle Bedeutungsprobleme gelöst sind, noch lösen sich alle Bedeutungsfragen, wenn zuvor eine Wahrheitscharakterisierung vorliegt. – Positiv: Indem man Ausdrücken Bedeutung verleiht, richtet man direkt oder indirekt Formen der Wahrperformation ein, etabliert Wahrheitskriterien, wahrheitsqualifizierende Prozeduren; und indem man die Wahrperformation gestaltet, setzt man die Bedeutung von Ausdrücken fest. – Alle Aufmerksamkeit gilt dann den bedeutungsfixierenden, sprich wahrheitsqualifizierenden, Prozeduren.

Erst dieser Zusammenhang von Wahrheit und Bedeutung läßt zwei häufig vorgetragene, aber selten gerechtfertigte Forderungen als einsichtig erscheinen. Erstens: Warum wird, insbesondere im Dissensfall, gefordert, daß die je strittigen Eigenterme >präzisiert< werden, d.h., daß eine Einführung, eine förmliche Bedeutungsfixierung, vorgenommen oder eine bereits vorliegende verbessert wird? – Antwort: Weil sich mit der Bedeutungsschärfung die Chancen für den konsenten Wahrheitsentscheid erhöhen! Umgekehrt: Wäre die Bedeutungsetablierung oder -schärfung für den Wahrheitsstatus folgenlos, so könnte sie ohne Verlust unterbleiben.

Zweitens: Warum befragt man, wenn über den Wahrheitsstatus einer Aussage zu befinden ist, etwa ob a schwerer ist als b, nicht die Sterne, warum geht man nicht zum Spezialisten für Vogelflug oder Kaffeesatzlesen oder schließt sich sonst einer Option aus dem kaum überschaubaren Spektrum des anything goes an? – Antwort: Weil die dort angebotenen Prozeduren ohne jede Verbindung zur Bedeutung und damit zur wahrheitsqualifizierenden Prozedur der jeweils in Rede stehenden Aussage sind: Die Entscheidung, ob ’a schwerer b’, wird - andere bedeutungstreue Möglichkeiten hier ausgeklammert - im Wege des vorgeschriebenen Hantierens mit einer ungestörten Balkenwaage getroffen: Denn danach zu fragen, ob ’a schwerer ist als b’, besagt eben, nach dem Ausgang der erwähnten Wiegeprozedur zu fragen.

Unter der hier angedeuteten und sukzessive auszuführenden Organisation des Wahrheits- und Bedeutungsthemas läßt sich also abschließend und generisch folgende zentrale Aufgabe der Alethiologie (und Bedeutungslehre) formulieren: Wie sollen wir schon gegebene Bedeutungsfixierungen und damit ipso facto wahrqualifzierende Prozeduren beurteilen und gegebenenfalls reformieren? Wie sollen wir neu vorzunehmende gestalten und rechtfertigen?

2.5. Literatur

Dummett, M.: The Logical Basis of Metaphysics, London 1991.

Dieses anspruchsvolle Werk ist erhellend für den Hintergrund der entfalteten sprachphilosophisch-logischen Position. Es ist allerdings nur für das fortgeschrittene Studienstadium zu empfehlen. Die Einführung, „Metaphysical Disputes over Realism“ schildert eindrücklich den „linguistic turn“ in seiner methodologischen Lesart.

Kutschera, F.v.: Sprachphilosophie; München 1975[2].

Schon ältere, aber grundsolide Information über sprachphilosophische Themen und Positionen. Die in diesem Kapitel (in Teilen) dienlich gemachte Sprechakttheorie wird bei Kutschera unter 2.4.5 besprochen. Ebendort und in den weiteren Angaben zu diesem Ansatz finden sich auch die Angaben zu den Werken der „Klassiker“ Austin und Searle. – Die Sprechakttheorie findet auch in Stegmüller: Hauptströmungen II, Kap. I.3. Darstellung.

Lorenz, K. et al. (Hg.): Sprachphilosophie. Ein internationales Handbuch zeitgenössischer Forschung, 2 Halbbände (durchgehende Paginierung); Berlin/ New York 1992 und 1996.

Das Handbuch der Sprachphilosophie, auf dessen Beiträge in der Folge entsprechend häufig verwiesen wird. Die hier entfaltete Position ist in dem Artikel „Der Streit um die Bedeutungstheorien“ (S. 964-989) dokumentiert und von dem realistischen Ansatz abgehoben.

Runggaldier, E.: Analytische Sprachphilosophie (Grundkurs Philosophie 11); Stuttgart/ Berlin/Köln 1990.

Enthält zuverlässige Darstellung analytischer Positionen und Themen. Einschlägig bezüglich des vorliegenden Kapitels ist der Teil C.

Savigny, E.v.: Die Philosophie der normalen Sprache. Eine kritische Einführung in die „ordinary language philosophy“; Frankfurt/Main 1974.

Kapitel 3 schildert die Sprechakttheorie und Kapitel 1 ist eine gerade für den Einsteiger hilfreiche Darstellung der Spätphilosophie Wittgensteins. Insoweit Sprechakttheorie und Gebrauchsgedanken im vorliegenden Text (unter Hinzuziehung weiterer Elemente) verbunden sind, kann der Leser doppelt profitieren. Übrigens: Die Lektüre ist passagenweiseunterhaltsam.

Schneider, H.J.: Die sprachphilosophischen Annahmen der Sprechakttheorie; in: Lorenz, K. et al. (Hg.): Sprachphilosophie. Ein internationales Handbuch zeitgenössischer Forschung, 1. Halbband; Berlin/New York 1992, S. 761-775.

Schneider entwickelt eine Darstellung der Sprechakttheorie, die deren (hier vermiedenen) realistische Annahmen und Unterstellungen freilegt und so den Weg zur Verbindung von Sprechakttheorie und Gebrauchskonzeption öffnet.

Siegwart, G.: Vorfragen zur Wahrheit. Ein Traktat über kognitive Sprachen; München 1996; Teil B.

Bietet die systematische Ausarbeitung des philosophischen Hintergrunds der hier angebotenen Denkwerkzeuge und versucht teilweise gleichzeitig historisch-kritsche Auseinandersetzungen. Für die Thematik dieses Kapitels sind v.a. die Teile B. und C. einschlägig.

3. Die Rationale Grammatik *81*

3.1 Zur Auszeichnung der Rationalen Grammatik *82*

3.2 Standardgrammatik erster Stufe *84*
3.2.1 Atomare Kategorien *85*
3.2.2 Terme - Termformen - Nominatoren *88*
3.2.3 Formeln-Aussageformen-Aussagen *93*
3.2.4 Substitutionsoperationen *101*

3.3 Ergänzungen – Erweiterungen – Vertiefungen *104*
3.3.1 Das Funktionalitätsprinzip *104*
3.3.2 Termquantoren und Quantorterme *107*
3.3.3 Stufenbildung *110*
3.3.4 Dispositoren und Lambda-Operatoren *111*
3.3.5 Alternative Grammatiken *112*
3.3.6 Zur >Deduktion< grammatischer Kategorien *114*

3.4 Grammatischer Instrumentalismus *115*
3.4.1 Die grammatische >Bestimmungsfrage< *115*
3.4.2 Exemplifizierung am Existenzdisput *118*
3.4.3 Unterstellige Prädikatorenverwendung *120*

3.5 Literatur *123*

There can be no analysis of inference
without a prior analysis of the structure of statements
that can serve as premises and conclusions.

Michael Dummett

3. *Die Rationale Grammatik*

Sprachen stellen sich nach den bisherigen Ausführungen als Regelwerke für Redehandlungen dar (↑2.2). Die Regeln spezifizieren, unter welchen Bedingungen Autoren welche Redehandlungen vollziehen dürfen oder sollen. Autoren vollziehen in einer Sprache Redehandlungen, indem sie Sätze dieser Sprache äußern. Sätze ergeben sich aus der Anwendung eines Performators auf eine Aussage. – Aus welchen kleineren und kleinsten Bausteinen sind die Aussagen einer Sprache nach welchem Bauprinzip zusammengesetzt? Wie gelangt man überhaupt zu Kategorien, die eine Sortierung der Redemittel erlauben? Welches sind die mit dieser Sortierung verfolgten Zwecke? Gibt es nur ein oder aber mehrere Sortierungsraster und welches ist mit welcher Rechtfertigung in einer konkreten Problemsituation zu veranschlagen?

Einige dieser Fragen werden bearbeitet; für die Beantwortung der verbleibenden, die der philosophischen Hauptschule angehören, sind erste Vorkehrungen zu treffen. Zunächst ist die Rationale oder Logische Grammatik aus dem reichen Angebot an kategorialen Rahmen auszuzeichnen (3.1). Sodann wird der für die Anwendung wichtigste und daher auch am besten untersuchte Typus, die Standardgrammatik erster Stufe, im einzelnen dargelegt (3.2). Erweiterungen der Standardgrammatik, Ergänzungen um ein allgemeines Prinzip und alternative Vorschläge sowie Vertiefungen bezüglich des Gewinns grammatischer Kategorien bilden den dritten Schritt (3.3). Abschließend wird unter dem Titel ‘Grammatischer Instrumentalismus’ eine Einsatzstrategie grammatischer Kategorien im Umgang mit gebrauchssprachlichen Verlautbarungen empfohlen (3.4). Endlich sind Literaturempfehlungen auszusprechen (3.5). – Im ersten Durchgang kann die Bearbeitung nach 3.3.1, der Erörterung des Funktionalitätsprinzips, beendet werden. Die unter 3.3.2 verhandelte Erweiterung von Termquantoren und Quantortermen ist im Zuge der Darlegung der kennzeichnenden Nomination (↑7.) einzubeziehen und wird auch bei der Konstruktion einer Klassensprache (↑14.) benötigt.

3.1 Zur Auszeichnung der Rationalen Grammatik

Raster zur Sortierung von Redeteilen und zur Bestimmung ihres Zusammenhangs werden seit alters her in verschiedenen mit der Sprache befaßten Disziplinen ausgearbeitet. Jedermann und jederfrau (zumindest im Adressatenkreis) geläufig, da im elementaren Sprachunterricht vermittelt und beim Erwerb von Fremdsprachen benutzt und vertieft, ist die traditionelle Grammatik mit ihren Unterscheidungen von Wortarten (z.B. Adjektiv, Adverb, Substantiv, Artikel usf.) und Satzfunktionen (z.B. Subjekt, Prädikat, direktes und indirektes Objekt usf.). Vornehmlich mit Blick auf die Erklärung des Spracherwerbs und – damit verbunden – auf die Fähigkeit zur Erzeugung und zum Verstehen neuer Ausdrucksverknüpfungen sind innerhalb der Linguistik in den letzten Jahrzehnten eine ganze Reihe grammatischer Entwürfe wie die generative und die transformationelle Grammatik erarbeitet worden.

Die im folgenden skizzierten kategorialen Rahmen verdanken sich dem Zweck, die Praxis und die Theorie des korrekten Folgerns und des korrekten Definierens/Einführens von Ausdrücken in detaillierter und überprüfbarer Weise zu entwickeln. Mittelbar dient dieses Kategoriengefüge aufgrund der Stellung der genannten Redehandlungen im Ensemble der Erkenntnisvollzüge der Gestaltung und Analyse des korrekten Erkennens überhaupt. Aus diesem Grund legt sich die Bezeichnung ‘Rationale Grammatik’ (oder auch ‘Logische Grammatik’) nahe. Damit soll freilich nicht insinuiert werden, andere Grammatiken, z.B. die oben erwähnten, seien in irgendeinem Sinne irrational oder unlogisch; sie nehmen einfach andere Aufgaben wahr.

Den auch im Slogan dieses Kapitels behaupteten Zusammenhang zwischen dem Folgerungskonzept und den grammatischen Kategorien soll eine Beispielbetrachtung verdeutlichen: Der >Übergang vom Allgemeinen zum Einzelnen< ist ein häufig vollzogener und thematisierter Schluß. Die entsprechende Regel könnte in nullter Näherung und im Jargon traditioneller Philosophie etwa so lauten:

[1] Vom Allgemeinen darf man zum Einzelnen übergehen.

Die Handlung des Übergehens, des Gehens von..zu.., des discurrere, des Schließens bzw. Folgerns, wird vollzogen, indem ein passender Folgerungssatz geäußert wird; gefolgert wird dabei gerade die Aussage des geäußerten Satzes. >Das Einzelne< ist mithin eine Aussage, und zwar eine solche, die dort über Einzelnes spricht, wo die Prämisse allgemein gehalten ist. Ebenso ist >das Allgemeine< keine mysteriöse Größe, sondern eine Aussage einer

bestimmten Sorte, eine Allgemein- oder Universalaussage. Spricht man die folgerbare Aussage vorläufig als Spezialisierung der Universalaussage an und stellt man überdies in Rechnung, daß die Universalaussage – in welcher Weise auch immer – in einem Diskurs schon gewonnen sein muß, gegebenenfalls in Abhängigkeit von weiteren Aussagen, dann bietet sich folgende Formulierung an:

[1]* Wenn man eine Universalaussage in Abhängigkeit von weiteren Aussagen gewonnen hat, darf man jede ihrer Spezialisierungen bei Aufrechterhaltung der Abhängigkeiten folgern.

Was genau sind Universalaussagen? Aus Sicht der Logischen Grammatik entstehen diese dadurch, daß ein Universalquantor, ein Gebilde der Form ‘für alle ω‘, auf eine Formel Δ, in der genau/höchstens ω frei ist, angewendet wird; deshalb spricht man auch von Universalquantifikationen. Spezialisierungen werden gewonnen, wenn Nominatoren θ in Δ an die Stelle der Variablen ω treten, für diese substituiert werden. Was aber sind Formeln, was Nominatoren, was ist mit der Wendung ‘an die Stelle von etwas treten’ bzw. ‘substituieren’ gemeint? – Zunächst die abschließende >kanonische< Formulierung der Regel, die üblicherweise und deshalb auch im folgenden als Universal(quantor)beseitigung (UB) geführt wird; die grammatischen Termini sind unterstrichen:

[1]** Wenn man die Universalquantifikation einer Formel Δ bezüglich ω in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse *X* gewonnen hat, dann darf man das Ergebnis der Substitution eines Nominators θ für ω in Δ in Abhängigkeit von *X* folgern.

Wählt man ‘Also___’ als Folgerungsperformator und deutet man die möglichen Prämissenredehandlungen, das Annehmen, Anziehen oder Folgern, und die Abhängigkeit durch die Zeichenverbindung ‘Ξ_X’ an, dann liest sich das Schulbeispiel für die in [1] bis [1]** beschriebene Schlußform so:

[2] Ξ_X Für alle *x*: Wenn *x* ein Mensch ist, dann ist *x* sterblich

Also Wenn Sokrates ein Mensch ist, dann ist Sokrates sterblich

Dabei instanziiert ‘Wenn *x* ein Mensch ist, dann ist *x* sterblich’ die Formel Δ, ‘*x*’ korrespondiert ω, und ‘Für alle *x* gilt: Wenn *x* ein Mensch ist, dann ist *x* sterblich’ ist die Universalquantifikation von ‘Wenn *x* ein Mensch ist, dann ist *x* sterblich’ bzgl. ‘*x*’. ‘Sokrates’ instanziiert den Nominator θ und ‘Wenn Sokrates ein Mensch ist, dann ist Sokrates sterblich’

ist das Ergebnis der Substitution von ‘Sokrates’ für ‘*x*’ in ‘Wenn *x* ein Mensch ist, dann ist *x* sterblich’.

Die Ausführungen dieses Kapitels dienen dazu, die bei der Formulierung von Folgerungs-, Einführungs- und anderen Redehandlungsregeln und bei zugeordneten analysierenden Unternehmungen benötigte grammatische Begrifflichkeit exemplarisch und (im Ansatz) begrifflich darzutun und so die Redehandlungsregeln von der grammatischen Seite her zugänglich zu machen.

Schon jetzt ist jedoch auf das Vorordnungsverhältnis zwischen Grammatik und Performatorik abzustellen: Wenn man eine Sprache konstruiert, hat man zunächst ihre Grammatik und auf dieser Basis ihre Performatorik zu konstruieren; Analoges für die Spracherschließung. Für die Sprachkonstruktion ausgeführt: Zunächst ist anzugeben, welches die atomaren Kategorien einer Sprache sind und welche Ausdrücke als Mitglieder vorgesehen sind. Sodann ist anzugeben, wie sich aus den atomaren Gebilden die molekularen ergeben. Schließlich sind die Hilfsbegriffe und Operationen zu charakterisieren, die außerdem zur Regelformulierung benötigt werden (↑5, 6, 14, 15.).

Die Beherrschung der grammatischen Kategorialität bildet die Voraussetzung für die (reflexe) korrekte Ausführung, Kontrolle und Beurteilung des Schließens und Einführens, damit aber für die korrekte Ausführung, Kontrolle und Beurteilung von Redesequenzen im allgemeinen und Diskursen im besonderen. Im Sinne einer raschen Aneignung empfiehlt es sich dringend, über die Übungen hinaus die allgemeinen Erläuterungen mit selbst gebildeten Beispielen aus der lebensweltlichen Gebrauchssprache, aus den Wissenschaftssprachen und - insbesondere - aus der philosophischen Sprache zu versehen.

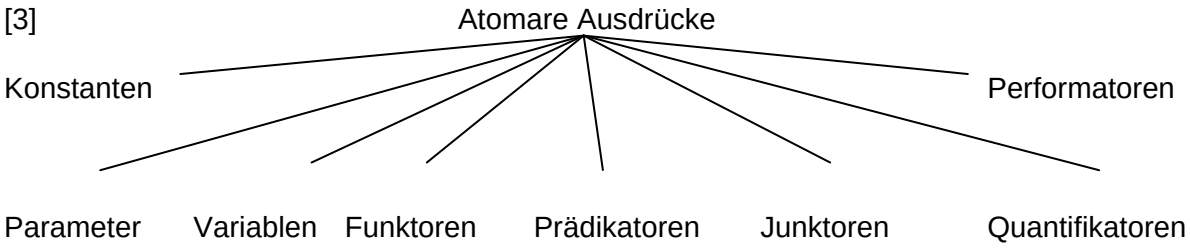
3.2 Standardgrammatik erster Stufe

Im folgenden wird keine Sprache konstituiert und erschlossen. Es finden aber alle bei der Konstruktion von Sprachen mit Standardgrammatik erster Stufe, also von Standardsprachen erster Stufe, benötigten Kategorien und Begriffe Erläuterung in der auch bei der Sprachkonstruktion oder -erschließung üblichen Reihenfolge: zunächst die atomaren Kategorien (3.2.1), sodann die Terme (3.2.2) und Formeln (3.2.3) und schließlich auch die für Konstruktion, Erschließung und Analyse unverzichtbaren Substitutionsoperationen (3.2.4). – Das verwendete Beispielmaterial entstammt vornehmlich, wenn auch nicht ausschließlich, der – so darf vermutet oder doch erhofft werden – jedermann/-frau geläufigen Sprache der elementaren Arithmetik.

3.2.1 Atomare Kategorien

Sprachen mit einer Standardgrammatik erster Stufe enthalten folgende atomare Kategorien: Konstanten, Parameter, Variablen, n-stellige Funktoren, n-stellige Prädikatoren, n-stellige Junktoren, Quantifikatoren und Performatoren. Die Mitglieder dieser Kategorien bilden die atomaren Ausdrücke solcher Sprachen; jeder atomare Ausdruck gehört genau einer dieser Kategorien an:

[3]



Aus den atomaren Ausdrücken werden Quantoren $\Pi\omega$, funktorale Terme $\phi^n(\theta_1,...,\theta_n)$, Formeln Δ und Sätze Σ aufgebaut. Die Mitglieder dieser molekularen Kategorien bilden die molekularen Ausdrücke solcher Sprachen (↑3.2.2, 3.2.3). Die atomaren und molekularen Kategorien sind elementfremd und erschöpfend: Jeder Ausdruck gehört höchstens und wenigstens, also genau einer Kategorie an.

(Individuen)Konstanten oder auch (Einzel- bzw. Eigen- oder Gegenstands)Namen α sind nicht weiter zerlegbare Ausdrücke ohne (oder mit wenig) beschreibendem Gehalt, mit denen Autoren sich auf genau eine Gegebenheit beziehen. Die Ziffer '13', der Personenname 'Johann Sebastian Bach', die Flußbezeichnung 'die Ruhr' und die Epochenbezeichnung 'Die Renaissance' sind Konstanten der jeweiligen Sprache (↑7.).

(Individuen)Parameter β sind >unspezifische< Konstanten, die in quantifizierten Folgerungskontexten eine Stellvertreterfunktion ausüben (↑4.3). Genauer spielen sie im Zusammenhang mit der Regel der Universalquantoreinführung und der Partikularquantorbeseitigung eine Sonderrolle, die für die erste Regel erläutert wird: Will man eine Universalaussage, z.B. 'Für-alle-*y*, Für-alle-*x* (Wenn *x*>*y*, dann nicht *y*>*x*)' beweisen, dann nimmt man im Standardverfahren für beliebig, aber fest gewählte Gegebenheiten x, y an, daß zwischen ihnen das Antezedensverhältnis besteht: Sei_1 x>y. Zu dieser Aufgabe taugen wegen ihrer Spezialität Individuenkonstanten nicht: Von ihnen gelten weitere, in diesem Kontext möglicherweise irreführende Eigenschaften. Dann zeigt man in Abhängigkeit von der angenommenen Aussage, daß die Negation des Umkehrverhältnisses gilt: $Also_1$ nicht y>x; dabei darf bezüglich x und y nur der Umstand benutzt werden, daß zwischen ihnen das in der Annahme festgehaltene Verhältnis besteht. Sodann kann man sich von der Abhängigkeit

befreien durch Subjunktoreinführung: Also: Wenn x>y, dann nicht y>x. Kommen ‘x’ und ‘y’ nicht in Prämissen vor, von denen die Subjunktion abhängt, dann ist ganz allgemein gezeigt worden, daß nicht y>x, falls x>y. Das erlaubt die Universalquantoreinführung explizit zu machen, die, zweimal angewendet, die gewünschte Universalaussage: Für-alle-*x*, Für-alle-*y*(Wenn *x>y*, dann nicht *y>x*), ergibt. - Standardsprachen erster Stufe enthalten abzählbar unendlich viele Parameter; zu Beispielzwecken und auch bei der Konstruktion von Sprachen werden im folgenden die Buchstaben ‘x’, ‘y’, ‘z’, ‘u’, ‘v’, ‘w’, ‘x_1’, ‘y_1’, ‘z_1’, ‘u_1’, ‘v_1’, ‘w_1’, ‘x_2’, ‘y_2’, ‘z_2’, ‘u_2’, ‘v_2’, ‘w_2’, … verwendet; Parameter werden also - im Gegensatz zu Variablen - nicht kursiv geschrieben. - Für ‘Parameter’ findet sich gelegentlich auch der (irreführende) Ausdruck ‘freie Variable’ oder die Wendung ’anonyme Konstante‘.

(Individuen)<u>Variablen</u> ω dienen im Verein mit Quantifikatoren dem Ausdruck quantitativer Verhältnisse. In den Gebrauchssprachen übernehmen häufig universale Worte wie ‘Ding’, ‘Gegenstand’, ‘Gegebenheit’, ‘etwas’ usf. die Rolle von Variablen: Für beliebige Gegebenheiten gilt: Wenn eine Gegebenheit die und die Eigenschaft hat, besitzt sie auch die und die Eigenschaft, wenn etwas so und so ist, ist es auch so und so. - Damit die Quantoren, die aus Quantifikatoren und Variablen entstehenden Gebilde, ihre Arbeit, die Artikulation quantitativer Verhältnisse, verrichten können, kommen Variablen auch in den quantifzierten Formeln vor. - Standardsprachen erster Stufe enthalten abzählbar unendlich viele Variablen; zu Beispielzwecken wurden vorstehend und werden im folgenden die kursiven Buchstaben ‘*x*’, ‘*y*’, ‘*z*’, ‘*u*’, ‘*v*’, ‘*w*’, ‘x_1’, ’y_1’, ‘z_1’, ‘u_1’, ‘v_1’, ‘w_1’, ‘x_2’, ’y_2’, ‘z_2’, ‘u_2’, ‘v_2’, ‘w_2’, … verwendet.

Während die (Individuen)Konstanten Schlüsse auf die (materiale) Eigenart einer Sprache zulassen, kommen (Individuen)Variablen und (Individuen)Parameter in allen Sprachen erster Stufe vor. Variablen und Parameter bedürfen keiner eigenen Einführung, sondern werden lediglich mitreglementiert: Indem die Verwendung der Quantoren umrissen wird, ist auch schon die Verwendung der Variablen und Parameter geregelt (↑4.3). - Der Zusatz ‘Individuen’ empfiehlt sich dann, wenn - bei der Erörterung von Sprachen höherer Stufe (↑3.3.3) - auch von Prädikatorkonstanten, -parametern und -variablen die Rede ist.

n-stellige <u>Funktoren</u> oder Funktionskonstanten ϕ^n sind Ausdrücke, die auf Terme (↑3.2.2) angewendet werden. ‘der-Vater-von(..)’, ‘der-Anfang-von(..)’, ‘der-absolute-Betrag-von(..)’ bzw. ‘$|..|$’ sind Beispiele für einstellige Funktoren. ‘die-Summe-von-und(..,..)’ bzw. ‘+(..,..)’, ‘der-Akkord-aus-und-und(..,..,..)’, ‘der-Wasserstand-des-am-in-um(..,..,..,..)’ sind Beispiele für zwei-, drei- und vierstellige Funktoren.

n-stellige <u>Prädikatoren</u> Φ^n sind Ausdrücke, die ebenso wie Funktoren auf Terme (↑3.2.2) angewendet werden; allerdings ergeben sich als Anwendungsresultate Formeln (↑3.2.3),

keine (weiteren) Terme. ‘Ist-eine-natürliche-Zahl(..)’, ‘Ist-ein-Realist(..)’, ‘Ist-männlich(..)’ sind Beispiele für einstellige Prädikatoren. ‘Ist-größer-als(..,..)’, ‘Ist-Beispiel-für(..,..)’, ‘Ist-Vater-von(..,..)’ sind Beispiele für zweistellige Prädikatoren. ‘Ist-Summe-von-und(..,..,..)’, ‘Begrüßt-in-am(...,..,..,..)’, ‘Trifft-am-um-in-mit-zusammen(..,..,..,..,..)’, ‘Fährt-am-um-nach-zu-wegen (..,..,..,..,..,..)’ sind Beispiele für drei-, vier-, fünf- und sechstellige Prädikatoren. - Auch Prädikatoren (mit Ausnahme des Identitätsprädikators (↑4.4)) und Funktoren sind für die materiale Eigenart von Sprachen aufschlußreich. – Einstellige Funktoren bzw. Prädikatoren werden auch als monadische Funktoren bzw. Prädikatoren geführt, mehrstellige als polyadische. Diese Terminologie wird gelegentlich auch auf Operatoren aller Art übertragen.

Für die Prädikatoren finden sich in der Literatur u.a. die Ausdrücke ‘Prädikat’, ‘genereller Term’, ‘universeller Term’ und ‘Prädikatkonstante’, für die einstelligen auch ‘Eigenschafts-’ bzw. ‘Begriffswort’, für die mehrstelligen auch ‘Relations-’ oder ‘Beziehungswort’ oder ‘Relator’. Diese Varianten finden im Sinne der terminologischen Auflockerung gelegentlich Verwendung.

Prädikatoren sind nicht zu verwechseln mit Prädikaten im Sinne der traditionellen Grammatik. Will man die Redemittel der traditionellen Grammatik verwenden, dann sind die einstelligen Prädikate z.B. als Kopula + unbestimmter Artikel + Substantiv (z.B. ‘Ist-eine-Handlung(..)’), als Kopula + Adjektiv (‘Ist-beige(..)’) oder als intransitives (z.B. ‘Schläft(..)’) oder transitives Verb (z.B. ‘Schlägt(..,..)’) zu beschreiben.

Ü1 a) Suchen Sie Beispiele für Individuenkonstanten, für ein- und mehrstellige Funktoren, ein- und mehrstellige Prädikatoren aus der lebensweltlichen Gebrauchssprache, der philosophischen Sprache und einer weiteren Wissenschaftssprache Ihrer Wahl!

b) Man verdeutliche sich den material unbeschränkten Anwendungsbereich der Kategorisierung von Redeteilen, indem man Prädikatoren zusammenstellt für: ausschließlich Naturobjekte, Naturereignisse, Handlungen, Agenten und Handlungsutensilien, (soziale, kulturelle, technische) Artefakte, Zustände von Personen, Analytische Zusammenhänge, Raum- und Zeitzusammenhänge, Qualitäten von Körpern und Substanzen.

Junktoren ψ^n sind Ausdrücke, die auf Formeln angewendet werden; das Resultat sind wiederum Formeln (↑3.2.3). Die Ausdrücke ‘nicht(___)’, ‘es-ist-möglich(___)’, ‘es-ist-geboten(___)’ exemplifizieren einstellige Junktoren. Beispiele für zweistellige Junktoren sind z.B. die Redeteile ‘und(___,___)’, ‘wenn-dann(___,___)’, ‘oder(___,___)’. In der Praxis kommt man mit ein- und zweistelligen Junktoren aus.

Die Quantifikatoren Π werden stets auf Variablen angewendet, so daß sich Quantoren ergeben. Beispiele für Quantifikatoren sind z.B. ‘Für-alle..’, ‘Für-wenigstens-ein..’, ‘Für-genau-ein..’, ‘Für-die-meisten..’, ‘Für-ganz-wenige..’. - Im Lichte einer später zu treffenden Unterscheidung werden die hier erörterten Quantifikatoren und Quantoren als Formelquantifikatoren und Formelquantoren zusammengefaßt und den Termquantifikatoren und Termquantoren gegenübergestellt (↑3.3.2).

An die Performatoren Ξ und die entsprechenden Beispiele braucht hier nur erinnert zu werden: Performatoren, z.B. ‘Also___’, werden auf Formeln angewendet und ergeben Sätze (↑2.1.4, 3.2.3). - Die Klassen aus Namen, Parametern, Variablen, Funktoren, Prädikatoren, Junktoren, Quantifikatoren und Performatoren bilden gemeinsam das Inventar (↑2.2.3) der jeweiligen Sprache.

Konstanten, Variablen und Parameter sind Ausdrücke, auf die andere Ausdrücke angewendet werden. Alle anderen atomaren Ausdruckskategorien sind solche, die ihrerseits auf Gebilde angewendet werden. In Vorwegnahme einer früher schon beanspruchten (↑2.1.4) und später etablierten Terminologie (↑3.3.1) kann formuliert werden: Konstanten, Variablen und Parameter zählen zur Kategorie der Operanden o, während die restlichen atomaren Gebilde zu den n-stelligen Operatoren τ^n zu rechnen sind. Die freien Stellen der Operatoren, die auf Terme angewendet werden, werden durch zwei Punkte ‘..’ notiert, die freien Stellen der Operatoren, die auf Formeln Anwendung finden, werden durch ‘___’, die Horizontale, signalisiert. Operata μ der Gestalt $\tau^n(o_1, ..., o_n)$ entstehen aus der Anwendung eines n-stelligen Operators τ^n auf n Operanden $o_1, ..., o_n$.

Wie ergeben sich nun aus den atomaren Ausdrücken, den >Bausteinen< einer Standardsprache erster Stufe, die molekularen Gebilde bzw. wie sind die schon erwähnten molekularen Gebilde erklärt?

3.2.2 Terme - Termformen - Nominatoren

Konstanten, Variablen und Parameter sind atomare Terme; sonst ist kein Gebilde atomarer Term. Die Klasse der atomaren Terme zerfällt demnach vollständig (exhaustiv) und elementefremd (disjunkt) in die Klasse der Variablen, Parameter und Konstanten. Jeder atomare Term gehört wenigstens und höchstens, also genau einer der drei genannten Kategorien an. Sodann sei festgelegt: (i) Ist θ ein atomarer Term, so ist θ ein Term. (ii) Wendet man n-stellige Funktoren ϕ^n auf n Terme $\theta_1,...,\theta_n$ an, so entstehen (funktorale) Terme der Gestalt $\phi^n(\theta_1,...,\theta_n)$. (iii) Sonst ist nichts ein Term. So resultiert aus der Anwendung des einstelligen Funktors ‘der-

Vater-von(..)' auf 'P.E.Bach' der funktorale Term 'der-Vater-von(P.E.Bach)', und aus der Anwendung des zweistelligen Funktors 'die-Summe-von-und(..,..)' auf '13' und 'der-Nachfolger-von(1)' ergibt sich der funktorale Term 'die-Summe-von-und(13, der Nachfolger von (1))'. Zur Übersicht und in Erweiterung der Beispiele:

[4] Funktor ϕ^n

a) der-Vater-von(..)

b) die-Summe-von-und(..,..)

c) der-Akkord-aus-und-und(..,..,..)

d) der-Wasserstand-des-am-um-in(..,..,..,..)

Terme $\theta_1,...,\theta_n$

a) P.E.Bach

b) 13, der-Nachfolger-von(1)

c) c, e, g

d) Rhein, 24.12.95, 12°°, Bingen

Funktorale Terme $\phi^n(\theta_1,...,\theta_n)$

a) der-Vater-von(P.E.Bach)

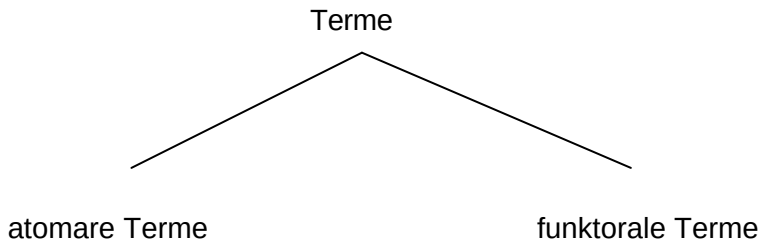
b) die-Summe-von-und(13, der-Nachfolger-von(1))

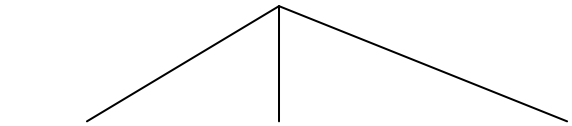
c) der-Akkord-aus-und-und(c, e, g)

d) der-Wasserstand-des-am-um-in(Rhein, 24.12.1995, 12°°, Bingen)

Wie das Beispiel b) zeigt, dürfen Funktoren auch auf funktorale Terme angewendet werden. Insgesamt gilt damit: Ein Gebilde θ ist ein Term genau dann, wenn θ (i) atomarer Term oder (ii) funktoraler Term ist. Die Klasse der Terme zerfällt demzufolge vollständig und elementefremd in die Klasse der atomaren und die Klasse der funktoralen Terme; unter Berücksichtigung der Klassifikation der atomaren Terme resultiert:

[5]





Später wird sich eine Differenzierung der Terme ergeben, die die funktoralen Terme lediglich als echte Teilklasse der molekularen Terme erscheinen läßt (↑3.3.2). – Mit Hilfe der Operatorenterminologie lassen sich Funktoren abschließend als n-stellige, termbestimmende und termerzeugende Operatoren charakterisieren.

Ü2 a) Erzeugen Sie funktorale Terme $\phi^n(\theta_1,...,\theta_n)$, indem Sie einige der in Ü1 gefundenen Funktoren ϕ^n auf n Terme $\theta_1,...,\theta_n$ anwenden.

b) Analysieren Sie die Zeichenverbindung ‘der-Anfang-von(das-Ende-von(die-Geschichte-von(die-Welt)))‘

Die vorgelegte Termbestimmung erweckt in der Klausel (ii) den Anschein der Zirkularität: Terme werden bestimmt als etwas, das aus der Anwendung eines Funktors auf Terme entsteht. Nun soll aber andererseits gerade der Termbegriff charakterisiert werden! Der Zirkelverdacht wird zerstreut, wenn man sich anhand der Arbeitsweise der Termdefinition vor Augen führt, daß Termschaft letztlich stets im Rekurs auf das erste Bestimmungsstück – atomare Terme sind Terme und atomare Termschaft wird ohne Rekurs auf Termschaft charakterisiert – festgestellt wird: Ist die Zeichenverbindung ‘das-Produkt-von-und (2,die-Summe-von-und(4,der-Vorgänger-von(3)))’ ein Term? Der aufbauende (aufsteigende synthetisierende, zusammenfügende usf.) Weg von unten nach oben (bottom-top) läuft so: ‘3’ ist ein atomarer Term, also nach (i) Term. Da ‘der-Vorgänger-von(3)’ aus der Anwendung des einstelligen Funktors ‘der-Vorgänger-von(..)’ auf den Term ‘3’ entsteht, liegt ein funktoraler Term, nach (ii) also ein Term vor. Nun ist ‘4’ Konstante, also atomarer Term, also nach (i) Term. Da ‘4’ und ‘der-Vorgänger-von(3)’ Terme sind, ist das Ergebnis der Anwendung des zweistelligen Funktors ‘die-Summe-von-und(..,..)’ auf diese Terme funktoraler Term, nach (ii) also Term. Da ferner ‘2’ Konstante, also atomarer Term, also nach (i) Term ist, ist auch ‘das-Produkt-von-und(2,die-Summe-von-und(4,der-Vorgänger-von(3)))’, also das Ergebnis der Anwendung des zweistelligen Funktors ‘das-Produkt-von-und(..,..)’ auf ‘2’ und ‘die-Summe-von-und(4,der-Vorgänger-von(3))’ ein funktoraler Term, nach (ii) also ein Term.

Der zerlegende (absteigende, analysierende, auflösende usf.) Weg von oben nach unten (top-bottom) ist dieser: Da ‘das-Produkt-von-und(..,..)’ ein zweistelliger Funktor ist, stellt ‘das-

Produkt-von-und(2,die-Summe-von-und(4,der-Vorgänger-von(3)))' einen funktoralen Term, nach (ii) also einen Term dar, falls '2' und 'die-Summe-von-und(4,der-Vorgänger-von(3))' Terme sind. Damit verzweigt sich die Überlegung: a) '2' ist atomarer Term, nach (i) also Term. b) Da 'die-Summe-von-und(..,..)' zweistelliger Funktor ist, ist 'die-Summe-von-und(4,der-Vorgänger-von(3))' funktoraler Term, nach (ii) also Term, falls '4' und 'der-Vorgänger-von(3)' Term ist. Damit verzweigt sich die Überlegung neuerlich: ba) '4' ist atomarer Term, nach (i) also Term. bb) 'der-Vorgänger-von(3)' ist das Ergebnis der Anwendung des einstelligen Funktors 'der-Vorgänger-von(..)' auf '3', mithin funktoraler Term, demnach nach (ii) Term, falls '3' Term ist. Da dies zutrifft, ist bb), und damit b), und damit die Gesamtüberlegung positiv abgeschlossen.

Die vermutete Zirkularität wird dadurch verhindert, daß mit den atomaren Termen eine Rekurs- und Startbasis bereitsteht, die nicht dadurch gewonnen wird, daß Funktoren auf Terme angewendet werden. Die Beispielbetrachtung soll auch klarlegen, daß in diesem Falle insofern keine Zirkularität vorliegt, als zur Bestimmung der Termschaft von θ, im Beispiel: 'das-Produkt-von-und(2, die-Summe-von-und(4,der-Vorgänger-von(3)))', nicht über die Termschaft von θ, sondern über den Termcharakter eines von θ verschiedenen Teilterms θ^*, z.B. von '2' zu befinden ist.

Ü3 Zeigen Sie an einem der in Ü2 erzeugten Beispiele durch eine Top-bottom- und eine Bottom-top-Überlegung, daß es sich gemäß der Termcharakterisierung tatsächlich um einen Term handelt!

Soeben wurde der Begriff des Teilterms verwendet; er ist für jeden Term θ wie folgt festgelegt: (i) Wenn θ mit dem Term θ' identisch ist, dann ist θ <u>Teilterm</u> des Terms θ'. (ii) Wenn $\theta_1,...,\theta_n$ Terme sind und der Term θ ein Teilterm eines θ_i (mit $1 \leq i \leq n$) ist, dann ist θ ein <u>Teilterm</u> des funktoralen Terms $\phi^n(\theta_1,...,\theta_n)$. (iii) Sonst ist θ von nichts ein Teilterm. Damit sind die Ausdrücke 'P.E.Bach' und 'der-Vater-von(P.E.Bach)' Teilterme des Terms 'der-Vater-von(P.E.Bach)'; der Funktor 'der-Vater-von(..)' ist hingegen kein Teilterm des funktoralen Terms 'der-Vater-von (P.E.Bach)'.

Ü4 a) Notieren Sie die (d.h. alle) Teilterme der Terme: '*x*', '12', 'die-Gattin-von(der-Vater-von(P.E.Bach))', 'der-Wasserstand-des-am-um-in(Rhein,*x*,12°°,*y*)'!

b) Weisen Sie die Teiltermschaft an einem Beispiel im Detail nach!

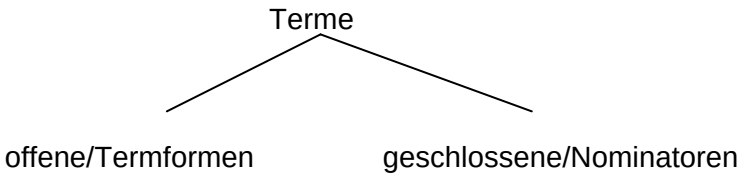
Die Charakterisierung der Teiltermschaft scheint ebenfalls (wie auch die meisten weiteren Definitionen) zirkulär. Aber auch hier gilt: Die Bestimmung (ii) rekurriert letztlich auf den Teil (i); und dieser ist frei von Zirkularität. – Jeder Term ist Teilterm seiner selbst. Ist ein

beliebiger Term θ Teilterm des Terms θ‘ und ist auch das Umgekehrte der Fall, dann ist θ mit θ‘ identisch. Ist ferner θ Teilterm von θ‘ und θ‘ Teilterm von θ*, dann ist auch θ Teilterm von θ*. Diese drei Tatsachen lassen sich kürzer (und b.a.w. informell) so ausdrücken: Die Teiltermschaft ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv.

θ <u>ist ein in</u> ω <u>offener Term</u> bzw. <u>eine Termform in</u> ω, wenn ω Variable und Teilterm des Terms θ ist; ‘der Vater von (*x*)’ ist ein in der Variablen ‘*x*’ offener Term, ‘die-Summe-von-und(*x*,*y*)’ ist Termform sowohl in ‘*x*’ wie auch in ‘*y*’.

<u>Geschlossene Terme</u> oder <u>Nominatoren</u> (oder auch singuläre Terme, Gegenstandsbezeichnungen usf.) sind Terme, aber keine offenen Terme: ‘P.E.Bach’ und ‘der-Vater-von(P.E.Bach)’ exemplifizieren (atomare und funktorale) Nominatoren. – Terme zerfallen demnach exhaustiv und disjunkt in offene oder Termformen und geschlossene oder Nominatoren:

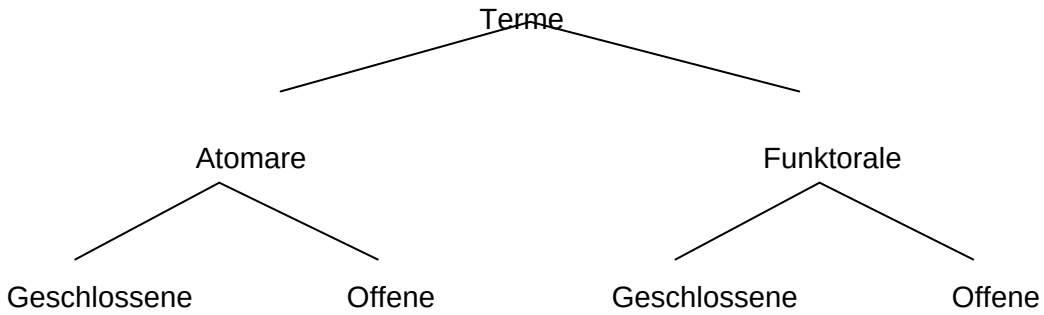
[6]

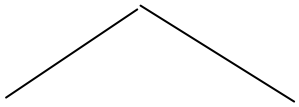


Ü5 Entscheiden Sie mit Hilfe der Definitionen unter den Gesichtspunkten Atomarität-Funktoralität und Offenheit-Geschlosssenheit, um welche Termart es sich bei den folgenden Ausdrücken handelt: ‘*x*’, ‘die-Summe-von-und(*z*,5)’, ‘die-Summe-von-und (x,3)’,‘der-Rhein’, ‘der-Zeitraum-zwischen-und(die-Renaissance,*x*)’, ‘das-Ende-von (die-Kunst)‘.

Abschließend ergibt sich folgende Einteilung der Terme θ: Terme zerfallen in atomare und funktorale. Beide Untergruppen lassen sich exhaustiv und disjunkt in offene und geschlossene zerlegen. Die Variablen ω sind die offenen atomaren Terme, die Parameter β und die Konstanten α stellen die geschlossenen atomaren Terme dar; die angezielte Kombination von [5] und [6] läßt sich in folgendem Baum präsentieren:

[7]





(Variablen)

Konstanten Parameter

Ü6 Zeichnen Sie die Alternative zum Klassifikationsbaum [7], die dadurch entsteht, daß man mit der Einteilung nach Geschlossenheit-Offenheit beginnt und mit der Einteilung nach Atomarität-Funktoralität fortsetzt!

Bei der Behandlung der Bezugnahme auf Gegenstände, der Nomination, werden auch die in der lebensweltlichen Gebrauchssprache unverzichtbaren umgebungssensitiven Redeteile, die Indikatoren, den atomaren geschlossenen Termen zugeschlagen (↑7.).

3.2.3 Formeln-Aussageformen-Aussagen

Die Formelbestimmung nimmt ihren Ausgang bei den Elementarformeln: Γ <u>ist eine Atomformel</u> genau dann, wenn Γ aus der Anwendung eines n-stelligen Prädikators Φ^n auf n Terme $\theta_1,...,\theta_n$ entsteht. Aus der Anwendung des einstelligen Prädikators ‘Ist-Komponist(..)’ auf ‘*x*’, aus der Anwendung des zweistelligen Prädikators ‘Ist-Vater-von(..,..)’ auf ‘J.S.Bach’ und ‘P.E.Bach’ und aus der Anwendung des dreistelligen Prädikators ‘Ist-Summe-von-und(..,..,..)’ auf ‘3’, ‘der-Vorgänger-von(2)’ und ‘der-Nachfolger-von(1)’ entstehen die jeweiligen Atomformeln. – Im Überblick und in Erweiterung der Beispielbasis:

[8] <u>Prädikatoren Φ^n</u>

a) Ist-Komponist(..)

b) Ist-Vater-von(..,..)

c) Ist-Summe-von-und(..,..,..)

d) Trifft-am-um-in(..,..,..,..,..)

e) Fährt-am-von-nach-zu-wegen(..,..,..,..,..,..)

<u>Terme $\theta_1,...,\theta_n$</u>

a) *x*

b) J.S.Bach, *y*

c) 3, der-Vorgänger-von(2), der Nachfolger-von(*y*)

d) der-Kanzler-der-im-Jahre(BRD, 1996), x, 14. Juli, 16°°, Bonn

e) x, 03.03.96, Hamburg, München, y, die-Regelung-von(der-Nachlaß-von(z))

Atomformeln $\Phi^n(\theta_1,...,\theta_n)$

a) Ist-Komponist(*x*)

b) Ist-Vater-von(J.S.Bach,y)

c) Ist-Summe-von-und (3, der-Vorgänger-von (2), der-Nachfolger-von (*y*))

d) Trifft-am-um-in(der-Kanzler-der-im-Jahre(BRD,1995), x, 14. Juli, 16°°, Bonn)

e) Fährt-am-von-nach-zu-wegen(x, 03.03.95, Hamburg, München, y, die-Regelung-von (der-Nachlaß-von(z)))

Atomformeln werden häufig auch als 'atomare Formeln' oder als 'Primformeln' angesprochen. Gelegentlich findet sich auch die Bezeichnung 'Elementarformel' bzw. 'elementare Formeln'. Diese Ausdrucksverbindungen werden in der Folge etwas anders gebraucht: Elementarformeln sind Atomformeln oder Negationen von Atomformeln. Alle Atomformeln stellen Elementarformeln dar, aber nicht umgekehrt. – Die Unterscheidung von atomaren und elementaren Formeln wird in der Prädikationslehre (↑ 6.3) benötigt.

Mit Hilfe der Operatorenterminologie lassen sich Prädikatoren abschließend als n-stellige, termbestimmende und formelerzeugende Operatoren charakterisieren. Der Unterschied zu den Funktoren besteht also in der jeweils erzeugten Ausdruckskategorie.

Die Charakterisierung der (Atom)Formeln, und damit auch der Formeln, erfolgt im Rückgriff auf die Terme. Der umgekehrte Rekurs findet in Standardsprachen erster Stufe nicht statt: Um zu sagen, was Terme sind, muß man, wie vorgeführt (↑3.2.2), nicht auf die Formelbestimmung zurückgreifen. Ein solches Vorgehen wird erst dann unvermeidlich, wenn Sprachen auch Termquantoren und Quantorterme umfassen, wenn – inhaltlich gesprochen – für die Bezugnahme auf Gegenstände das Prädikationspotential der Sprache mit den entsprechenden Verknüpfungsmöglichkeiten dienstbar gemacht wird. (↑3.3.2).

Ü7 Bilden Sie Atomformeln mit einigen der Prädikatoren, die Sie in Ü1 gefunden haben!

Wendet man n-stellige Junktoren ψ^n auf n Formeln $\Delta_1,...,\Delta_n$ an, dann entstehen Junktorformeln oder junktorale Formeln der Gestalt $\psi^n(\Delta_1,...,\Delta_n)$. Beispiele: Aus der Anwendung des einstelligen Junktors 'nicht(__)' auf die Formel 'Ist-Vater-von(J.S.Bach,P.E.Bach)' entsteht die Junktorformel 'nicht(Ist-Vater-von(J.S.Bach, P.E.Bach))'; aus der Anwendung des zweistelligen Junktors 'und(__,__)' auf die Formeln 'Ist-Summe-von-und(*x*,3,*y*)' und 'oder(=(0,0),≠(0,0))' entsteht die Junktorformel 'und(Ist-Summe-von-und(*x*,3,*y*)), oder(=(0,0),≠(0,0))'. – Im Überblick und in Erweiterung der Beispielbasis:

[9] <u>n-stellige Junktoren ψ^n</u>

a) nicht(__)

b) verboten(__)

c) und(__,___)

d) wenn-dann(__,__)

<u>n Formeln $\Delta_1,...,\Delta_n$</u>

a) Ist-Primzahl(5)

b) Für-alle-*x*(und(Beleidigt (*x,* y), Verprügelt (*x*, y)))

c) Ist-Summe-von-und(*x*,3,*y*), oder(=(0,0),≠(0,0))

d) Ist-Gerade-Zahl(5), Teilt(2,5)

<u>Junktorformeln $\psi^n(\Delta_1,...,\Delta_n)$</u>

a) nicht (Ist-Primzahl(5))

b) verboten(Für-alle-*x*(und(Beleidigt (*x,* y), Verprügelt (*x*, y))))

c) und(Ist-Summe-von-und(*x*,3,*y*), oder(=(0,0) ,≠(0,0)))

d) wenn-dann(Ist-Gerade-Zahl(5), Teilt(2,5))

Die Formeln, auf die die Junktoren angewendet werden, können Formeln aller Art sein, also sowohl Atomformeln als auch Junktor- oder (die im nächsten Schritt erklärten) Quantorformeln.

Ü8 Unterziehen Sie die Formeln $\Delta_1,...,\Delta_n$ von [9]a),c),d) einer weiteren grammatischen Analyse!

Mit Hilfe der Operatorenterminologie lassen sich Junktoren nunmehr als <u>n-stellige, formelbestimmende und formelerzeugende Operatoren</u> charakterisieren. – Die Kernjunktoren sind im weiteren von besonderer Wichtigkeit; hinter dem wortsprachlichen Ausdruck sind gebräuchliche und im folgenden auch verwendete Abkürzungen notiert, dahinter folgt der Name. Ferner sind deontische und modale Junktoren, ebenfalls mit Abkürzungen und Bezeichnungen, angegeben:

[10] <u>Kernjunktoren</u>

nicht(__) ¬(__) , ~(__) der Negator

und(__,__)	$\wedge$(__,__)	, &(__,__)	der Konjunktor
oder(__,__)	$\vee$(__,__)	, v(__,__)	der Adjunktor
wenn-dann(__,__)	$\rightarrow$ (__,__)	, $\Rightarrow$(__,__)	der Subjunktor
genau-dann-wenn(__,__)	$\leftrightarrow$ (__,__)	, $\Leftrightarrow$(__,__)	der Bisubjunktor
<u>Deontische Junktoren</u>			
es-ist-erlaubt(__)	E(__)		der Erlaubnisjunktor
es-ist-verboten(__)	V(__)		der Verbotsjunktor
es-ist-geboten(__)	G(__)		der Gebotsjunktor
es-ist-indifferent(__)	I(__)		der Indifferenzjunktor
<u>Modale Junktoren</u>			
es-ist-notwendig(__)	N(__)		der Notwendigkeitsjunktor
es-ist-möglich(__)	M(__)		der Möglichkeitsjunktor
es-ist-wirklich(__)	W(__)		der Wirklichkeitsjunktor
es-ist-kontingent(__)	K(__)		der Kontingenzjunktor

Das Ergebnis der Anwendung des Negators auf eine Formel Γ ist <u>die Negation von</u> Γ; Γ ist <u>das Negatum</u>. Das Ergebnis der Anwendung des Adjunktors/Konjunktors/Subjunktors/ Bisubjunktors auf Formeln A und B ist <u>die Adjunktion/Konjunktion/Subjunktion/Bisubjunktion aus</u> bzw. <u>von</u> A <u>und</u> B. Die Formeln A und B sind dann die <u>Adjunktionsglieder</u> bzw. <u>Adjunkte</u>/die <u>Konjunktionsglieder</u> bzw. <u>Konjunkte</u>/das <u>Antezedens</u> bzw. die <u>Wenn-Formel</u> und das <u>Sukzedens</u> bzw. die <u>Dann-Formel</u>/die <u>Bisubjunkte</u> bzw. <u>Bisubjunktionsglieder</u> der jeweiligen Gesamtformel. – Zur Erinnerung: Negierte Atomformeln zählen zu den Elementarformeln.

Ü9 Suchen Sie in den Gebrauchssprachen weitere Junktoren!

Um die Quantorformeln zu bestimmen, ist zuvor zu erläutern, was ein Quantor ist: Wendet man einen <u>Quantifikator</u> Π auf eine Variable ω an, so entsteht <u>der ω-bindende Quantor</u> $\Pi\omega$. So resultieren aus der Anwendung von ‘Für-alle..’ bzw. ‘Für-wenigstens-ein..’ bzw. ‘Für-genau-ein..’ auf die Variable ‘*x*’ bzw. ‘*y*’ bzw. ‘*z*’ die ‘*x*’ bzw. ‘*y*’ bzw. ‘*z*’ bindenden Quantoren ‘Für-alle-*x*___’ bzw. ‘Für-wenigstens-ein-*y*___’ bzw. ‘Für-genau-ein-*z*___’. Die Übersicht enthält zugleich gebräuchliche und im weiteren verwendete Kürzel sowie den Quant(ifikat)ornamen:

[11] Quantifikator Π

a) Für-alle..	$\bigwedge$.., $\forall$..	der Universalquantifikator
b) Für-wenigstens-ein..	$\bigvee$.., $\exists$..	der Partikularquantifikator
c) Für-genau-ein..	**1**.., $\bigvee^1$..	der Eins- bzw. Einzigkeitsquantifikator

Variablen ω

a) x

b) y

c) z

Der ω-bindende Quantor $\Pi\omega$

Für-alle-x___	$\bigwedge x$___, $\forall x$___	der 'x'-bindende Universalquantor
Für-wenigstens-ein-y___	$\bigvee y$___, $\exists y$___	der 'y'-bindende Partikularquantor
Für-genau-ein-z___	**1**z___, $\bigvee^1 z$	der 'z'-bindende Eins- bzw. Einzigkeitsquantor

Ü10 Suchen Sie in den Gebrauchssprachen und mit Hilfe von Lehrbüchern der Logik weitere Quantoren!

Mit Hilfe der Operatorenterminologie lassen sich Quantifikatoren als einstellige, variablenbestimmende und quantorerzeugende Operatoren charakterisieren. Anders als bei Funktoren, Prädikatoren und Junktoren ist der erzeugte Ausdruck seinerseits ein Operator. Wendet man nun einen Quantor $\Pi\omega$ auf eine Formel Δ an, dann entsteht eine Quantorformel bzw. eine quantorale bzw. quantifizierte Formel $\Pi\omega\Delta$; Beispiele:

[12] Quantor $\Pi\omega$

a) $\bigwedge x$___

b) $\bigvee y$___

c) **1**z___

Formel Δ

a) $\rightarrow$(Mensch(x),Sterblich(x))

b) $\wedge$(Gerade-Zahl(y),Primzahl(y))

c) $>(z,y)$

Quantorformel $\Pi\omega\Delta$

a) $\bigwedge x \rightarrow$(Mensch(x),Sterblich(x))

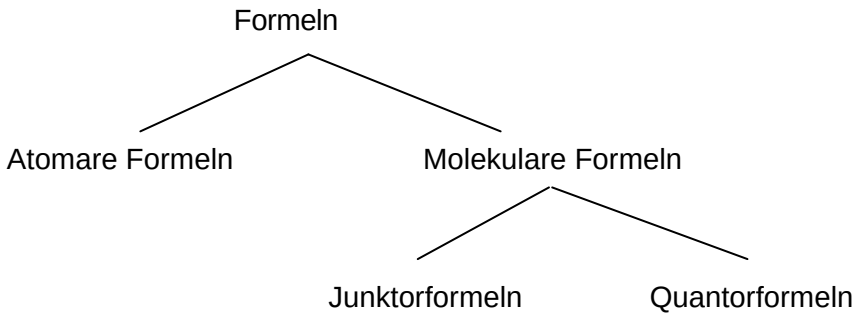
b) $\bigvee y \wedge$(Gerade-Zahl(y),Primzahl(y))

c) $\mathbf{1}z >(z,y)$

Mit Hilfe der Operatorenterminologie lassen sich Quantoren als <u>einstellige, formelbestimmende und formelerzeugende Operatoren</u> charakterisieren; anders als bei den Quantifikatoren und ebenso wie bei Funktoren, Prädikatoren und Junktoren ist das Erzeugungsergebnis kein Operator.

Abschließend kann der Formelbegriff so fixiert werden: Γ <u>ist</u> genau dann <u>eine Formel</u>, (i) Wenn Γ aus der Anwendung eines n-stelligen Prädikators Φ^n auf n Terme $\theta_1,...,\theta_n$ entsteht, Γ also Atomformel $\Phi^n(\theta_1,...,\theta_n)$ ist, dann ist Γ eine <u>Formel</u>. (ii) Wenn Γ aus der Anwendung eines n-stelligen Junktors ψ^n auf n Formeln $\Delta_1,...,\Delta_n$ entsteht, Γ also Junktorformel $\psi^n(\Delta_1,...,\Delta_n)$ ist, dann ist Γ eine <u>Formel</u>. (iii) Wenn Γ aus der Anwendung eines Quantors $\Pi\omega$ auf eine Formel Δ entsteht, Γ also Quantorformel $\Pi\omega\Delta$ ist, dann ist Γ eine <u>Formel</u>. (iv) Sonst ist nichts eine Formel. Quantor- und Junktorformeln bilden gemeinsam die <u>molekularen Formeln</u>. Zur Übersicht:

[13]



Mit Hilfe der Formeldefinition soll gezeigt werden, daß '$\bigvee y \wedge$(Gerade-Zahl(y), Primzahl(y))' eine Formel ist. Der zerlegende Weg nimmt folgenden Verlauf: 'y' ist eine Variable. Da '$\bigvee$..' Quantifikator ist, ist '$\bigvee y$__' ein Quantor. Da aus der Anwendung eines Quantors $\Pi\omega$ auf eine Formel nach (iii) eine Formel entsteht, ist nur noch zu prüfen, ob '$\wedge$(Gerade-Zahl(y),Primzahl(y))' Formel ist. Da '$\wedge$(__,__)' zweistelliger Junktor ist, aus der Anwendung eines zweistelligen Junktors auf Formeln A, B nach (ii) eine Formel entsteht, ist festzustellen, ob es sich bei 'Gerade-Zahl(y)' und 'Primzahl(y)' um Formeln handelt. Da 'y' Variable, damit Atomterm, damit Term ist, und aus der Anwendung eines einstelligen Prädikators Φ^1 auf einen Term nach (i) eine Formel entsteht, sind beide Ausdrucksverbindungen Formeln. Damit ist die fragliche Ausdrucksverbindung insgesamt Formel.

Ü11 Zeigen Sie mit Hilfe der Formelcharakterisierung, daß '$\bigwedge x$ ($\rightarrow$(Mensch(x),Sterblich (x)))', und 'Es-gibt-ein-y, Für-alle-z(genau-dann-wenn(Rasiert(y,z)),nicht(Rasiert(z,z)))' Formeln sind!

Sodann sei für jede Formel Γ festgelegt: (i) Wenn Γ mit der Formel Γ* identisch ist, dann ist Γ eine Teilformel von Γ*.(ii) Wenn Γ* eine Junktorformel $\psi^n(\Delta_1,...,\Delta_n)$ ist und Γ Teilformel eines Δ_i ist, dann ist Γ eine Teilformel von Γ*. (iii) Wenn Γ* eine Quantorformel $\Pi\omega\Delta$ ist und Γ Teilformel von Δ ist, dann ist Γ eine Teilformel von Γ*. (iii) Sonst ist Γ von nichts eine Teilformel. – Die Formeln 'Ist-Primzahl(x)', 'nicht(Ist-Primzahl(x))', 'oder(Ist-Primzahl(x),nicht(Ist-Primzahl(x)))' und die sogleich notierte Formel selbst sind demzufolge (die) Teilformeln von 'Für-alle-x (oder(Ist-Primzahl(x), nicht(Ist-Primzahl (x))))'.

Ü12 Ermitteln Sie die Teilformeln der unter [9] notierten Junktorformeln und der unter [12] notierten Quantorformeln!

Wie für die Teiltermschaft zwischen Termen läßt sich für die Teilformelschaft zwischen Formeln festhalten: Jede Formel ist Teilformel ihrer selbst. Steht eine Formel zu einer Formel im Teilformelverhältnis und umgekehrt, dann handelt es sich lediglich um eine Formel. Ist eine Formel Teilformel einer Formel, die ihrerseits Teilformel einer Formel ist, dann ist die erste Teilformel der letzten. Die Teilformelschaft drückt also eine reflexive, antisymmetrische und transitive Beziehung aus. Mit Hilfe der Teilformelschaft und der Teiltermschaft bezüglich eines Terms läßt sich bestimmen, was Teilterm einer Formel ist: θ ist Teilterm der Formel Γ, wenn es eine Atomformel $\Phi^n(\theta_1,...,\theta_n)$ gibt, die Teilformel der Formel Γ ist, und θ ist Teilterm wenigstens eines Terms θ_i; so ist etwa 'x' (der einzige) Teilterm der Formel 'Für-alle-x(oder(Ist-Primzahl(x), nicht (Ist-Primzahl (x))))'.

Ü13 Ermitteln Sie die Teilterme der unter [8] notierten Elementarformeln, der Junktorformeln unter [9] und der Quantorformeln unter [12] und liefern Sie unter Verwendung der Definition eine passende Begründung!

ω ist frei in Γ genau dann, wenn ω Variable und (i) Γ Atomformel und ω Teilterm der Formel Γ ist oder (ii) Γ Junktorformel $\psi^n(\Delta_1,...,\Delta_n)$ ist und ω frei ist in einem Δ_i oder (iii) Γ eine Quantorformel $\Pi\xi\Delta$ ist, ω verschieden von ξ und frei in Δ ist. – ω ist gebunden in Γ genau dann, wenn ω eine Variable ist, Γ eine Formel ist und es einen Quantifikator Π und eine Formel B gibt, so daß $\Pi\omega$B Teilformel von Γ ist.

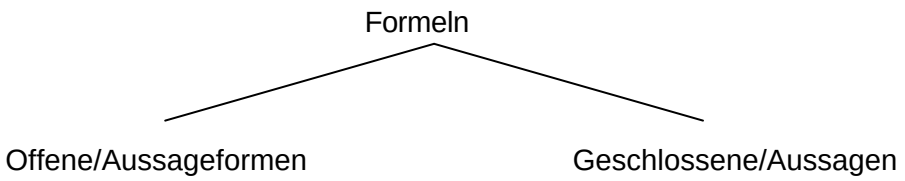
'y' ist frei in 'und(>(y,3), Für-wenigstens-ein-y(=(y,2)))'. Denn: Da 'y' Variable und Teilterm von '>(y,3)' ist, ist 'y' nach (i) frei in '>(y,3)' und nach (ii) auch in der Gesamtformel frei. –

Ferner ist ‘*y*’ gebunden in ‘und(>(*y*,3), Für-wenigstens-ein-*y*(=(*y*,2)))’. Denn: ‘*y*’ ist eine Variable, ‘Für-wenigstens-ein..’ Quantifikator und ‘Für-wenigstens-ein-*y*(=(*y*,2))’ ist Teilformel der Gesamtformel; eine Variable kann in einer Formel also sowohl gebunden als auch frei sein. In ‘>(*y*,3)’ ist ‘*y*’ nur frei, in ‘Für-wenigstens-ein-*y*(=(*y*,2))’ nur gebunden.

Ü14 Untersuchen Sie die unter [8], [9] und [12] notierten Formeln auf Freiheit und Gebundenheit der als Teilterm auftretenden Variablen!

Γ ist eine in ω offene Formel bzw. eine Aussageform in ω genau dann, wenn ω in Γ frei ist. Hingegen ist Γ eine geschlossene Formel bzw. eine Aussage genau dann, wenn Γ eine Formel ist, in der keine Variable ω frei ist. – Die Formel ‘nicht(Ist-Primzahl (*x*))’ ist eine in ‘*x*’ offene Formel, während ‘Für-alle-*x*(oder(Ist-Primzahl(*x*), nicht(Ist-Primzahl (*x*))))’ eine geschlossene Formel darstellt, genauer die Universalquantifikation von ‘oder(Ist-Primzahl (*x*), nicht(Ist- Primzahl (*x*)))’ bzgl. ‘*x*’. – Als Einteilung der Formeln ergibt sich analog zu [6]:

[14]



Geschlossene Atomformeln werden auch als. Atom- resp. Primaussagen, als Basisaussagen oder singuläre Prädikationen angesprochen, geschlossene Junktorformeln als Junktoraussagen und geschlossene Quantorformeln als Quantoraussagen bzw. quantifizierte Aussagen.

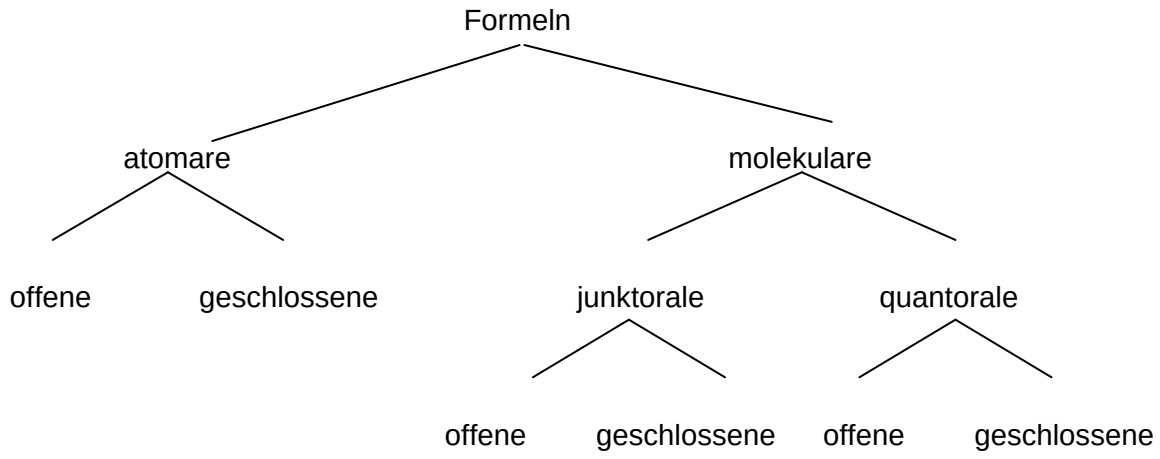
Ü15 Untersuchen Sie die unter [8], [9] und [12] notierten Formeln auf Offenheit und Geschlossenheit!

Mit Blick auf die einzelnen Quantoren läßt sich definieren: Γ ist Universal-/Partikular-/Eins- resp. Einzigkeits-/...quantifikation von Δ bzgl. ω, wenn Γ aus der Anwendung des ω-bindenden Universal-/Partikular-/Eins- resp. Einzigkeits-/...quantors auf Δ entsteht, wobei in Δ genau/höchstens ω frei ist. Quantifikationen einer Formel bezüglich einer Variablen sind stets Aussagen. Universal-/Partikular- und Einsquantifikation werden auch als Universal-/Partikular- und Einzigkeitsaussagen geführt.

Damit ist – relativ auf eine Standardgrammatik erster Stufe und ohne Rückgriff auf Termini der Wahrheitsrede – auch das früher intuitiv gebrauchte Aussagenkonzept (↑2.1.4) für Standardsprachen erster Stufe umrissen. Ordnet man die Einteilungsrücksicht Atomarität

versus Molekularität dem Gesichtspunkt Offenheit versus Geschlossenheit vor, dann ergibt sich folgende abschließende Klassifikation der Formeln:

[15]



Ü16 Zeichnen Sie eine Klassifikation für die Formeln, die die Gliederungsrücksichten von [15] vertauscht!

Schließlich ist an die Bestimmung von Sätzen Σ als Ergebnis der Anwendung eines Performators Ξ auf eine Aussage Γ zu erinnern. Performatoren lassen sich mit der Operatorenterminologie als einstellige, aussagenbestimmende und satzerzeugende Operatoren charakterisieren. Sätze können nicht ihrerseits als Operanden eines Operators auftreten; sie sind ausschließlich Operata.

Indem Autoren Sätze verwenden, vollziehen sie erinnerlich Redehandlungen (↑2.1). Dabei verwenden sie den Performator und die Aussage als Teilausdrücke (↑2.1.6) und vollziehen damit die Teilhandlungen der Performation und Proposition. Die innerpropositionalen Teilhandlungen (Nomination, Prädikation, Quantifikation usf.) folgen dem geschilderten Aufbau der Aussagen. Da in jedem Satz ein Performator und ein Prädikator Teilausdruck ist, sind Performation und Prädikation Teilhandlung jeder Redehandlung.

Ü17 Geben Sie Beispiele für variablenfreie Aussagen, für parameterfreie, für individuenkonstantenfreie, für junktorfreie und für quantorfreie Aussagen, für Aussagen ohne Variablen, Parameter, Junktoren und Quantoren. Welche Ausdruckskategorie scheint in jeder Aussage unverzichtbar? Begründen Sie Ihre Vermutung!

3.2.4 Substitutionsoperationen

Um die Regelformulierung [1]** (von der grammatischen Seite her) nachvollziehen zu können, ist die Substitutionsbegrifflichkeit kursorisch zu erläutern, und zwar insbesondere die

Substitution von Termen in Formeln. Das Ergebnis der Substitution des Terms ‘3’ für den Term ‘*x*’ in der Formel ‘oder(Ist-Primzahl(*x*),nicht(Ist-Primzahl(*x*)))’ ist die Formel ‘oder(Ist-Primzahl(3), nicht(Ist-Primzahl(3)))’; ‘*x*’ wird an allen Stellen durch ‘3’ ersetzt.

Die Definition der Substitution von Termen für Terme in Formeln rekurriert auf die Bestimmung der Substitution von Termen für Terme in Termen, die demnach als erste zu behandeln ist. Zu unterscheiden sind dabei das <u>Substituens</u>, der substituierende Term θ*, das <u>Substituendum</u>, der zu substituierende Term θ+, der <u>Substitutionsort</u>, der Term θ‘, in dem substituiert wird, und das <u>Substitutionsergebnis</u> [θ*,θ+,θ‘]. Die Substitution sei nun für Terme θ*, θ+ und θ‘ wie folgt festgelegt: (i) Wenn θ+ mit θ‘ identisch ist, dann ist [θ*,θ+,θ‘] identisch mit θ*. (ii) Wenn θ‘ ein atomarer Term ist und θ+ nicht mit θ‘ identisch ist, dann ist [θ*,θ+,θ‘] identisch mit θ‘. (iii) Wenn θ‘ funktoraler Term $\phi^n(\theta_1,...,\theta_n)$ und θ+ nicht mit θ‘ identisch ist, dann ist [θ*,θ+,θ‘] identisch mit $\phi^n([\theta^*,\theta+,\theta_1],...,[\theta^*,\theta+,\theta_n])$.Die Substitutionsbestimmung geht am Termaufbau entlang: Ist der Substitutionsort Atomterm, dann ist das Substitutionsergebnis identisch mit dem Substituens, falls das Substituendum mit dem Substitutionsort zusammenfällt; ist das nicht der Fall, ist der Substitutionsort das Substitutionsergebnis. Ist der Substitutionsort ein funktoraler Term, dann ist wiederum das Substitutionsergebnis identisch mit dem Substituens, falls das Substituendum mit dem Substitutionsort zusammenfällt; trifft das nicht zu, dann ist in allen $\theta_1,...,\theta_n$ des Substitutionsortes das Substituens für das Substituendum zu substituieren und ϕ^n auf die erzielten Substitutionsergebnisse anzuwenden. Die Definition betrachtet demnach vier Fälle. Für jede dieser Möglichkeiten ist ein Beispiel zu betrachten: (i-i) Das Ergebnis der Substitution von ‘5‘ für ‘*x*’ in ‘*x*’, also [‘5‘,‘*x*’,‘*x*’], ist ‘5‘. (i-ii) Das Ergebnis der Substitution von ‘4‘ für ‘+(5,3)‘ in ‘*x*’, also [‘4‘,‘+(5,3)‘, ‘*x*’], ist ‘*x*’. (ii-i) Das Ergebnis der Substitution von ‘*u*‘ für ‘+(4,5)‘ in ‘+(4,5)‘, also [‘*u* ‘+(4,5)‘,‘+(4,5)‘], ist ‘*u*’. (ii-ii) Das Ergebnis der Substitution von ‘3‘ für ‘*x*’ in ‘+(*x*,+(*x*,*x*))‘, also [‘3‘,‘*x*’,‘+(*x*,+(*x*,*x*))‘], ist ‘+(3,+(3,3))’.

Ü18 Bestimmen Sie mit Hilfe der vorgelegten Erläuterung folgende Substitutionsergebnisse: [‘+(5,3)’,‘*x*’,‘*x*’], [‘+(5,3)’,‘*y*’,‘x’], [‘*x*’,‘+(5,3)’,‘+(5,3)’], [‘+(5,3)’, ‘die-Wurzel-von(*x*)’, ‘das-Produkt-von-und(die-Wurzel-von(*x*),2)]’, [‘*x*’,‘3’,‘das-Produkt-von-und(die-Wurzel-von(3),+(3,3))’].

Damit läßt sich die Substitution von Termen θ* für Terme θ+ in Formeln Γ erläutern: (i) Wenn Γ eine Atomformel $\Phi^n(\theta_1,...,\theta_n)$ ist, dann ist [θ*,θ+,Γ] identisch mit $\Phi^n([\theta^*,\theta+,\theta_1],...,[\theta^*,\theta+,\theta_n])$. (ii) Wenn Γ eine Junktorformel $\psi^n(\Gamma_1,...,\Gamma_n)$ ist, dann ist [θ*,θ+,Γ] identisch mit $\psi^n([\theta^*,\theta+,\Gamma_1],...,[\theta^*,\theta+,\Gamma_n])$. (iii-i) Wenn Γ eine Quantorformel $\Pi\omega B$ und ω Teilterm von θ+ ist,

dann ist [θ*,θ+,Γ] identisch mit ΠωB. (iii-ii) Wenn Γ eine Quantorformel ΠωB und ω nicht Teilterm von θ+ ist, dann ist [θ*,θ+,Γ] identisch mit Πω[θ*,θ+,B].

Substitutionsort und Substitutionsergebnis sind Formeln, Substituendum und Substituens Terme. Die Erläuterung läuft am Formelaufbau entlang und greift in ihrer Basis, der Substitution von Termen für Terme in Atomformeln, auf die Substitution von Termen für Terme in Termen zurück. Im folgenden sind für die drei in der Definition unterschiedenen Fälle je zwei Beispiele anzugeben. (i) Γ ist Atomformel: ['+(5,3)','*x*','Ist-Primzahl(der-Nachfolger-von(*x*))'] ist identisch mit 'Ist-Primzahl(der-Nachfolger-von(+(5,3)))'; ['z','der-Nachfolger-von(z)','Ist-Summe-von-und(*x*,der-Nachfolger-von(z),+(4,der-Nachfolger-von(z)))'] ist identisch mit 'Ist-Summe-von-und(*x*,z,+(4,z))'. (ii) Γ ist Junktorformel: ['der-Nachfolger-von(2)','*z*','∧(>(*z*,*y*),<(*y*,*z*))'] ist identisch mit '∧(>(der-Nachfolger-von(2),*y*), <(*y*,der-Nachfolger-von(2)))'; ['y','2','¬(Ist-Primzahl(x))'] ist identisch mit '¬(Ist-Primzahl(x))'. (iii) Γ ist Quantorformel πωB. Hier unterscheidet die Definition zwei Fälle: (iii-i) ['3','*z*','∨*z* Ist-Primzahl(*z*)'] ist identisch mit '∨*z* Ist-Primzahl(*z*)'; Ausdrücke, die die durch den Quantor gebundene Variable zum Teilterm haben, sind nicht substituierbar. (iii-ii) ['3','4','∨*z* Ist-Summe-von-und(*z*,4,4)'] ist identisch mit '∨*z* Ist-Summe-von-und(*z*,3,3)'.

Ü19 Bestimmen Sie mit Hilfe der vorgelegten Erläuterung folgende Substitutionsergebnisse: ['3','*x*','>(die-Wurzel-von(*x*),+(*x*,1))'], ['*z*','3','und(Ist-Primzahl(3), >(3,die-Wurzel-von(3)))'], ['3','*x*','∨*x* Ist-Primzahl(*x*)'],['die-Wurzel-von(*x*)','3','∨*y* > (*y*,3)'].

An dieser Stelle läßt sich die nochmals eingespielte Regelformulierung [1]** sowie die zugeordnete Spezialisierung von ihrer grammatischen Seite her abschließend erläutern:

[1]** Wenn man <u>die Universalquantifikation einer Formel</u> Δ <u>bezüglich</u> ω in Abhängigkeit von einer <u>Aussagenmenge</u> *X* gewonnen hat, dann darf man <u>das Ergebnis der Substitution eines Nominators</u> θ <u>für</u> ω <u>in</u> Δ in Abhängigkeit von *X* folgern.

[2] Ξ_X Für-alle-*x*(wenn-dann(Ist-ein-Mensch(*x*),Ist-sterblich(*x*)))

Also_X wenn-dann(Ist-ein-Mensch(Sokrates),Ist-sterblich(Sokrates))

[2] ist der kanonischen, aber später gelockerten Schreibweise (↑3.3.1) angepaßt: 'Für-alle-*x*(wenn-dann(Ist-ein-Mensch(*x*),Ist-sterblich(*x*)))' ist die Universalquantifikation der Formel 'wenn-dann(Ist-ein-Mensch(*x*),Ist-sterblich(*x*))', in der genau '*x*' frei ist. 'wenn-dann(Ist-ein-Mensch(Sokrates),Ist-sterblich(Sokrates))' ist nach (ii) das Ergebnis der Substitution von 'Sokrates' für '*x*' in 'wenn-dann(Ist-ein-Mensch(*x*),Ist-sterblich(*x*))'.

Ü20 Verschaffen Sie sich ein vorläufiges Verständnis der unter [1]**notierten Regel, indem Sie ein weiteres Beispiel diskutieren!

Für den metalogischen Bedarf ist die Substitution von Formeln A für Formeln B in Formeln Γ zu erklären: (i) Wenn B mit Γ identisch ist, dann ist [A,B,Γ] identisch mit A. (ii) Wenn Γ eine Atomformel ist und B nicht mit Γ identisch ist, dann ist [A,B,Γ] identisch mit Γ. (iii) Wenn Γ Junktorformel $\psi^n(\Gamma_1,...,\Gamma_n)$ und B nicht mit Γ identisch ist, dann ist [A,B,Γ] identisch mit $\psi^n([A,B,\Gamma_1],...,[A,B,\Gamma_n])$. (iv) (iii) Wenn Γ Quantorformel ΠωΔ und B nicht mit Γ identisch ist, dann ist [A,B,Γ] identisch mit Πω[A,B,Δ].

Wenn also das Substituendum B mit dem Substitutionsort Γ zusammenfällt, dann ist das Substituens A das Ergebnis der Substitution: [‘⋀*y* *y*>3‘,‘Ist-Primzahl(4)‘,‘Ist-Primzahl(4)‘] ist identisch mit ‘⋀*y* *y*>3‘. – Sind Substituendum B und Substitutionsort Γ verschieden, dann sind die drei Formeltypen zu unterscheiden: (i) Im atomaren Fall ist der Substitutionsort Γ das Substitutionsergebnis Δ: [‘⋀*y* *y*>3‘,‘>(4,2)‘,‘Ist-Primzahl(4)‘] ist identisch mit ‘Ist-Primzahl(4)‘. (ii) Im junktoralen Fall ist in den Operandenformeln zu substituieren: [‘⋀*y* *y*>3‘,‘>(2,z)‘,‘→ (>(2,z),∧(=(z,z),>(2,z)))‘] ist ‘→ (⋀*y* *y*>3,∧(=(z,z),⋀*y* *y*>3))‘. Im quantoralen Fall ist innerhalb der quantifizierten Formel zu substituieren: [‘⋀*y* *y*>3‘,‘>(2,z)‘,‘⋀*x* (→ (>(2,z),<(*x*,2))‘] ist ‘⋀*x* (→ (⋀*y* *y*>3,<(*x*,2)))‘.

3.3 Ergänzungen – Erweiterungen – Vertiefungen

Die Standardgrammatik erster Stufe bildet einen ausbaufähigen Kernbestand an grammatischen Mustern. Einige Erweiterungen sind kursorisch anzusprechen (3.3.2 bis 3.3.4). Wie zu erwarten, existieren auch zur Standardgrammatik und ihren Erweiterungen Alternativen, die das Bild von der Rationalen Grammatik ergänzen (3.3.5). Alle Rationalen Grammatiken sind jedoch von einem einheitlichen Prinzip, dem <u>Funktionalitätsprinzip</u>, regiert. Die Erläuterung dieses Prinzips (3.3.1) sowie Fragen nach seiner materialen Ausfüllung (3.3.6) vertiefen das Verständnis der vorgestellten Grammatiken.

3.3.1 Das Funktionalitätsprinzip

Allen Rationalen Grammatiken, der bereits erörterten mit ihren Erweiterungen und den noch zu diskutierenden Alternativen, liegt insofern ein gemeinsames >Bauprinzip< zugrunde, als sie dem (auf Frege zurückgehenden) <u>funktionalen Grundprinzip</u> genügen. Informell

ausgedrückt: Jedes molekulare Gebilde μ, das Operatum, entsteht aus der Anwendung eines n-stelligen Operators τ^n auf n Operanden $o_1,...,o_n$, hat also stets die Struktur $\tau^n(o_1,...,o_n)$. In einer Grammatik erster Stufe gibt es demnach folgende Operatoren, Operanden und Operata:

[16]	Operator τ^n	Operanden $o_1,...,o_n$	Operatum μ
	Funktor ϕ^n	Terme $\theta_1,...,\theta_n$	Terme $\phi^n(\theta_1,...,\theta_n)$
	Prädikator Φ^n	Terme $\theta_1,...,\theta_n$	Atomformeln $\Phi^n(\theta_1,...,\theta_n)$
	Junktor ψ^n	Formeln $\Delta_1,...,\Delta_n$	Junktorformeln $\psi^n(\Delta_1,...,\Delta_n)$
	Quantifikator Π	Variable ω	Quantor $\Pi\omega$
	Quantor $\Pi\omega$	Formel Δ	Quantorformel $\Pi\omega\,\Delta$
	Performator Ξ	Aussage Δ	Satz $\Xi\Delta$

Bezüglich eines Operators lassen sich drei Bestimmungsfragen aufwerfen: (i) Die Frage nach der Stellen(an)zahl lautet: Wie viele Stellen hat der Operator? (ii) Die Frage nach dem Operandentyp liest sich so: Was sind passende Operanden für den Operator bzw. auf welche Operanden kann man den Operator anwenden bzw. welche Operanden werden von dem Operator bestimmt? (iii) Die Frage nach dem Anwendungsergebnis, dem Operatatyp, läßt sich so notieren: Was ist das Ergebnis der Anwendung des Operators auf die Operanden bzw. ein Ausdruck welcher Kategorie wird durch die Anwendung des Operators auf die Operanden erzeugt? Kurz: Welches Operatum wird durch die Anwendung des Operators auf wieviele Operanden welchen Typs erzeugt?

Von den atomaren Ausdrücken (↑3.2.1) sind Konstanten, Parameter und Variablen Operanden, während alle übrigen Operatoren sind. Dabei stellen Quantifikatoren, Funktoren und Prädikatoren termbestimmende Operatoren dar, die Quantifikatoren genauer variablenbestimmende. Demgegenüber sind Performatoren und Junktoren formelbestimmende Operatoren; Performatoren sind überdies nur auf Aussagen anwendbar.

Ü21 Zeichnen Sie das Schaubild [3] neuerlich, indem Sie die atomaren Ausdrücke nach ihren funktionalen Charateristika Operator/Operand, termbestimmend/formelbestimmend und term-/quantor-/formel-/satzerzeugend einteilen!

τ^n ist der Hauptoperator von $\tau^n(o_1,...,o_n)$; $o_1,...,o_n$ bilden entsprechend die Hauptoperanden. Operatoren von Operanden o_i oder von Operanden o_j von Operanden o_i usf. sind Nebenoperatoren (ersten, zweiten,...n-ten Grades). Hauptoperator von ‘oder(Ist-Primzahl(*x*),

nicht(Ist-Primzahl(*x*)))' ist der Adjunktor 'oder(___,___)'; dahingegen ist der Negator 'nicht(___)' ein Nebenoperator ersten Grades, obgleich er Hauptoperator der Teilformel 'nicht(Ist-Primzahl (*x*))' ist. 'Ist-Primzahl(..)' ist im linken Hauptoperand Hauptoperator, also in der Gesamtformel Nebenoperator ersten Grades. Im rechten Hauptoperand ist derselbe Prädikator Nebenoperator ersten Grades; also ist er in der Gesamtformel Nebenoperator zweiten Grades. Hauptoperanden sind die beiden Adjunkte, Nebenoperanden ersten Grades die Variablen '*x*' und das Negatum des zweiten Adjunkts; ferner ist '*x*' auch Nebenoperand zweiten Grades. – In Übereinstimmung mit der bisher geübten Praxis werden Formeln nach Ihrem Hauptoperator benannt. Der Hauptoperator wird auch als dominierender, herrschender, regierender Operator angesprochen!

Ü22 Bestimmen Sie die Haupt- und Nebenoperatoren der unter [8], [9] und [12] notierten Formeln!

Betrachtet man das funktionale Grundprinzip aus einer strukturellen Perspektive, dann ist es Ausdruck eines Ansatzes, der sprachliche Gebilde mit Hilfe des <u>Funktionsgedankens</u> konzipiert: n-stellige Operationen sind, mathematisch betrachtet, solche Funktionen, deren Argumente n-Tupel sind; Operatoren werden dargestellt als Operationen, Operanden bilden die Glieder des Argument-n-Tupels der Operationen, und Operata stellen den Wert der Operation für das jeweilige Argument-n-Tupel dar. So sind etwa Quantifikatoren einstellige Operationen, die 1-Tupel von Variablen (als Argument) Quantoren (als Wert) zuordnen. – Die oben formulierten Bestimmungsfragen gehen also auf Argumentanzahl, Argument- und Werttyp.

Eine solche strukturelle Betrachtung ist dann angezeigt, wenn man – aus Ökonomiegründen – mit größtmöglicher Allgemeinheit über bestimmte Grammatiken theoretisieren möchte. Ob man hingegen in konkreten Kontexten vereinbart, Operatoren – wie oben durchgehend geschehen – stets links von ihren Operanden zu notieren, oder ob man – wie im folgenden häufig und ohne eigene Vereinbarung praktiziert – liberalere und üblichere Schreibweisen zuläßt, ist ebenso wie die Bevorzugung stenographischer Notation für die strukturelle Grundidee gleichgültig.

Da in sprachphilosophischen Zusammenhängen häufig von (>selbständigen<) <u>Teilausdrücken</u> und (>unselbständigen<) <u>Ausdrucksteilen</u> die Rede ist, sei abschließend festgesetzt, daß alle Operatoren und Operanden eines Ausdrucks (Term, Formel, Satz) und auch alle Operatoren und Operanden eines Teilterms oder einer Teilformel eines Ausdrucks sowie der Ausdruck selbst Teilausdrücke desselben sind; Ausdrucksteile sind hingegen

Bestandteile von atomaren Teilausdrücken, können selbst aber keiner grammatischen Kategorie zugeschlagen werden. Demgemäß sind etwa ‘Ist-Vater-von’ und ‘J.S.Bach’ Teilausdrücke der Aussage ‘Ist-Vater-von(J.S.Bach, P.E.Bach)’, während ‘von’ Ausdrucksteil des Prädikators und ‘Bach’ Ausdrucksteil beider Nominatoren ist. – Ausdrucksteile werden auch als synkategorematische Ausdrücke angesprochen; Teilausdrücke sind demgegenüber kategorematische Ausdrücke!

Ü23 Ermitteln Sie alle Teilausdrücke der unter [12] notierten Quantorformeln!

3.3.2 Termquantoren und Quantorterme

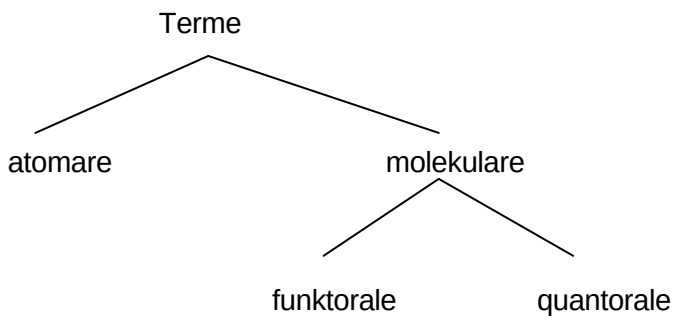
Bedarf nach Erweiterung von Standardsprachen erster Stufe tritt schon dann auf, wenn man das Repertoire um Ausdrücke wie ‘der Gegenstand, von dem das und das gilt’ bzw. ‘der/die/das so-und-so’ oder ‘die Menge all der Gegebenheiten, die die und die Eigenschaft besitzen’ erweitern möchte. Dazu benötigt man <u>variablenbindende, formelbestimmende und termerzeugende Operatoren</u>.

Solche Operatoren kommen mit den bisher behandelten Quantoren darin überein, daß sie aus der Anwendung eines Operators π auf eine Variable ω entstehen und ihrerseits auf Formeln angewendet werden; daher soll von <u>Termquantoren</u> und entsprechend von <u>Termquantifikatoren</u> die Rede sein. Wendet man einen Termquantor $\pi\omega$ auf eine Formel Δ an, dann entsteht – anders als bei (Formel)Quantoren – ein <u>Quantorterm</u> $\pi\omega\Delta$. Ist dabei in Δ genau/höchstens ω frei, entsteht wiederum ein Nominator. In Ergänzung von [16] läßt sich festhalten:

[16]*	<u>Operator τ^n</u>	<u>Operanden $o_1,\ldots,o_n$</u>	<u>Operatum μ</u>
	Termquantifikator π	Variable ω	Termquantor $\pi\omega$
	Termquantor $\pi\omega$	Formel Δ	Quantorterm $\pi\omega\Delta$

Enthält eine Sprache neben den formelerzeugenden Quantoren auch Termquantoren, dann spricht man erstere naheliegenderweise als <u>Formelquantoren</u> an; analog soll von <u>Formelquantifikatoren</u> die Rede sein. Damit ist zugleich die Klasse der Terme erweitert, die nun ebenso wie die Formelmenge Gegenstand einer doppelten Partition ist: Nach ihrem Aufbau zerfallen die Terme in atomare, funktorale und quantorale oder Quantorterme, wobei die beiden letzteren die <u>molekularen Terme</u> bilden; für Sprachen mit Quantortermen ist Schaubild [5] zu [5]* zu erweitern:

[5]*



Der Umstand, daß im Falle von Quantortermen Formeln Teilformeln von Termen sind, macht es notwendig, in Sprachen mit Termquantoren den Term- und Formelbegriff >in einem Zuge< bzw. >simultan< zu etablieren. Man hat nicht nur bei der Bestimmung der Formeln auf Terme, sondern auch bei der Bestimmung der Terme auf Formeln zurückzugreifen. Der Vorzug ist offenkundig: Das gesamte Prädikationspotential wird in seinen Kombinationsmöglichkeiten für die Nomination nutzbar gemacht. So kann zum Beispiel innerhalb des (Quantor)Terms ‘der/die/das *x* (*x* ist größtes Gemälde der Welt)’ auf eine Eigenschaft von ‘*x*’ Bezug genommen werden. Diese Möglichkeit war bisher den Formeln vorbehalten. Eine derartige simultan-induktive Charakterisierung sieht ungefähr so aus: (i) Atomare Terme, d.h. Variablen, Parameter, Konstanten, sind Terme. (ii) Wenn $\theta_1,...,\theta_n$ Terme sind, dann ist auch das Ergebnis der Anwendung eines n-stelligen Funktors ϕ^n auf $\theta_1,...,\theta_n$ ein (funktoraler) Term. (iii) Wenn $\theta_1,...,\theta_n$ Terme sind, dann ist das Ergebnis der Anwendung eines n-stelligen Prädikators Φ^n auf $\theta_1,...,\theta_n$ eine (Atom)Formel. (iv) Wenn $\Gamma_1,...,\Gamma_n$ Formeln sind, dann ist das Ergebnis der Anwendung eines n-stelligen Junktors ψ^n auf $\Gamma_1,...,\Gamma_n$ eine (Junktor)Formel. (v) Wenn Γ Formel ist, dann ist das Ergebnis der Anwendung eines Quantors $\Pi\omega$ auf Γ eine (Quantor)Formel. (vi) Wenn Γ eine Formel ist, dann ist das Ergebnis der Anwendung eines Termquantors $\pi\omega$ auf Γ ein (Quantor)Term. Nur was (i), (ii) und (vi) bzw. (iii), (iv) und (v) genügt, soll Term bzw. Formel sein.

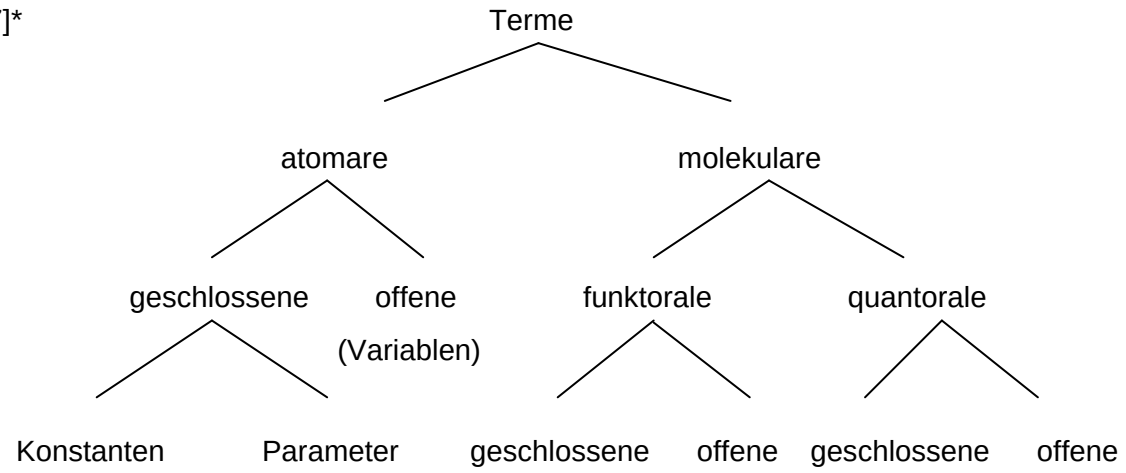
Der (häufig mit ‘theω___’ abgekürzte) <u>Kennzeichnungsoperator</u> ‘das-/die-/derjenige ω___’ und der (stenographisch mit ‘{ω| ___}’ notierte) <u>Klassenbildungsoperator</u> ‘die Menge der ω___’ sind die in der Literatur am häufigsten diskutierten und verwendeten Termquantoren. In Analogie zur Formelseite kann man dann von der <u>Kennzeichnungs</u>-/<u>Klassen</u>-/...<u>quantifikation</u> einer Formel Δ bezüglich einer Variable ω sprechen, wenn der Term aus der Anwendung des jeweiligen Operators $\pi\omega$ auf Δ entsteht, wobei in Δ genau/höchstens ω frei ist. So ist etwa ‘the*x* (und(>(5,*x*),<(3,*x*)))’ eine Kennzeichnungsquantifikation der Formel ‘und(>(5,*x*),<(3,*x*))’ bezüglich ‘*x*’, und ‘{*y*| Ist-Philosoph (*y*)}’ ist eine Klassenquantifikation der Formel ‘Ist-Philosoph (*y*)’ bezüglich ‘*y*’.

Die Arbeitsweise der oben niedergelegten Term/Formelcharakterisierung kann man sich an folgendem Beispiel verdeutlichen: Ist '$\bigvee y$ (Gerade-Zahl(y) $\wedge$ >(y,the$x$(und(>(5,x),<(3,x)))))' eine Formel der hier beispielshalber unterlegten arithmetischen Sprache? Folgende Betrachtung erlaubt eine affirmative Antwort: '3' und 'x' sind atomare Terme, damit nach (i) Terme. Mithin ist '<(3,x)' nach (iii) Formel. Eine analoge Betrachtung zeigt, daß '>(5,x)' Formel ist. Damit ist nach (iv) auch 'und(>(5,x),<(3,x))' Formel. Gemäß (vi) ist damit 'the$x$ (und(>(5,x),<(3,x)))' Term. Da 'y' nach (i) Term ist, stellt auch '>(y,the$x$ (und(>(5,x),<(3,x)))' nach (iii) eine Formel dar. Ebenfalls nach (iii) ist 'Gerade-Zahl(y)' eine Formel. Damit ist nach (v) auch das Gesamte eine Formel.

Ü24 Zeigen Sie, daß 'the$x$ (Primzahl(x) $\wedge$ Gerade(x))' ein Term der arithmetischen Sprache ist!

Die simultan-induktive Charakterisierung von Term und Formel, gewissermaßen eine Reißverschlußtaktik, verlangt auch eine analoge Bestimmung der Teilterm- und Teilformelschaft oder des Freiseins und damit der offenen und geschlossenen Terme. Den offenen und geschlossenen atomaren und funktoralen Termen sind dann die offenen und geschlossenen Quantorterme hinzuzufügen: Die in Ü24 betrachtete Ausdrucksverbindung ist ein geschlossener Quantorterm der arithmetischen Sprache; der Ausdruck '$\{y \mid y > z \wedge z$ ist Primzahl$\}$' ist ein in 'z' offener Quantorterm einer Klassensprache. Die Erweiterung von Schaubild [7] zu [7]* ergibt ein zu [15] analoges Bild für Terme:

[7]*



Oben konnten drei Formen der Substitution charakterisiert werden: die Substitution von Termen für Terme in Termen, die Substitution von Termen für Terme in Formeln, die Substitution von Formeln für Formeln in Formeln. Mit dem Einbezug der Quantorterme ist auch die Substitution von Formeln für Formeln in Termen zu berücksichtigen.

Individuenkonstanten/Eigennamen, Funktoren und Termquantifikatoren sollen als nominative Redeteile zusammengefaßt werden. Diese Ausdrucksgruppe verlangt eine Gleichbehandlung in einführungstheoretischer Hinsicht. Diese hängt, intuitiv gesprochen, damit zusammen, daß jeder Nominator einen und nur einen Gegenstand bezeichnen soll (↑).

3.3.3 Stufenbildung

Eine andere Erweiterung von Standardgrammatiken erster Stufe besteht in der Stufenbildung. Diese kommt dadurch zustande, daß man auch Prädikatoren $^{2}\Phi^{n}$ zweiter oder höherer Stufen $^{m}\Phi^{n}$ zuläßt; der linke Index zeigt die Stufigkeit, der rechte die Stelligkeit an. Diese finden dann Anwendung auf Prädikatoren erster oder – allgemein – nächstniedriger Stufe; außerdem werden auch die Prädikatorvariablen in Betrieb genommen. Das führt zu einer Erweiterung des Quantorkonzeptes: Individuenvariablen bindende Quantoren sind von Prädikatorenvariablen (verschiedener Stufe) bindenden Quantoren zu unterscheiden. - In der folgenden Liste sind in der linken Spalte die Beispiele, in der rechten die zugehörigen Strukturformeln notiert; so entsteht c) aus der Anwendung eines einstelligen Prädikators dritter Stufe auf ein einstelliges Prädikat zweiter Stufe:

[17] a) Ist-Vater-von(J.S.Bach, P.E.Bach) $^{1}\Phi^{2}$ (θ,θ‘)

b) Ist-asymmetrisch(Ist-Vater-von) $^{2}\Phi^{1}$ ($^{1}\Phi^{2}$)

c) Ist-Relationsattribut(Ist-asymmetrisch) $^{3}\Phi^{1}$ ($^{2}\Phi^{1}$)

Die Aussage ‘Für-alle-$^{1}F^{2}$ (Wenn-dann(Ist-asymmetrisch($^{1}F^{2}$),Ist-irreflexiv($^{1}F^{2}$)))’ enthält den eine Prädikatorvariable erster Stufe bindenden Universalquantor.

Wie jede Erweiterung der Standardgrammatik schafft auch die Stufenerhöhung neue Ausdrucksmöglichkeiten. Muß man z.B. in einer Standardgrammatik erster Stufe den Identitätsprädikator durch konstruktsprachliche Regeln, jedenfalls aber unter Verwendung konstruktsprachlicher Redeteile etablieren, so kann dies in einer Sprache zweiter Stufe über eine innersprachliche Definition erfolgen:

[18] Definition: $\bigwedge x \bigwedge y\ (x = y \leftrightarrow$ Für-alle-$^{1}F^{1}$ ($^{1}F^{1}$ $(x) \leftrightarrow {}^{1}F^{1}$ $(y)))$

Individuen sind genau dann identisch, wenn sie in allen Eigenschaften übereinkommen. Diese Definition ist jedenfalls dann zielführend, wenn man mit ‘Für alle $^{1}F^{1}$’ wirklich alle in der

Sprache darstellbaren Eigenschaften erfaßt; das kann z.B. mit Hilfe des Lambda-Operators (↑3.3.4) geschehen.

Ü25 Bestimmen Sie die Stufe der Prädikatoren in der folgenden Aussagensequenz: Ist-Launenhaft(Doris), Ist-eine-Untugend(Ist-Launenhaft), Ist-moralische-Kategorie(Ist-Untugend)!

Die Stufenbildung dient dem Zweck der Vergegenständlichung: Man möchte nicht nur über Doris, sondern auch über die Eigenschaft, launenhaft zu sein, reden können; und man möchte nicht nur diese Eigenschaft, sondern auch die höherstufige Eigenschaft, eine Untugend zu sein, zum Thema machen können. Der Vergegenständlichungstendenz liegt wiederum eine redeökonomisches Interesse zugrunde. – Bei der Grundlegung der Klassensprache werden alternative Vergegenständlichungsstrategien vorgestellt und mit der Stufenbildung verglichen (↑14.).

3.3.4 Dispositoren und Lambda-Operatoren

Ferner kann man Standardsprachen erster Stufe durch Dispositoren zu Disposprachen erweitern: n-stellige Dispositoren ρ_{n+l} sind an den n ersten Stellen termbestimmende, an der n+1 Stelle formelbestimmende Operatoren, die Formeln erzeugen. Dispositoren sind also Operatoren mit kategorial heterogenen Operanden. So entsteht aus der Anwendung des 2+1-stelligen Dispositors ‘glaubt(..,..,__)’ auf die Nominatoren ‘Jahwe’, ‘Abraham’ und die hier nicht weiter strukturierte Formel ‘daß Abraham seinen Sohn opfern will’ die Aussage ‘glaubt (Jahwe, Abraham, daß Abraham seinen Sohn opfern will)’. – Dispositoren wie ‘glaubt, daß...’, ‘will, daß...’ usf. stehen für einige Varianten der epistemischen Logik im Zentrum des Interesses.

Im Vorgriff auf die Ausführungen zum Grammatischen Instrumentalismus (↑3.4.1) ist allerdings festzuhalten, daß man eine Aussage der Art ‘Jahwe glaubt Abrahahm, daß Abraham seinen Sohn opfern will’ nicht mit Hilfe eines Dispositors als Hauptoperator bestimmen muß. Man mag auch den vierstelligen Prädikator ‘glaubt-daß-opfern-will(..,..,..,..)’ als Hauptoperator ansetzen, der auf die Terme ‘Jahwe’, ‘Abraham’, ‘Abraham’, ‘seinen Sohn’ angewendet wird, und so die Elementaraussage ‘glaubt-daß-opfern-will(Jahwe,Abraham,Abraham,seinen Sohn)’ ergibt.

Die in ‘*x*’ offene Aussageform ‘Ist-Primzahl(x) $\wedge$ >(x,100) $\wedge$ >(1000,x)’ beschreibt eine Eigenschaft, für die in der arithmetischen Sprache kein eigener Prädikator bereitsteht. Das gilt für die überwiegende Mehrzahl aller Aussageformen in allen Sprachen. Um über die Möglichkeit zu verfügen, (hier einfachheitshalber die in genau einer Variablen ω offenen) Aussageformen in

Prädikatoren zu überführen, wird der Operator $\lambda\omega$ benutzt, der, in der Feinauflösung, aus Quantifikator und Variable aufgebaut ist. Wendet man den Lambda-Operator $\lambda\omega$ auf eine Formel Δ an, in der genau ω frei ist, dann entsteht ein einstelliger Prädikator $\lambda\omega\Delta(..)$. Im Beispiel: 'λx (Ist-Primzahl(x) $\wedge$ >(x,100) $\wedge$ >(1000,x))(..)'. Damit ist z.B. 'λx (Ist-Primzahl(x) $\wedge$ >(x,100) $\wedge$ >(1000,x))(3)' eine (falsche) Elementaraussage der arithmetischen Sprache. – Das durch Anwendung des Lambda-Operators erzeugte Operatum ist als Prädikator seinerseits ein Operator.

Die Bedeutung des Lambda-Operators wird man so fixieren, daß die Aussage, die durch Anwendung des Lambda-Prädikators auf einen Nominator entsteht, dann und nur dann wahr ist, wenn das Ergebnis der Substitution des Nominators für die durch den Lambda-Operator gebundene Variable in der Aussageform wahr ist: 'λx(Ist-Primzahl(x) $\wedge$ >(x,100) $\wedge$ > (1000,x)) (3) $\leftrightarrow$ Ist-Primzahl(3) $\wedge$ >(3,100) $\wedge$ >(1000,3)' soll in der jeweiligen Sprache wahr sein. Bei der späteren Verwendung wird statt des griechischen Buchstabens Lambda der Buchstaben '**l**' benutzt. Das hat den rein terminologischen Grund, daß griechischen Buchstaben nur in der metasprachlichen Rede Verwendung finden sollen (↑6.1).

Die Verwendung des Lambda-Operators legt sich z.B. dann nahe, wenn man in der Analysesprache zu einer gegebenen Sprache über alle in dieser Sprache beschreibbaren Eigenschaften nachdenken will. Dazu hat man zunächst den Eigenschaftsbegriff, genauer: den Funktor 'die-Eigenschaft-von(..)' zu etablieren; passende Operanden für die freie Stelle sind Prädikatorennamen. Da intuitiv als Eigenschaft nicht nur das gelten soll, was durch die (normalen) Prädikatoren beschrieben wird, sondern auch all das, was die in einer Variablen offene Aussagenformen beschreiben, müssen diese in Prädikatoren konvertiert werden, von denen man in der Analysesprache dann wiederum Namen bilden kann.

3.3.5 Alternative Grammatiken

Die skizzierte Grammatik erster Stufe und ihre Erweiterungen bilden ein Standardreservoir. Aber auch innerhalb der Rationalen Grammatik gibt es – hier wenigstens zu erwähnende – Alternativen. Hinzuweisen ist etwa auf die der syllogistischen Logik zugrundeliegende aristotelische Grammatik, auf den (verwandten) kategorialen Rahmen, den Lesniewski der Trias von Protothetik, Ontologie und Mereologie vorgibt, oder auf Ansätze, die einer alternativen Idee der Prädikation folgen.

Nach der Standardanalyse ist die Aussage '2 ist eine Primzahl' als 'Ist-eine-Primzahl(2)' zu bestimmen, als aufgebaut also aus dem einstelligen Prädikator 'Ist-eine-Primzahl(..)' und der

Konstante ‘2’. Aus dem zu analysierenden Gebilde kann man aber auch die Kopula ‘ist’, genauer ‘Ist(..,__)’, als Operator >herausbrechen<. Dieser Operator ist dann auf den Nominator ‘2’ und den Prädikator ‘Primzahl’ anzuwenden: ‘Ist(2,Primzahl)’. Prädikatoren sind bei dieser Zugangsweise keine Operatoren, sondern Operanden; das Wörtchen ‘ist(..,__)‘ stellt einen kategorial heterogenen Prädikationsoperator dar.

Nach der Standardanalyse werden Aussagen der Art ‘2 ist keine Primzahl’ analysiert als Negationen, wobei die Aussage ‘2 ist eine Primzahl’ Negatum ist. Baut man die soeben gegebene Analyse mit ein, dann ergibt sich insgesamt als Analysans: ‘nicht(Ist-eine-Primzahl(2))’. Der alternative Ansatz setzt hier den negativen Ausdruck ‘Ist-nicht(..,..)’ als Operator an, die Gebilde ‘2’ und ‘Primzahl’ als Operanden: ‘Ist-nicht(2,Primzahl)’. Zu unterscheiden ist also ein <u>affirmativer</u> und ein <u>negativer</u> Prädikationsoperator. Andere Ansätze kennen auch einen <u>neutrativen</u> Prädikationsoperator: ‘Ist-unbestimmt-ob(2,Primzahl)’.

Eine Aussage mit einem relationalen Prädikator, z.B. ‘2 ist größer als 1’, wird mit ‘Ist(2,1,>)’ wiedergegeben. Die Prädikationsoperatoren sind also n-stellige Operatoren, wobei die ersten n-1 Operanda Terme sind und der n-te Operand ein Prädikator ist.

Die Standard- und Nicht-Standardanalyse für den einfachsten Fall nochmals im Vergleich:

[19]		<u>2 ist eine Primzahl</u>	<u>2 ist keine Primzahl</u>
	a)	Ist-eine-Primzahl(2)	nicht(Ist-eine-Primzahl(2))
	b)	Ist(2, Primzahl)	Ist-nicht(2, Primzahl)

Die aristotelische Syllogistik folgt der Idee, alle Aussagen in einen Prädikationsoperator und zwei (als allgemein aufgefaßte) Terme zu zerlegen. So wird etwa die Aussage ‘Alle Griechen sind Menschen’ durch ‘Grieche a Mensch’ bzw. - um auch hier das Funktionalitätsprinzip zu dokumentieren - ‘a(Grieche,Mensch)’ wiedergegeben: die Prädikationskopula ‘a(..,..)’ wird auf zwei Terme angewendet; der Ausdruck ‘alle’ sowie der Ausdruck ‘sind’ werden also in der Prädikationskopula ‘a(- -,- -)’ zusammengezogen. Ebenso umfaßt etwa die Prädikationskopula ‘i(- -,- -)’ die Worte ‘einige’ und ‘sind’, wenn die Aussage ‘Einige Philosophen sind Vampire’ mit ‘Philosoph i Vampir’ bzw. mit ‘i(Philosoph,Vampir)’ wiedergegeben wird. Im Vergleich:

[20] <u>Alle Griechen sind Menschen</u>

a) a(Grieche,Mensch)

b) $\bigwedge x$ (Ist-Grieche(x) $\rightarrow$ Ist-Mensch(x))

<u>Einige Philosophen sind Vampire</u>

a) i(Philosoph,Vampir)

b) $\bigvee y$ (Ist-Philosoph(y) $\wedge$ Ist-Vampir(y))

Die Formulierung der Schlußregeln bezieht sich ausdrücklich auf die jeweilige grammatische Gestalt der Prämissen und der Konklusion: Die logischen Regeln sitzen auf der grammatischen Struktur der Aussagen auf. Eine gültige syllogistische Schlußregel könnte so formuliert werden: Wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse *X* eine Aussage der Art ‘S a P’ und in Abhängigkeit einer Aussagenklasse *Y* eine Aussage der Art ‘P a Q’ gewonnen hat, dann darf man in Abhängigkeit von $X \cup Y$ eine Aussage der Art ‘S a Q’ folgern.

Da die aristotelische Logik keine Möglichkeit hat, relationale Sachverhalte (über mehrstellige Prädikatoren) zu erfassen, zeichnet sie nur einen Bruchteil der in Alltag und Wissenschaft benötigten Schlüsse nach: Die Art des grammatischen Zugriffs beschränkt die Reichweite der darauf gründenden Logik. - Eine Möglichkeit, zwischen alternativen Grammatiken eine Wahl zu treffen, besteht darin, die Leistungsfähigkeit der auf ihnen aufruhenden Folgerungsregeln zu vergleichen.

3.3.6 Zur >Deduktion< grammatischer Kategorien

Die Existenz alternativer Grammatiken zerstört nicht nur eine leicht aufkommende Einzigkeitsillusion bzgl. <u>der</u> Rationalen Grammatik, indem sie mit Auswahlproblemen konfrontiert, sondern führt auch auf die Frage, wie man grammatische Kategorien und Kategoriensysteme >gewinnt<; denn diese sind offenkundig nicht schlicht >gegeben<, sondern müssen sowohl unter (Rede)Zwecken als auch für (Rede)Zwecke erzeugt werden.

Der hier verfolgte Ansatz legt es nahe, Kategorien als Artefakte der Redeorganisation zu entwickeln. Das ist exemplarisch vorgeführt für die Kategorie der Performatoren und der Aussagen (↑2.1): Man macht die Unterscheidung zwischen - in diesem Falle - performativem und propositionalen Moment plausibel und stabilisiert die Anfangsplausibilität durch Einrichtung der grammatischen Kategorien der Performatoren und der Aussagen. Analog wären die weiteren Unterscheidungen zu gewinnen. Die Ausführung dieses Programms ist indes weitgehend offen und soll hier nur als Aufgabe angezeigt werden.

Das angezeigte Desiderat ist erstens dringlich, weil die in propädeutischen Zusammenhängen en passant vermittelte Standardantwort - weil es eben Dinge,

Eigenschaften, Relationen, (so und so strukturierte) Sachverhalte gebe, müsse die Sprache mit Nominatoren, ein- und mehrstelligen Prädikatoren, (so und so strukturierten) Aussagen die repräsentierenden Gegenstücke enthalten - im hier verfolgten Duktus ausgeschlossen ist. Die Diagnose lautet: Unverträglichkeit des gewählten Anfangs bei den Redehandlungen mit dem die Standardantwort beherrschenden >korrespondistischen< Geist. Die als >erste Philosophie< ausgezeichnete Sprachphilosophie (↑1.2) kann nur unter Verstoß gegen die früher empfohlene Vorgehensordnung (↑1.2.2) auf Termini und Thesen der Ontologie rekurrieren; die Rede von Dingen, Eigenschaften, Relationen, Sachverhalten, Tatsachen usf. ist vielmehr umgekehrt durch die bestimmten Redeinteressen genügende Abstraktion im Ausgang von Nominatoren, Prädikatoren und Aussagen usf. zu etablieren (↑8.).

3.4 Grammatischer Instrumentalismus

Die grammatischen Rahmen sind demjenigen, der eine Sprache konstituiert oder erschließt, Instrumente, die die mit den jeweiligen Sprachen gegebenen Möglichkeiten des Redehandelns (mit)determinieren. Diese instrumentalistische Haltung tritt auch bei der Interpretation von Texten und beim Umgang mit aporetischen Diskurskonstellationen deutlich hervor. Negativ formuliert: Der grammatische Instrumentalist stellt in Abrede, daß gebrauchssprachliche Gebilde >in sich< oder >an sich< eine oder gar genau eine grammatische Struktur besitzen. Positiv betrachtet: Der grammatische Instrumentalist ordnet gebrauchssprachlichen Gebilden eine oder auch mehrere grammatische Strukturen zu, um diskursive Zwecke zu erreichen.

Für diese Sicht ist in drei Schritten Plausibilität herzustellen: Zunächst ist die >grammatische Bestimmungsfrage< der rechten Lesart zuzuführen (3.4.1). Sodann ist die Haltung des grammatischen Instrumentalisten am Existenzdisput zu exemplifizieren (3.4.2). Schließlich wird - in Aufnahme eines Ansatzes aus dem Einleitungskapitel (↑1.1.1) - die bei der Bewältigung von Aporien bewährte Idee der unterstelligen Prädikatorenverwendung ausgeweitet und einer ersten Systematisierung unterzogen (3.4.3).

3.4.1 Die grammatische >Bestimmungsfrage<

Ausgangspunkt der folgenden Betrachtung ist eine anscheinend schlichte und problemfreie Frage:

[21] Welches ist die grammatische Struktur der gebrauchssprachlichen Ausdrucksverbindung μ?

Bei oberflächlicher Lesung ist mit dieser Frage unterstellt, daß jede Ausdrucksverbindung genau eine grammatische Struktur aufweist, die nach einem wohlbestimmten Verfahren, ähnlich etwa dem Lackmustest, festzustellen ist. Dieser mißverständlichen Auffassung ist die folgende Lesart gegenüberzustellen:

[22] Welche grammatischen Strukturen kann man dem in der Umgebung *U* vorkommenden gebrauchssprachlichen Sprachgebilde μ zuordnen, um bei Zugrundelegung des grammatischen Rahmens *R* den interpretativen Zweck *Z* zu erreichen?

Die in der Frage vorgenommene Bezugnahme auf Umgebung, grammatischen Rahmen und Zweck sowie den in der Rede von 'Struktur<u>en</u>' ausgedrückten Verzicht auf die Einzigkeitspräsupposition, macht man sich an einem einfachen Beispiel klar: Unterstellt, die Ausdrucksverbindung 'Der Kanzler der BRD im Jahre 1996 ist ein wortgewaltiger Pfälzer' sei bereits als Aussage (und nicht etwa als Satz) bestimmt, dann notiert die folgende Liste einige Strukturzuschreibungen:

[23] a) und(der Kanzler der BRD im Jahre 1996 ist wortgewaltig, der Kanzler der BRD im Jahre 1996 ist ein Pfälzer)

b) Ist-ein-wortgewaltiger-Pfälzer(der Kanzler der BRD im Jahre 1996)

c) Ist-ein-wortgewaltiger-Pfälzer(der-Kanzler-von-im-Jahre(die BRD, 1996))

d) und (Ist-wortgewaltig(der Kanzler der BRD im Jahre 1996), Ist-ein-Pfälzer(der Kanzler der BRD im Jahre 1996))

e) Ist(der Kanzler der BRD im Jahre 1996, wortgewaltiger-Pfälzer)

a) ist eine Konjunktion, also eine Junktorformel, mit nicht weiter strukturierten Konjunkten als Operanden. b) ist eine Atomformel, aufgebaut aus einem einstelligen Prädikator als Operator und einem nicht weiter strukturierten Nominator als Operand. In c) erfolgt eine solche Feinkategorisierung: Der Operand ist ein funktoraler Term, aufgebaut aus einem zweistelligen Funktor als Operator und zwei Namen als Operanden. d) schreibt den Operanden aus a) weitere Strukturen zu durch die Bestimmung als Elementaraussage, aufgebaut jeweils aus einem einstelligen Prädikator und einem nicht weiter zerlegten Term. e) ist eine Elementaraussage, aufgebaut aus einem zweistelligen affirmativen Prädikationsoperator, einem nicht weiter analysierten Nominator und einem Prädikator.

Unterlegt man einen grammatischen Rahmen, der nur Junktoren und Formeln unterscheidet, dann entfallen die vier letzen Strukturzuschreibungen; die Strukturierung c) ist ausgeschlossen, wenn der grammatische Rahmen keinen inneren Aufbau der Terme zuläßt und e) folgt, im Gegensatz zu b), einer alternativen Grammatik für Elementaraussagen. Erst der je unterlegte grammatische Rahmen erlaubt diese – oder eben eine andere – Strukturierung (↑[19],[20])!

Um den Umgebungs- und Zweckbezug zu verdeutlichen, genügen drei Hinweise: (i) Steht man vor der Aufgabe, die Aussage ‘Der Kanzler der BRD im Jahre 1996 ist ein wortgewaltiger Pfälzer.’ als Konsequenz der Aussagenklasse {‘Helmut Kohl ist ein wortgewaltiger Pfälzer’, ‘Helmut Kohl ist der Kanzler der BRD im Jahre 1996’} auszuweisen, dann kommt man mit b), c) und e) zum Ziel. (ii) Will man hingegen aus der betrachteten Aussage schließen, daß es wenigstens ein Land *x* gibt, dessen Kanzler im Jahre 1996 ein wortgewaltiger Pfälzer ist, muß man c) wählen; bei den übrigen Strukturierungen wäre der entsprechende Schluß blockiert. (iii) Wer allein im Rückgriff auf die betrachtete Aussage demonstrieren will, daß es Pfälzer gibt, kommt nur mit d) zum Ziel: Um bestimmte Folgerungszusammenhänge herzustellen, werden Ausdrucksverbindungen so – oder eben auch anders - strukturiert!

Die Haltung des grammatischen Instrumentalismus empfiehlt sich auch dann, wenn man – abkürzend geredet – darüber zu befinden hat, ob ein Ausdruck synkategorematischen oder kategorematischen Charakter hat. Derartige Kontroversen werden etwa über die Worte ‘Zeit‘, ‘Raum‘, ‘Gott‘ geführt: Hat man z.B. auszugehen von Individuenkonstanten wie ‘die-Zeit‘, ‘der-Raum‘ oder ‘Gott‘, also von kategorematischen Ausdrücken? Oder sollte man sich nur um Wendungen wie ‘..redet-über-Zeit/Raum‘, ‘..lebt-in-Gott‘ bemühen?

Ü26 Diese Übung ist erst nach Bearbeitung von Teil 5 zu erledigen!

a) Machen Sie sich die im vorigen Absatz vorgelegte Argumentation im einzelnen klar, indem Sie die entsprechenden Ableitungen herstellen! Sie benötigen dazu – im ersten Fall - die Regel der Identitätsbeseitigung; damit ist auch schon ein Hinweis auf die Strukturierung der Prämissen gegeben. Wir betrachten den einfachen Fall b). Im zweiten Fall benötigen Sie die Regel der Partikularquantoreinführung; im dritten Fall kommt man mit Konjunktionsbeseitigung und Partikularquantoreinführung zum Ziel.

b) Stellen Sie ferner eine Strukturierung her, die den Schluß auf die Aussage ‘Für-wenigstens-ein-xFür-wenigstens-ein-*y*(Ist-Wortgewaltig(der-Kanzler-von-im-Jahr(*x*,*y*)))’ durch zweimalige Anwendung der Partikularquantoreinführung erlaubt!

3.4.2 Exemplifizierung am Existenzdisput

Hat man einmal eingesehen, daß gebrauchssprachliche Gebilde nicht >von Natur aus< und >in Wirklichkeit< genau eine grammatische Struktur besitzen, und zwar weder >an der Oberfläche< noch >in der Tiefe<, dann ergibt sich in aporetischen Diskurslagen standardgemäß die Möglichkeit, durch Variation der grammatischen Struktur Abhilfe zu schaffen. Faßt man – um ein vieldiskutiertes Beispiel aufzunehmen – das (schon als Aussage vorbestimmte) Gebilde ‘Pegasus existiert nicht’ grammatisch im Sinne von:

[24] nicht(es-existiert-ein-*x* (=(Pegasus,*x*))),

so hat man bei naheliegender Lesung der Wendung ‘es-existiert-ein-*x*’ im Sinne des Partikularquantors die Negation der folgenden (identitäts)logischen Wahrheit notiert:

[25] es-existiert-ein-*x* (=(Pegasus,*x*)),

die sich durch Partikularquantoreinführung unmittelbar aus der Reflexivität der Identität ergibt. Wegen Reflexivität der Identität gilt: =(Pegasus, Pegasus). Dann folgt: Es-existiert-ein-*x* (=(Pegasus,*x*)). Wer also die Aussage ‘Pegasus existiert nicht’ in einer affirmativen Redehandlung äußert, der vorgelegten grammatischen Strukturierung [24] beitritt, die Existenzwendung im Sinne des Partikularquantors liest und gleichwohl eine übliche Logik akzeptiert, ist in eine inkonsistente Diskurssituation geraten. Der Weg dahin kann u.a. dadurch blockiert werden, daß man dem Negatum die Struktur ‘Existiert(Pegasus)’ und damit dem gesamten Ausdrucksgebilde die Struktur:

[26] nicht(Existiert(Pegasus))

zuweist; dabei handelt es sich um die Negation einer Atomaussage, deren Hauptoperator ein einstelliger Existenzprädikator ist. Aus [26] ergibt sich zwar durch Partikularquantoreinführung die oberflächlich widersprüchliche Aussage ‘Es-existiert-ein-*x*(nicht(Existiert(*x*)))’; aber dieser irrige Eindruck verdankt sich lediglich der vermeidbaren (grafischen) Ähnlichkeit von Quantor und Prädikator in den Ausdrucksteilen.

Das angedeutete Vorgehen zieht u.a. den der Kant-Frege-Tradition zugeschriebenen Einwand auf sich, ‘existiert’ sei stets Prädikator zweiter Stufe. Da der Existenzprädikator zweiter Stufe mit Hilfe des Partikular- bzw. Existenzquantors definiert wird:

[27] Für-alle-$^1F^1$(Existiert($^1F^1$) genau dann, wenn $\bigvee x\ {}^1F^1(x)$),

läßt sich der Einwand auch so umformulieren: ‘Existenz’ gehört stets der Quantorenkategorie an. Um einzusehen, daß dieser Einwand gegen die Relativierungsmaxime (↑2.3.5) verstößt, betrachte man folgende Umgebungen bzw. Kontexte der Existenzrede:

[28] a) Da der Teufel alle negativen Eigenschaften besitzt und Existenz eine solche ist, existiert der Teufel.

b) Die Existenz der Außenwelt ist strittig; mithin existiert etwas, dessen Existenz strittig ist.

c) Da Tiger gestreifte Katzen sind und Tiger existieren, existieren auch gestreifte Katzen.

Gibt man sich das Ziel vor, diese Gebilde als gültige Begründungen zu interpretieren, so besteht ein Unterziel darin, die vorkommende Existenzrede grammatisch in geeigneter Weise zu strukturieren. Das kann in folgender Weise geschehen:

[29] a) Da Für-alle-$^1F^1$(Negative-Eigenschaft($^1F^1$) $\rightarrow$ $^1F^1$(der Teufel))

Da Negative-Eigenschaft(Existiert)

Also Existiert(der Teufel)

b) Da Ist-strittig(Die-Existenz-von(die Außenwelt))

Also $\bigvee x$ Ist-strittig(Die-Existenz-von(x))

c) Da $\bigwedge x$ (Tiger(x) $\rightarrow$ Gestreifte-Katze(x))

Da $\bigvee x$ Tiger(x)

Also $\bigvee x$ Gestreifte-Katze(x)

Benutzt man die in [27] gegebene Definition des Existenzprädikators zweiter Stufe, dann kann man für die Aussagen in den beiden letzten Zeilen von c) auch ‘Existiert(Tiger)’ und ‘Existiert(Gestreifte-Katze)’ notieren. Das Beispiel macht deutlich, daß die Existenzrede keineswegs >von Natur< im Sinne eines Quantors oder eines Prädikators zweiter Stufe zu lesen ist; es kann – je nach Kontext – zweckmäßig sein, ‘Existenz’ bzw. ‘existiert’ der Kategorie eines Prädikators erster Stufe, eines Funktors, eines Quantors bzw. eines Prädikators zweiter Stufe zuzuweisen.

Stellt man in Rechnung, daß in substantiellen philosophischen Problemstellungen nach der Existenz von Entitäten wie Universalien, Göttern, Zahlen, Werten, Strukturen, Begriffen, Formen, Ideen usf. gefragt wird oder noch >radikaler< nach dem, was überhaupt existiert bzw. warum überhaupt etwas existiert (↑1.1.3), dann verspricht eine systematische Durchforstung dieser Kontroversen im Sinne des Grammatischen Instrumentalismus Aussicht auf Klärungsfortschritt. Auch die jeweils benötigte Verwendungsreglementierung setzt die Klärung der Zugehörigkeit zu einer grammatischen Kategorie voraus.

Ü27 Strukturieren Sie die Aussage ‘Gott existiert’ als Quantorformel und als Elementarformel! Welcher grammatischen Kategorie gehört die Vokabel ‘Gott’ im ersten, welcher gehört sie im zweiten Fall an?

3.4.3 Unterstellige Prädikatorenverwendung

Mit der <u>unterstelligen Prädikatorenverwendung</u> ist ein weiteres Anwendungsfeld des Grammatischen Instrumentalismus namhaft gemacht. Elementare Beispiele wurden einleitend diskutiert: Eine Kontroverse konnte z.B. durch Übergang von den zwei- zu den dreistelligen Rechts-Links-Prädikatoren aufgelöst werden. Erörtert wurden bereits implizite Zweck- und Maßstabsparameter. In der Folge sind weitere Parametersorten aufzuführen, deren Unterschlagung in turbulente Situationen führt (↑1.1.1).

Bekannt und bei der lebensweltlichen Kontroversenbehebung auch häufig herangezogen ist die Relativierung auf <u>Zeit</u>- und <u>Ortsparameter</u>: Was in einem bestimmten Zeitraum an einem bestimmten Ort wohlschmeckend ist, braucht diese Eigenschaft nicht in andere Zeitpassagen oder an andere Orte zu transportieren.

Ebenfalls häufig veranschlagt ist die Relativierung auf <u>Teil</u>- und <u>Aspektparameter</u>. So kann etwa ein Gegenstand rot (und damit nicht blau) und blau (und damit nicht rot) sein, wenn man Rück- und Vorderseite oder Ober- und Unterseite unterscheidet.

Weniger oft eingesetzt, gleichwohl durchschauenswert wegen der kontroversenauflösenden Effekte, sind die drei folgenden Gruppen: Implizite Ordnungsparameter liegen vor, wenn Gebilde als zentral/peripher, als fundamental/abgeleitet, als erste/letzte, als minimale/ maximale usf. rubriziert werden. Diese Charakterisierungen unterschieben eine bestimmte Ordnung: Was in der einen Ordnung an der Peripherie zu stehen kommt, kann in der anderen im Zentrum liegen.

Implizite Sozietätenparameter sind gegeben, wenn (vornehmlich kognitive) Gegebenheiten als (un)klar, (nicht)trivial, (in)evident, (un)plausibel, (un)verständlich, (un)einsichtig, hermetisch usf. charakterisiert werden. Was innerhalb eines Disputverbands, einer bestimmten Tradition trivial und evident ist, ist innerhalb eines/-er anderen unplausibel und uneinsichtig; natürlich ergeben sich hier aufklärungsbedürftige Zusammenhänge mit den akzeptierten Maßstäben und mit den vorgegebenen Zielen.

Implizite Relationsparameter sind gegeben, wenn Entitäten aufeinander bezogen werden, ohne daß zugleich spezifiziert wird, welches die jeweils leitende Relation ist; das ist z.B. der Fall, wenn Gegebenheiten ohne weitere Qualifikation als voneinander (un)abhängig oder miteinander (un)vergleichbar bestimmt werden.

Die Vergegenwärtigung impliziter Parameter verhilft nicht nur dazu, Kontroversen vorzubeugen bzw. diese bei Eintreten aufzulösen und Scheinkonsense zu entlarven. Sie ist auch ein wirksames Mittel, sich selbst Rechenschaft über stillschweigend Unterstelltes und mögliche Alternativen zu geben. So läßt sich z.B. das eigene Zweck-, Maßstabs- und Ordnungskataster (in diesem oder jenem Bereich) auf Vordermann bringen. Ferner geraten implizite Parameter nicht nur wegen ihrer Selbstverständlichkeit häufig in Vergessenheit und sind dann gegebenenfalls zu erinnern, sie werden gelegentlich auch gezielt unterschlagen oder verdeckt gehalten und sind dann gegen solche Kaschierungsabsichten zu ermitteln. Das Aufsuchen impliziter Parameter ist damit ein wirksames Instrument der Ideologiekritik .

Die impliziten Parameter umfassen nicht nur die vergessenen und unterschlagenen: Der Parameter Inertialsystem, der beim wissenschaftshistorisch prominenten Übergang vom zweistelligen Prädikator ‘..ist zeitgleich mit..’ zum dreistelligen ‘..ist zeitgleich mit..bezüglich..’ hinzugefügt wird, läßt sich keiner der beiden Unterklassen zuordnen.

Ü29 a) Finden oder fingieren Sie eine Kontroverse, die durch die Markierung eines der in den Weiterungen genannten Parametersorten aufgelöst werden kann!

b) Finden oder fingieren Sie einen Scheinkonsens, der durch fälschlich unterstellte Parametergemeinsamkeit zustande kommt!

c) Liegt Greifswald im verkehrstechnischen Sinn zentral oder peripher?

Die systematische Ausarbeitung der Stelligkeitserhöhung als Instrument der – allgemein gesagt – Aporienbewältigung, muß hier als dringendes Desiderat angezeigt werden! – Zur weiteren Anregung in diese Richtung ist die folgende Übung gedacht:

Ü30 Stellen Sie Überlegungen zur Stelligkeit der als Prädikatoren aufzufassenden Vokabeln ‘neu’, ‘informativ’, ‘neutral’, ‘tolerant‘, ‘kreativ‘ an.

Wenn der (immer: Rationalen) Grammatik im allgemeinen eine zentrale Rolle bei der Organisation unserer Erkenntnishandlungen, einer prominenten Teilmenge der Redehandlungen, zukommt, wenn im besonderen bei heiklen philosophischen Problemlagen hohe >grammatische Aufmerksamkeit< gefordert ist, dann muß auch im Fortgang dem grammatischen Status der Redemittel mit Schlüsselfunktion ein besonderes Augenmerk gelten!

Ü31 Notieren Sie wenigstens zwei Prädikatoren aus jedem der bisherigen Kapitel 1. bis 3. und stellen Sie Überlegungen zur Stelligkeit an!

3.5 Literatur

Ajdukiewicz, K.: Die syntaktische Konnexität; Studia philosophica (1) 1936, 1-27 [zu 3.3].

Bar-Hillel, Y.: “Syntactical and Semantical Categories“; in: Edwards, P. (ed.): The Encyclopedia of Philosophy; New York 1977, vol. 8, 57-61 [zu 3.3 und Lit.].

Bochenski, J.M.: Über syntaktische Kategorien; in: Bochenski, J.M.: Logisch-philosophische Studien; Freiburg 1959, 75-96 [zu 3.3].

Frege, G.: Funktion und Begriff; in: Frege, G.: Kleine Schriften; Darmstadt 1967, 125-142 [zu 3.3.1 und 3.3.6].

Geach, P.: A Program for Syntax; Synthese 22 (1970/71).

Helbig, G.: Geschichte der neueren Sprachwissenschaft; Hamburg 1974 [zu 3.1].

Kraml, H.: Sprachphilosophie I, II (Vorlesungsmanuskript WS 92/93 und SS 93 an der Philosophischen Fakultät der Universität Innsbruck).

Die Teile 2.2.1 bis 2.3 und der Teil 4 sind v.a. zu Abschnitt 3.1 dieses Skriptums einschlägig.

Kratzer, A.: “Kategorie, syntaktische, semantische“; in: Ritter, J./Gründer, G. (Hg.): Historisches Wörterbuch der Philosophie 4, Basel 1976, Sp. 776-780 [zu 3.1 und 3.3; Literatur].

Lyons, J.: Einführung in die moderne Linguistik; München 1989[7] [zu 3.1].

Lorenz, K.: “Kategorie, syntaktische“; in: Mittelstraß, J. (Hg.): Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie 2, Mannheim 1984, 369f. [zu 3.3; Lit.].

Lorenz, K.: “Artikulation und Prädikation“; in: Lorenz, K. et al. (Hg.): Sprachphilosophie. Ein internationales Handbuch zeitgenössischer Forschung 2. Halbband; Berlin (im Erscheinen) [zu 3.3.6].

Lorenzen, P.: Logik und Grammatik; in: Ders: Methodisches Denken; Frankfurt/Main l974, 70-80 [zu 3.1 und 3.3.5].

Zu dem Absatz 3.2 sind Logische Propädeutiken sowie Lehrbücher der Logik zu konsultieren!

4. Das Regelwerk für das Schließen 126

4.1 Die Redehandlung des Annehmens 126

4.2 Regeln für die Junktoren 129
4.2.1 Der Subjunktor 129
4.2.2 Der Konjunktor 135
4.2.3 Der Bisubjunktor 140
4.2.4 Der Adjunktor 145
4.2.4 Der Negator 154

4.3 Regeln für die Quantoren 160
4.3.1 Der Universalquantor 160
4.3.2 Der Partikularquantor 167

4.4. Regeln für den Identitätsprädikator 182

4.5. Das Regelwerk im Überblick 187

4.6. Literatur 194

Zu jedem der logischen Zeichen ... gehört genau eine Schlußfigur, die das Zeichen ... „einführt“, und eine, die es „beseitigt“ ... Die Einführungen stellen sozusagen die „Definitionen“ der betreffenden Zeichen dar, und die Beseitigungen sind letzten Endes nur Konsequenzen hiervon ...
Gerhard Gentzen

4. Das Regelwerk für das Schließen

Das erste Kapitel machte über Beispielbetrachtungen mit Projekt und Programm der Vorschule der Philosophie vertraut (1.). Das zweite Kapitel spannte ein sprachphilosophisches Netz: Im Zentrum stehen die Konzepte der Redehandlung und der Sprache: Redehandlungen sind von Regeln regiert und Sprachen bilden den Inbegriff dieser Regeln (2.). Der Vollzug von Redehandlungen besteht in der Äußerung von Sätzen, die aus Performator und Aussage zusammengestellt sind. Das dritte Kapitel bestimmt die kleinsten Ausdruckseinheiten, aus denen komplexe Verbindungen zusammengesetzt sind, sowie die Wege des Zeichenaufbaus. (3.). Damit sind u.a. die grammatischen Voraussetzungen für die Behandlung der Folgerungsregeln und der später vorgelegten Definitionsregeln gegeben.

Das folgende Kapitel zielt auf die Motivierung, Formulierung und Anwendung der logischen Regeln. Es gliedert sich in sechs Abschnitte: Zunächst ist die Redehandlung des Annehmens zu gestalten. Dabei ergibt sich auch Gelegenheit, die Abhängigkeitsrede und einige klassensprachliche Vokabeln zu erläutern (4.1). Die (hier berücksichtigten) logischen Operatoren umfassen die Kernjunktoren, die Kernquantoren und den Identitätsprädikator. Diese finden in der genannten Reihenfolge Behandlung (4.2 – 4.4). Im letzten Schritt ist das erarbeitete Regelwerk >auf einen Blick< zusammenzustellen und einer abschließenden Kommentierung zu unterziehen (4.5). Literaturhinweise zum natürlichen Schließen leiten das weitere Studium an (4.6).

4.1 Die Redehandlung des Annehmens

Das Annehmen soll die Möglichkeit eröffnen, jede <u>beliebige</u> Aussage Δ in einem Diskurs als Prämisse für Folgerungsakte einzubringen. Mit dem Annehmen ist hier also keinerlei Plausibilitätszuschreibung verbunden. Der Wunsch nach einer derartigen Redemöglichkeit mag zunächst befremden: Ist damit nicht in dem Sinne der Willkür Tür und Tor geöffnet, als in ihrem Wahrheitsstatus ungesicherte, ja sogar falsche Aussagen in Diskurse eingespeist werden dürfen? Obwohl die soeben beschriebene Möglichkeit tatsächlich mit dem

Annehmen geschaffen wird, ist damit die Willkür keineswegs befördert. Zwei Hinweise mögen als Startrechtfertigung für die Einrichtung des Annehmens genügen. Zunächst: Häufig sucht man den alethischen – oder schwächer: epistemischen – Status einer Aussage Δ dadurch zu ermitteln, daß man sie einer Was-wäre-wenn-Betrachtung bzw. einer hypothetischen Erwägung unterzieht: Was ergäbe sich (als Konsequenz), wenn Δ der Fall wäre. Dazu nimmt man Δ an und versucht, aus Δ und in aller Regel einer Klasse *X* von wahren oder aus anderen Gründen akzeptierbaren Aussagen $\Gamma_1,...,\Gamma_n$ Konsequenzen zu ziehen. Ergibt sich ein Widerspruch, dann wird man sich im Regelfall von Δ verabschieden. Resultieren nur verträgliche Aussagen, dann mag man Δ ein (vielleicht auch nur geringes) epistemisches Gewicht zubilligen und sie weiteren Überprüfungsgängen unterziehen. Damit aber die wie auch immer endende hypothetische Erwägung überhaupt starten kann, muß Δ durch eine geeignete Redehandlung, eben das Annehmen, für das Ziehen von Konsequenzen verfügbar gemacht werden.

Sodann: Gelegentlich möchte man Aussagen Δ >planmäßig< dadurch begründen, daß man ihre Negation, $\neg\Delta$, widerlegt; oder man sucht die Negation von Δ zu begründen, indem man Δ widerlegt. Um den Widerlegungskandidaten überhaupt als >Zielscheibe< zugänglich zu machen, muß man ihn in die Widerlegung/Begründung einbringen: Eben dies leistet das Annehmen. Gelingt die Widerlegung, dann ist das je Widerlegte, Δ oder $\neg\Delta$, falsch. Man hat also, rückblickend betrachtet, tatsächlich Falsches angenommen, aber nur deshalb, um eben dies ans Licht zu bringen.

Im Zuge der Erläuterung der Subjunktoreinführung und der Partikularquantor- und Adjunktorbeseitigung wird sich die Rolle und damit der Nutzen des Annehmens weiter klären. – Auf Basis dieser Startplausibilisierung kann die betrachtete Redehandlung so geregelt werden:

[1] Ich-setze-als-Handlungsanleitung: Man darf jede beliebige Aussage Δ annehmen.

Man vollzieht Annahmeakte, indem man Annahmesätze äußert. Diese sind aus dem je gewählten Annahmeperformator und der angenommenen Aussage Δ aufgebaut. Als Annahmeperformator dienen später die Zeichen 'Sei__' und 'Wäre__'. Wie üblich kennt die Gebrauchssprache viele weitere Zeichen für den Vollzug des Annehmens (↑9.). – Die stereotype Wendung 'Ich-setze-als-Handlungsanleitung__' wird bei der Formulierung der weiteren Regeln vernachlässigt.

Trotz der Plausibilisierung der Annahmeregel (=AR) verbleibt ein Unbehagen. Sollte nicht offengelegt werden, daß mit dem Annehmen keinerlei >epistemisches< oder >alethisches<

Gewicht verbunden ist? Dieses Unbehagen nimmt man mit dem Abhängigkeitsgedanken auf: Die angenommene Aussage soll von sich selbst abhängen.

[2] Wenn man eine Aussage Δ angenommen hat, dann hat man Δ in Abhängigkeit von $\{\Delta\}$ gewonnen.

Damit dürfte jeder Willkürverdacht zerstreut sein: Das Annehmen gleicht einer Kreditaufnahme, die im weiteren Gang des Diskurses getilgt werden kann: Man verfügt über das Geld, fängt etwas mit ihm an, muß es aber schlußendlich zurückzahlen. Die Rückzahlung erfolgt dabei über abhängigkeitentilgende Folgerungsschritte. – Man tilgt, löscht, befreit, entlastet sich von Annahmen usf.; es sollte in diesem Kontext jedoch vermieden werden, in Analogie zu den Folgerungsregeln von der Annahmebeseitigung zu reden.

Aussagen hat man auch dann gewonnen, wenn man sie gefolgert hat; dabei bleiben die Abhängigkeiten stabil:

[3] Wenn man eine Aussage Δ in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse X gefolgert hat, dann hat man Δ in Abhängigkeit von X gewonnen.

Auch das später geregelte und im weiteren in Erläuterungskontexten und Musterüberlegungen benutzte Anziehen von Aussagen, das Einbringen schon als wahr erwiesener Aussagen in Diskurse, stellt einen Gewinn von Aussagen dar, und zwar einen Gewinn in Abhängigkeit von der leeren Klasse, d.h. ein Gewinn frei von Abhängigkeiten.

Vorstehend und in der Folge findet das Klassenvokabular informelle Verwendung: '$\{\Delta\}$' (Lies: die Einerklasse aus Δ) bezeichnet die Klasse mit Δ als einzigem Element. '$\Gamma \in X$' (Lies: Γ (ist Element) aus X) formuliert den Sachverhalt, daß Γ der Klasse X angehört. Die klassenalgebraischen Funktoren, der Vereinigungs-, Schnitt- und Differenzfunktor, finden wie üblich Verwendung: $X \cup Y$ ist die Klasse der z, die aus X oder aus Y sind, $X \cap Y$ ist die Klasse der z, die sowohl aus X als auch aus Y sind, $X \backslash Y$ ist die Klasse der z, die aus X aber nicht aus Y sind. Das Zeichen '0' vertritt die leere Klasse, die Klasse also, die keine Elemente enthält.

Damit sind alle Zurüstungen verfertigt, um die Bedeutung der logischen Operatoren bzw. die logischen Regeln zu motivieren. Die Etablierung eines n-stelligen logischen Operators τ^n erfolgt in Beantwortung von zwei im Ergänzungsverhältnis stehenden Fragen: (i) Unter welchen Bedingungen bzw. bei welcher Diskurslage darf man auf eine Aussage $\tau^n(o_1,...,o_n)$ schließen? (ii) Was darf man aus einer Aussage $\tau^n(o_1,...,o_n)$ (und gegebenenfalls weiteren

Aussagen) schließen? Beispiele: Unter welchen Bedingungen darf man auf eine Konjunktion, Partikularquantifikation, Identitätsaussage usf. schließen? Was darf man aus einer Konjunktion, Partikularquantifikation, Identitätsaussage usf. (und gegebenenfalls weiteren Aussagen) schließen?

Die erste Frage wird durch eine sogenannte Einführungsregel beantwortet, die zweite durch eine Beseitigungsregel. Die allgemeine Form von Einführungsregeln lautet: Unter den und den Bedingungen darf man auf eine Aussage $\tau^n(o_1,...,o_n)$ schließen. Beseitigungsregeln folgen dem Schema: Aus einer Aussage $\tau^n(o_1,...,o_n)$ (und gegebenenfalls weiteren Aussagen) darf man auf eine Aussage der und der Art schließen. Da die Bedingungen bzw. die Diskurslage stets durch das Folgern, Annehmen oder Anziehen von Aussagen, d.h. durch ihr Gewinnen, zu spezifizieren sind, resultieren unter Berücksichtigung der Abhängigkeiten folgende Schemata: Wenn man so und so beschaffene Aussagen in den und den Abhängigkeiten gewonnen hat, dann darf man eine Aussage $\tau^n(o_1,...,o_n)$ in der und der Abhängigkeit folgern. Wenn man eine Aussage $\tau^n(o_1,...,o_n)$ in der und der Abhängigkeit (und gegebenenfalls weitere Aussagen in den und den Abhängigkeiten) gewonnen hat, dann darf man eine Aussage $\tau^n(o_1,...,o_n)$ in der und der Abhängigkeit folgern.

4.2 Regeln für die Junktoren

In der Folge sind Regelpaare des charakterisierten Typs für die fünf Kernjunktoren anzugeben. Von der grammatischen Seite her handelt es sich bei Subjunktor, Konjunktor, Bisubjunktor und Adjunktor um zweistellige Junktoren, beim Negator um einen einstelligen. Da der Negator Besonderheiten aufweist, sind zunächst die zweistelligen Operatoren zu behandeln.

4.2.1 Der Subjunktor

Zur Erinnerung: Der Subjunktor '$\rightarrow$(__,__)' bzw. '__$\rightarrow$__' ist ein zweistelliger, formelbestimmender und formelerzeugender Operator. Das Ergebnis der Anwendung von '__$\rightarrow$__' auf Formeln A, B ist die Subjunktion aus A und B, also $A \rightarrow B$. Dabei ist A das Antezedens bzw. der Wenn-Teil und B das Sukzedens bzw. der Dann-Teil (↑3.2.3).

Anzugeben ist nun, unter welchen Bedingungen auf eine Subjunktion geschlossen werden darf bzw. was aus einer Subjunktion gefolgert werden kann. Wenn man eine Aussage B in Abhängigkeit von einer Aussage A gewonnen hat, dann darf man diese Abhängigkeit durch

Schließen auf die Subjunktion $A \rightarrow B$ explizit machen. Wenn man umgekehrt eine derartige Subjunktion $A \rightarrow B$ sowie ihr Antezedens gewonnen hat, dann darf man B >abtrennen<, d.h. auf B schließen. – Zum Verständnis dieser Antworten kann eine Orientierung am gebrauchssprachlichen 'Wenn__, dann__' und seinen Synonymen hilfreich sein.

Zunächst zur Beseitigungsregel: Sie regiert das Schulbeispiel für Schließen überhaupt: Wenn Sokrates ein Mensch ist, dann ist Sokrates sterblich. Nun ist Sokrates ein Mensch. Also ist Sokrates sterblich. Schematisch: Wenn A, dann B. Nun A. Also B. Wenn man also eine Subjunktion aus A und B gewonnen hat und ferner das Antezedens A, dann darf man auf B schließen. Stellt man überdies in Rechnung, daß man die Aussagen in Diskursen in (im Grenzfall leeren) Abhängigkeiten gewinnt, daß man ferner beim Folgerungsakt von all den Aussagen abhängt, von denen man beim Gewinn von Subjunktion und Antezedens abhängt, dann ergibt sich folgende <u>Schlußfigur</u> für die Subjunktorbeseitigung:

[4] Ξ_X $\quad A \rightarrow B$

Ξ_Y $\quad A$

$\text{Also}_{X \cup Y}$ $\quad B$

Ξ deutet dabei die Prämissensprechakte des Annehmens, Folgerns oder (für spätere Überlegungen) Anziehens an. 'X', 'Y' vertreten Aussagenklassen. Sie werden als Indizes an den Performatoren geführt und signalisieren, daß z.B. in Abhängigkeit von $X \cup Y$ die Aussage B gefolgert worden ist. – Die Regel der <u>S</u>ubjunktor<u>b</u>eseitigung (=SB) liest sich so:

[5] Wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse X die Subjunktion aus einer Aussage A und einer Aussage B gewonnen hat und wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse Y die Aussage A gewonnen hat, dann darf man in Abhängigkeit von $X \cup Y$ die Aussage B folgern.

Die Subjunktion und ihr Antezedens sind die beiden <u>Prämissen</u> des Schlusses nach SB. Die Regel spezifiziert also, was man aus einer Subjunktion <u>und</u> ihrem Antezedens folgern darf. – SB wird häufig auch unter dem Titel 'Modus ponendo ponens' oder 'Abtrennungsregel' vorgestellt und angewendet.

Die <u>E</u>inführungsregel für den <u>S</u>ubjunktor (=SE) geht aus von einer Situation, in der man eine Aussage, z.B. 'Sokrates ist sterblich', in Abhängigkeit von einer Aussage, z.B. von 'Sokrates ist ein Mensch', (durch hier nicht weiter interessierende Züge) gewonnen hat. Mit der Subjunktoreinführung macht man diese Abhängigkeit explizit, indem man sie ausdrücklich als Wenn-Dann-Verhältnis faßt: Wenn Sokrates ein Mensch ist, dann ist Sokrates sterblich.

Die >vertikale< Abhängigkeit wird in das >horizontale< Subjunktionsverhältnis überführt. Dabei wird die Abhängigkeit von ’Sokrates ist ein Mensch’ getilgt. Verläßt man das Beispiel und verallgemeinert man die Abhängigkeit, dann resultiert folgende Schlußfigur:

[6] Ξ_X B , wobei $A \in X$

$\text{Also}_{X\backslash\{A\}}$ $A \rightarrow B$

Man hat eine Aussage B gewonnen, in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse *X*, der auch die Aussage A angehört; dann darf man die Subjunktion aus A und B folgern, wobei die Abhängigkeit von A getilgt wird. Natürlich kann man SE bezüglich <u>jeder</u> in *X* enthaltenen Aussage vollziehen. Sieht man ab von dem Grenzfall, daß man eine Aussage dadurch gewonnen hat, daß man sie in Abhängigkeit von sich selbst angenommen hat, dann stellt sich der Normalfall so dar: Man nimmt eine Aussage A an und folgert gegebenenfalls in Abhängigkeit von weiteren Aussagen die Aussage B; dann macht man durch Subjunktoreinführung die Abhängigkeit explizit. Die praxisnahe Schlußfigur läßt sich also so notieren:

[6]+ Sei A

... ...

Also_X B , wobei $A \in X$

$\text{Also}_{X\backslash\{A\}}$ $A \rightarrow B$

Damit legt sich folgende Formulierung der <u>S</u>ubjunktor<u>e</u>inführung (=SE) nahe:

[7] Wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse *X* mit $A \in X$ eine Aussage B gewonnen hat, dann darf man in Abhängigkeit von $X\backslash\{A\}$ die Subjunktion aus A und B folgern.

Das Sukzedens der gefolgerten Subjunktion ist die Prämisse des Schlusses nach SE. Die Regel spezifiziert also, daß man die Subjunktion aus A und B dann folgern darf, wenn man das Sukzedens in Abhängigkeit u.a. vom Antezedens gewonnen hat. Insofern man im Schlußakt eine im Prämissenakt bestehende Abhängigkeit tilgt, zahlt man, um das Bild fortzuführen, die im Annahmeakt aufgenommenen Schulden zurück.

SE gibt den Weg vor, um auf eine Subjunktion zu schließen. Geschieht dies frei von Abhängigkeiten, dann ist die gefolgerte Subjunktion beweisbar bzw. – allgemeiner – wahr. Insofern legt SE den Beweis- bzw. – allgemeiner – den Wahrheitsqualifizierungsweg für

Subjunktionen fest. SB eröffnet die Möglichkeit, auf eine Aussage zu schließen, sofern sie Sukzedens einer Subjunktion ist und das Antezedens ebenfalls gewonnen worden ist. Besteht im Folgerungsakt keine Abhängigkeit mehr, dann ist die gefolgerte Aussage beweisbar bzw. – allgemein – wahr. Insofern spezifiziert SB den Beweis- bzw. – allgemeiner – den Wahrheitsqualifizierungsweg für Aussagen, die als Sukzedentia in der beschriebenen Konstellation vorkommen und damit die Rolle von Subjunktionen als Wahrheitsbasen.

In der Folge werden drei Aussagen von der Form der Subjunktion bewiesen. Dadurch wird Vertrautheit im Umgang mit den Regeln und Einsicht in den Zusammenhang von Wahrheit(squalifizierung) und Bedeutung(sfestlegung) gewonnen (↑2.4.6, 2.4.7). Das erste Theorem wird unter dem Titel 'Kürzung des neutralen Faktors' geführt: Gilt unter A, daß Γ falls A, dann gilt Γ unter A:

[8] Es-gilt $(A \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)) \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)$

Zu beweisen ist eine Subjunktion. Bewiesen ist eine Aussage, wenn sie frei von Abhängigkeiten gefolgert wird. Der Beweiskandidat muß also frei von Abhängigkeiten gefolgert werden. Der letzte Beweisschritt lautet also:

[8]+ k Also $(A \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)) \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)$

Dabei beziffert k die letzte Zeile: Die letzte Zeile eines Beweises enthält die Aussage im Folgerungsmodus („conclusion"), die die erste unter [8] im Behauptungsmodus („claim") präsentiert. Dieser Schritt ist legitim nach SE, falls es gelingt, folgende Diskurslage herzustellen:

[8]*	1	Sei_1	$A \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)$	
		...		
	k-1	$Also_1$	$A \rightarrow \Gamma$	
	k	Also	$(A \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)) \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)$	| SE; k-1

Der Index am Performator der ersten Zeile zeigt an, daß $A \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)$ in Abhängigkeit von sich selbst angenommen worden ist (↑[2]). Der Index in der k-1-ten Zeile informiert darüber, daß $A \rightarrow \Gamma$ in Abhängigkeit von der erstens angenommenen Zeile gefolgert worden ist. Die unter [8]* gegebene Diskurslage erlaubt nach SE den unter [8]+ angezeigten Folgerungsschritt, der wiederum in k notiert ist. Die Restaufgabe lautet darauf, $A \rightarrow \Gamma$ in Abhängigkeit von $A \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)$ zu folgern.

Die Zielaussage ist wiederum eine Subjunktion. Diese wird nach SE erreicht, indem Γ in Abhängigkeit von A gefolgert wird, und zwar in Abhängigkeit auch von der ersten angenommenen Aussage:

[8]°	1	Sei_1	$A \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)$	
	2	Sei_2	A	
	...	...	...	
	k-2	$Also_{1,2}$	Γ	
	k-1	$Also_1$	$A \rightarrow \Gamma$	SE; k-2
	k	Also	$(A \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)) \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)$	SE; k

In Schließung der Lücke zwischen Zeile 2 und Zeile k-2 ist lediglich SB zur zweifachen Anwendung zu bringen: In Zeile 2 steht das Antezedens der in Zeile 1 angenommenen Subjunktion; damit läßt sich $A \rightarrow \Gamma$ schließen. Auch für diese Subjunktion kann A als Antezedens dienen, so daß sich Γ ergibt. – Damit läßt sich der gesamte Beweis notieren. Die k-Bezifferung kann ersetzt werden durch eine durchlaufende Numerierung. In Fortführung der Kommentierung durch die Regelnamen und die Prämissenzeilen in der rechten Spalte ergibt sich:

[8]°°	1	Sei_1	$A \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)$	AR
	2	Sei_2	A	AR
	3	$Also_{1,2}$	$A \rightarrow \Gamma$	SB; 1,2
	4	$Also_{1,2}$	Γ	SB; 2,3
	5	$Also_1$	$A \rightarrow \Gamma$	SE; 4
	6	Also	$(A \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)) \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)$	SE; 5

Da die Annahmeregel keine nennenswerte Information enthält, wird sie in der Folge weggelassen. Hinter dem Kurznamen der logischen Regel sind die Prämissen- bzw. Anwendungszeilen namhaft gemacht, die Zeilen also, die man gewonnen haben muß, um die Regeln anwenden zu können.

Das zweite Theorem hört auf den Namen ’Nachsetzung des neutralen Faktors’. Die Kommentierung wird dem Beweis nachgestellt:

[9]	0	Es-gilt	$(A \to B) \to ((B \to \Gamma) \to (A \to \Gamma))$	
	1	Sei$_1$	$A \to B$	
	2	Sei$_2$	$B \to \Gamma$	
	3	Sei$_3$	A	
	4	Also$_{1,3}$	B	SB; 1,3
	5	Also$_{1,2,3}$	Γ	SB; 2,4
	6	Also$_{1,2}$	$A \to \Gamma$	SE; 5
	7	Also$_1$	$(B \to \Gamma) \to (A \to \Gamma)$	SE; 6
	8	Also	$(A \to B) \to ((B \to \Gamma) \to (A \to \Gamma))$	SE; 7

Um eine Subjunktion zu beweisen, muß man ihr Antezedens annehmen, um in Abhängigkeit davon das Sukzedens zu folgern; Anwendung von SE erledigt den Rest. Um das in Zeile 7 in Abhängigkeit von dem erstens Angenommenen zu folgern, muß man das Antezedens wiederum annehmen – das geschieht in Zeile 2 –, um, wie in Zeile 6 geschehen, das Sukzedens zu folgern. Auch die Aussage in Zeile 6 ist eine Subjunktion: Es ist also Zeile 3 – das Antezedens – anzunehmen. Die auf Zeile 6 führenden Folgerungsschritte erfolgen durch SB: Die Bedeutung des Subjunktors legt in offensichtlicher Form den Beweisweg fest.

Zuletzt ist die Reflexivität des Subjunktors nachzuweisen; das kann in einem Zweizeiler geschehen:

[10]	0	Es-gilt	$\Gamma \to \Gamma$	
	1	Sei$_1$	Γ	
	2	Also	$\Gamma \to \Gamma$	SE; 1

Nimmt man eine Aussage A an, so hängt sie von sich selbst ab (↑[2]). Damit ist die Anwendung von SE erlaubende Diskurslage gegeben, falls A Antezedens wie auch Sukzedens der Subjunktion ist. Genauer: *X* entspricht $\{\Gamma\}$, A entspricht Γ und B entspricht Γ.

Ü1 Beweisen Sie die folgende Aussage/das folgende Aussagenschema:

$(A \to B) \to ((\Gamma \to A) \to (\Gamma \to B))$

Mit dem vorgestellten Regelpaar SE bzw. SB ist festgelegt, auf welchem Weg man zu Subjunktionen gelangt bzw. welcher Weg von Subjunktionen (und ihrem Antezedens)

ausgeht. Damit ist, um es zu wiederholen, insbesondere festgelegt, wie man Subjunktionen als wahr erweist bzw. beweist und was man aus wahren Subjunktionen (und ihrem Antezedens) als wahr erweisen/beweisen kann.

SB sagt, was man aus einer Subjunktion und ihrem Antezedens folgern darf: Die Subjunktion ist die Hauptprämisse, das Antezedens die Nebenprämisse des Schlusses bzw. der Schlußfigur. Die Unterscheidung zwischen Haupt- und Nebenprämisse greift auch bei Adjunktor-, Bisubjunktor-, Partikular- und Identitätsbeseitigung.

4.2.2 Der Konjunktor

Zur Erinnerung: Der Konjunktor '∧(__,__)' bzw. '__∧__' ist ein zweistelliger, formelbestimmender und formelerzeugender Operator. Das Ergebnis der Anwendung von '__∧__' auf Formeln A, B ist die Konjunktion aus A und B, also A∧B. A, B sind die Konjunkte bzw. Konjunktionsglieder. A ist das linke, B das rechte Konjunkt (↑3.2.3).

Anzugeben ist nun, unter welchen Bedingungen auf eine Konjunktion geschlossen werden darf bzw. was aus einer Konjunktion gefolgert werden kann. Die Antwortideen sind (zumindest an der Oberfläche) einfach: Aus zwei Aussagen darf man auf ihre Konjunktion schließen und aus einer Konjunktion darf man beide Konjunkte folgern. – Zur Beantwortung der Leitfragen kann eine Orientierung am gebrauchssprachlichen '__und__' und seinen Synonymen hilfreich sein.

Zunächst zur Konjunktoreinführung: Wenn man die Aussagen 'Sokrates ist weise' und 'Xanthippe ist zänkisch' gewonnen hat, dann soll man auf die Konjunktion aus den Aussagen 'Sokrates ist weise und Xanthippe ist zänkisch' schließen dürfen. Allgemein: Aus A und B soll man auf die Konjunktion A ∧ B schließen dürfen. Stellt man in Rechnung, daß man Aussagen in Diskursen in (im Grenzfall leeren) Abhängigkeiten gewinnt, daß man ferner beim Folgern der Konjunktion von all den Aussagen abhängt, von denen man beim Gewinn der jeweiligen Konjunkte abhängt, dann ergibt sich folgende Schlußfigur für die Konjunktoreinführung:

[11]	Ξ_X	A
	Ξ_Y	B
	$\text{Also}_{X \cup Y}$	A ∧ B

Es gilt hier und hinfort die bei der Vorstellung der Subjunktorbeseitigung erläuterte Notation (↑[4]). – Die Regel der Konjunktoreinführung (=KE) lautet:

[12] Wenn man eine Aussage A in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse *X* und eine Aussage B in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse *Y* gewonnen hat, dann darf man die Konjunktion aus A und B in Abhängigkeit von $X \cup Y$ folgern.

Die Konjunktorbeseitigung kehrt die Konjunktoreinführung um: Wenn man die Konjunktion aus ’Sokrates ist weise’ und ’Xanthippe ist zänkisch’ gewonnen hat, also ’Sokrates ist weise und Xanthippe ist zänkisch’, dann darf man jedes der beiden Konjunkte, also sowohl ’Sokrates ist weise’ als auch ’Xanthippe ist zänkisch’, folgern. Allgemein: Aus Konjunktionen $A \wedge B$ darf man beide Konjunktionsglieder, also sowohl A als auch B, folgern. Stellt man überdies in Rechnung, daß man Konjunktionen in Diskursen gewöhnlich in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse *X* gewinnt und daß sich diese Abhängigkeit auf den Schlußakt überträgt, dann erhält man folgende Schlußfigur:

[13] Ξ_X $A \wedge B$

Also_X A

Also_X B

Die Regel der <u>K</u>onjunktions<u>b</u>eseitigung (=KB) lautet entsprechend:

[14] Wenn man die Konjunktion aus einer Aussage A und einer Aussage B in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse *X* gewonnen hat, dann darf man sowohl A als auch B in Abhängigkeit von *X* folgern.

Die Abhängigkeit in der Prämissenredehandlung ist die gleiche wie die in der Folgerungshandlung. – Weder KE noch KB bieten die Möglichkeit der Tilgung von Abhängigkeiten.

KE gibt den Weg vor, um auf eine Konjunktion zu schließen. Geschieht dies frei von Abhängigkeiten, dann ist die gefolgerte Aussage beweisbar bzw. – allgemeiner – wahr. KE bahnt den Weg zum Beweis bzw. – allgemeiner – zur Wahrqualifizierung von Konjunktionen. KB eröffnet die Möglichkeit, auf Aussagen zu schließen, sofern sie Konjunkte einer bereits gewonnenen Konjunktion sind. Ist die gewonnene Konjunktion wahr, dann sind auch die gefolgerten Konjunkte wahr. KB spezifiziert also, in welchem Sinne Konjunktionen als Wahrheitsbasis einsetzbar sind.

In der Folge werden die Regeln im Zuge des Beweises von drei Aussagen >in Aktion< vorgeführt. Die erste ist die Transitivität des Subjunktors. Sie läßt sich erst jetzt formulieren,

weil im Antezedens der Konjunktor Hauptoperator ist: Bedingt A B, B aber Γ, dann bedingt A auch Γ:

[15] Es-gilt $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow \Gamma)) \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)$

Der Beweiskandidat ist eine Subjunktion. Um eine Subjunktion zu beweisen, nimmt man ihr Antezedens an, um ihr Sukzedens in Abhängigkeit vom angenommenen Antezedens zu folgern; auf die so gewonnene Diskurslage greift dann SE zu:

[15]+ 1	Sei$_1$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow \Gamma)$	
...	...	...	
k	Also$_1$	$A \rightarrow \Gamma$	
k+1	Also	$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow \Gamma)) \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)$	| SE; k

Die verbleibende Aufgabe lautet darauf, in Abhängigkeit von dem erstens Angenommenen $A \rightarrow \Gamma$ zu folgern.

Da es sich wiederum um eine Subjunktion handelt, ist das Antezedens in der Absicht anzunehmen, das Sukzedens in Abhängigkeit vom Antezedens zu folgern; dabei muß das Sukzedens mit Blick auf das übergeordnete Beweisziel auch vom erstens Angenommenen abhängen:

[15]* 1	Sei$_1$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow \Gamma)$	
2	Sei$_2$	A	
...	...	...	
k-1	Also$_{1,2}$	Γ	
k	Also$_1$	$A \rightarrow \Gamma$	| SE; k-1
k+1	Also	$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow \Gamma)) \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)$	| SE; k

Als Prämissen kommen für die verbleibende Aufgabe nur die Aussagen der ersten und zweiten Zeile in Frage. Hier greift jedoch keine (bisher vorgestellte) Regel direkt. Man muß versuchen, die Prämissen zielführend aufzubereiten: Trennt man jedoch die erste Annahme mit KB, dann kann man aus A und dem linken Konjunkt B folgern, um dann aus B und dem rechten Konjunkt auf Γ zu schließen. Insgesamt ergibt sich dann folgender Beweis der Transitivität des Subjunktors:

[15]°	1	Sei_1	$(A \to B) \wedge (B \to \Gamma)$	
	2	Sei_2	A	
	3	$Also_1$	$A \to B$	KB; 1
	4	$Also_1$	$B \to \Gamma$	KB; 1
	5	$Also_{1,2}$	B	SB; 2,3
	6	$Also_{1,2}$	Γ	SB; 4,5
	7	$Also_1$	$A \to \Gamma$	SE; 6
	8	Also	$((A \to B) \wedge (B \to \Gamma)) \to (A \to \Gamma)$	SE; 7

Das Exportationstheorem überführt die Subjunktion aus $A \wedge B$ einerseits und Γ andererseits in die Subjunktion aus A einerseits und die Subjunktion aus B und Γ andererseits:

[16]	0	Es-gilt	$((A \wedge B) \to \Gamma) \to (A \to (B \to \Gamma))$	
	1	Sei_1	$(A \wedge B) \to \Gamma$	
	2	Sei_2	A	
	3	Sei_3	B	
	4	$Also_{2,3}$	$A \wedge B$	KE; 2,3
	5	$Also_{1,2,3}$	Γ	SB; 1,4
	6	$Also_{1,2}$	$B \to \Gamma$	SE; 5
	7	$Also_1$	$A \to (B \to \Gamma)$	SE; 6
	8	Also	$((A \wedge B) \to \Gamma) \to (A \to (B \to \Gamma))$	SE; 7

Das Verum-ex-quodlibet besagt in intuitiver Lesung daß, falls eine Aussage gilt, sie auch unter einer beliebigen Bedingung gilt; das Vorschieben einer Bedingung ist eine Abschwächung der Aussage und Schwächeres gilt >a fortiori<, wenn Stärkeres gilt:

[17]	Es-gilt	$A \to (\Gamma \to A)$

Die Aussage enthält den Subjunktor als einzigen Operator; der Konjunktor ist nicht Teilausdruck. Zum Beweis muß man $\Gamma \to A$ in alleiniger Abhängigkeit von A gewinnen; davor muß man A in Abhängigkeit von sich selbst und Γ folgern. Folgender Beweisplan scheint aussichtsreich:

[17]+	1	Sei_1	A	
	2	Sei_2	Γ	
	...	...	...	
	k	$Also_{1,2}$	A	
	k+1	$Also_1$	$\Gamma \rightarrow A$	| SE; k
	k+2	Also	$A \rightarrow (\Gamma \rightarrow A)$	| SE; k+1

Nun ist prima facie nicht zu sehen, wie man in der k-ten Zeile A in Abhängigkeit <u>auch</u> von Γ erhält. Hier hilft – secunda facie – KE, indem sie die Herstellung einer <u>künstlichen Abhängigkeit</u> erlaubt: Man folgert im dritten Schritt die Konjunktion aus A und Γ; dabei ist man sowohl von A als auch von Γ abhängig. Folgert man nun im vierten bzw. k-ten Schritt A, dann bleibt diese – erwünschte – Abhängigkeit bestehen. Im Überblick:

[17]*	1	Sei_1	A	
	2	Sei_2	Γ	
	3	$Also_{1,2}$	$A \wedge \Gamma$	| KE; 1,2
	4	$Also_{1,2}$	A	| KB; 3
	5	$Also_1$	$\Gamma \rightarrow A$	| SE; 4
	6	Also	$A \rightarrow (\Gamma \rightarrow A)$	| SE; 5

Zur später öfter praktizierten Technik der Herstellung einer künstlichen Abhängigkeit ist also die Hintereinanderschaltung von KE und KB notwendig. Die Möglichkeit der Herstellung der künstlichen Abhängigkeiten läßt ahnen, daß, anbei bemerkt, die Konjunktorregeln vielleicht doch nicht so harmlos sind, wie sie scheinen (↑5.)

Ü2 Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) $((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$

b) $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (\Gamma \rightarrow A))$

c) $((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \Gamma)) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge \Gamma))$

d) $(A \rightarrow (B \wedge \Gamma)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \Gamma))$

e) $(A \rightarrow (B \rightarrow \Gamma)) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow \Gamma)$

4.2.3 Der Bisubjunktor

Zur Erinnerung: Der Bisubjunktor '↔(__,__)' bzw. '__↔__' ist ein zweistelliger, formelbestimmender und formelerzeugender Operator. Das Ergebnis der Anwendung von '__↔__' auf Formeln A, B ist die Bisubjunktion A ↔ B. A und B sind die Bisubjunkte bzw. Bisubjunktionsglieder, A ist das linke und B ist das rechte Bisubjunkt (↑3.2.3).

Anzugeben ist nun, unter welchen Bedingungen auf eine Bisubjunktion geschlossen werden darf bzw. was aus einer Bisubjunktion gefolgert werden kann. Hat man eine Aussage B in Abhängigkeit von einer Aussage A gewonnen, und umgekehrt, dann darf man die Bisubjunktion aus A und B folgern. Hat man umgekehrt eine Bisubjunktion aus A und B sowie ein Bisubjunkt gewonnen, dann darf man auf das jeweils andere schließen. – Auch zum Verständnis dieser Antworten kann eine hilfsweise Orientierung am gebrauchssprachlichen '__genau dann, wenn__' und seinen Synonymen hilfreich sein.

Der Name 'Bisubjunktor' drückt aus, daß der zu organisierende Operator ein Subjunktor >in beide Richtungen< sein soll: A↔B soll ausdrücken, daß A→B und B→A gilt. Ebenso soll man aus A↔B und A auf B und aus A↔B und B auf A schließen können. Die naheliegende Idee, den Bisubjunktor mit Hilfe des Subjunktors und des Konjunktors zu definieren, wird aus später erläuterten (↑4.5) Gründen an dieser Stelle nicht realisiert. Dennoch können sich die folgenden Überlegungen an der Bedeutungsverleihung für den Subjunktor orientieren.

Zunächst zur Bisubjunktoreinführung: Auf die Subjunktion aus A und B, also auf A→B, darf man schließen, falls man B in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse *X* gewonnen hat, der auch A angehört. Umgekehrt darf man auf die Subjunktion aus B und A, also auf B→A, schließen, falls man A in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse *Y* gewonnen hat, der auch B angehört (↑ 4.2.1). Die Bisubjunktoreinführung führt beide Richtungen zusammen: Hat man A in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse *X*, der auch B angehört, gewonnen, hat man ferner B in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse *Y*, der auch A angehört, gewonnen, dann darf man die Bisubjunktion aus A und B in Abhängigkeit von $X \cup Y$, abzüglich A und B, folgern. Es ergibt sich folgende Schlußfigur:

[18]	Ξ_X	B	, mit $A \in X$
	Ξ_Y	A	, mit $B \in Y$
	$\text{Also}_{(X\setminus\{A\})\cup(Y\setminus\{B\})}$	A ↔ B	

Näher an der Diskurspraxis im Sinne der Erläuterung zu SE (↑[6]+) ist wiederum folgende Figur:

[18]+ Sei	A	
...	...	
Also$_X$	B	, wobei A $\in$ X
Sei	B	
...	...	
Also$_Y$	A	, wobei B $\in$ Y
Also$_{(X\setminus\{A\})\cup(Y\setminus\{B\})}$	A $\leftrightarrow$ B	

Für die Abhängigkeiten gilt: Die in den beiden Prämissenhandlungen bestehenden Abhängigkeiten von A bzw. B verschwinden, die sonstigen Abhängigkeiten von X bzw. Y werden zusammengefügt. Es handelt sich demnach um einen abhängigkeitentilgenden Schluß. – Die abschließende Formulierung der Bisubjunktoreinführung (=BE) lautet:

[19] Wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse X, wobei eine Aussage A$\in X$, eine Aussage B gewonnen hat, wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse Y, wobei eine Aussage B$\in Y$, eine Aussage A gewonnen hat, dann darf man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse $(X\setminus\{A\})\cup(Y\setminus\{B\})$ die Bisubjunktion aus A und B folgern.

Aus einer Subjunktion A$\rightarrow$B und ihrem Antezedens A darf man das Sukzedens B folgern. In der Bisubjunktion >stecken< zwei Subjunktionen; demzufolge darf man vom linken Bisubjunkt auf das rechte und vom rechten Bisubjunkt auf das linke, jeweils bei Gegebenheit der Bisubjunktion, schließen. Die Schlußfigur:

[19] Ξ_X A $\leftrightarrow$ B

Ξ_Y	A	Ξ_Y	B
Also$_{X\cup Y}$	B	Also$_{X\cup Y}$	A

Im Schlußakt werden die Abhängigkeiten aus beiden Prämissen aufgenommen.– Die Regel der Bisubjunktorbeseitigung (=BB) lautet:

[20] Wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse *X* die Bisubjunktion aus einer Aussage A und einer Aussage B gewonnen hat, wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse *Y* das linke bzw. das rechte Bisubjunkt, also A bzw. B, gewonnen hat, dann darf man in Abhängigkeit von $X \cup Y$ das rechte bzw. linke Bisubjunkt, also B bzw. A, folgern.

Die Bisubjunktion ist die Hauptprämisse des Schlusses, das linke resp. das rechte Bisubjunkt stellt die Nebenprämisse dar. – BE gibt den Weg vor, um auf eine Bisubjunktion zu schließen. Geschieht dies frei von Abhängigkeiten, dann ist die gefolgerte Aussage beweisbar bzw. – allgemeiner – wahr. Insofern fixiert BE den Beweis- bzw. Wahrheitsqualifizierungsweg für Bisubjunktionen. BB eröffnet die Möglichkeit, auf Aussagen zu schließen, sofern sie Bisubjunkt einer gewonnenen Bisubjunktion sind, deren anderes Bisubjunkt bereits gewonnen worden ist. Sind die Prämissen wahr, dann ist auch das jeweils gewonnene Bisubjunkt wahr. Insofern spezifiziert BB die Rolle von Bisubjunktionen als Wahrheitsbasen.

Am Beweis der Kommutativität des Konjunktors soll erste Vertrautheit mit BE hergestellt werden:

[21] Es-gilt $(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$

Der Beweiskandidat ist eine Bisubjunktion. Will man diese beweisen, d.h. frei von Abhängigkeiten folgern, dann muß man das rechte Bisubjunkt in alleiniger Abhängigkeit vom linken und das linke Bisubjunkt in alleiniger Abhängigkeit vom rechten gewinnen; dann ist nach BE die gewünschte Folgerung erlaubt:

[21]+ 0	Es-gilt	$(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$	
1	Sei$_1$	$A \wedge B$	
...	...	...	
k	Also$_1$	$B \wedge A$	
k+1	Sei$_2$	$B \wedge A$	
...	....	...	
m	Also$_2$	$A \wedge B$	
m+1	Also	$(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$	| BE; k, m

Der Beweis einer Bisubjunktion hat also immer zwei Teile, den Weg von links nach rechts (hier von 1 nach k) und den Weg von rechts nach links (Hier: von k+1 nach m). In der Folge wird der erste Teil diskutiert; der zweite verläuft im Beispiel analog und wird unter [21]* mitnotiert. Um eine Konjunktion zu gewinnen, muß man über beide Konjunkte verfügen, also über B und über A; dazu bietet die Annahme von Zeile 1 eine Basis. Die gewonnenen Aussagen sind dann wunschgemäß über KE zusammenzufügen.

[21]*	1	Sei$_1$	$A \wedge B$	
	2	Also$_1$	B	KB; 1
	3	Also$_1$	A	KB; 1
	4	Also$_1$	$B \wedge A$	KE; 2,3
	5	Sei$_2$	$B \wedge A$	
	6	Also$_2$	A	KB; 5
	7	Also$_2$	B	KB; 5
	8	Also$_2$	$A \wedge B$	KE; 6,7
	9	Also	$(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$	BE; 4,8

Die gepunktete Linie markiert hier hilfsweise die beiden Beweisteile und setzt sie von der zusammenfassenden Konklusion ab. – Das zweite Theorem erinnert nochmals daran, daß die Bisubjunktion die konjunktive Zusammenfassung der Subjunktionen in beide Richtungen ist bzw. kann als Aufweis der Adäquatheit der vorgenommenen Bedeutungsverteilung gelesen werden:

[22]	0	Es-gilt	$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$	
	1	Sei$_1$	$A \leftrightarrow B$	
	2	Sei$_2$	A	
	3	Also$_{1,2}$	B	BB; 1,2
	4	Also$_1$	$A \rightarrow B$	SE; 3
	5	Sei$_3$	B	
	6	Also$_{1,3}$	A	BB; 1,5
	7	Also$_1$	$B \rightarrow A$	SE; 6
	8	Also$_1$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	KE; 4,7

9	Sei_4	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	
10	$Also_4$	$A \rightarrow B$	KB; 9
11	$Also_4$	$B \rightarrow A$	KB; 9
12	Sei_5	A	
13	$Also_{4,5}$	B	SB; 10,12
14	Sei_6	B	
15	$Also_{4,6}$	A	SB; 11,14
16	$Also_4$	$A \leftrightarrow B$	BE; 13,15
17	Also	$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$	BE; 8,16

Der erste Beweisteil beginnt in Zeile 1 und endet in Zeile 8; der zweite beginnt mit Zeile 9 und endet in Zeile 16. In Zeile 17 ergibt sich der gewünschte Schluß. – Zu Teil 1: Aus der Bisubjunktion ist die Konjunktion der Subjunktion von links nach rechts und der Subjunktion von rechts nach links zu folgern (Zeile 8). Dies ist nach KE erlaubt, wenn die beiden Konjunkte gewonnen worden sind. Das geschieht in den Zeilen 4 und 7. Das erste Konjunkt ist eine Subjunktion, deren Sukzedens in Zeile 3 in Abhängigkeit von ihrem Antezedens gefolgert wird. Dazu wird (erstmals) BB benutzt. Das zweite Konjunkt wird in analoger Weise gewonnen.

Zu Teil 2: Zu gewinnen ist eine Bisubjunktion (Zeile 16). Die Richtung von links nach rechts ergibt sich in den Zeilen 12 und 13, die umgekehrte Richtung in den Zeilen 14 und 15. Um die SB anwenden zu können, muß die Konjunktion in der neunten Zeile in die beiden Konjunkte zerlegt werden; das geschieht in den Zeilen 10 und 11. – Ohne Kommentar ist abschließend der Beweis für die Idempotenz des Konjunktors zu notieren:

[23]	0	Es-gilt	$A \leftrightarrow (A \wedge A)$	
	1	Sei$_1$	A	
	2	Also	$A \rightarrow A$	SE; 1
	3	Also$_1$	A	SB; 1,2
	4	Also$_1$	$A \wedge A$	KE; 1,3
	5	Sei$_2$	$A \wedge A$	
	6	Also$_2$	A	KB; 5
	7	Also	$A \leftrightarrow (A \wedge A)$	BE; 4,6

Ü3 Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) $A \leftrightarrow A$

b) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (B \leftrightarrow A)$

c) $((A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow \Gamma)) \rightarrow (A \leftrightarrow \Gamma)$

d) $(A \wedge (B \wedge \Gamma)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge \Gamma)$

e) $((A \wedge B) \rightarrow \Gamma) \leftrightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow \Gamma))$

4.2.4 Der Adjunktor

Zur Erinnerung: Der Adjunktor '$\vee$(__,__)' bzw. '__$\vee$__' ist ein zweistelliger, formelbestimmender und formelerzeugender Operator. Das Ergebnis der Anwendung von '__$\vee$__' auf Formeln A, B ist die Adjunktion $A \vee B$. A und B sind die Adjunkte bzw. Adjunktionsglieder; A ist das linke, B das rechte Adjunkt (↑3.2.3).

Anzugeben ist nun, unter welchen Bedingungen auf eine Adjunktion geschlossen werden darf und was aus einer Adjunktion gefolgert werden kann. Die Antworten sind einfach: Man darf aus einer beliebigen Aussage A auf die Adjunktion aus A und B bzw. aus B und A schließen; und man darf aus einer Adjunktion $A \vee B$ all das schließen, was sowohl aus A als auch aus B folgt. – Bei der Erläuterung beider Schlußlizenzen kann eine Orientierung am (einschließenden) gebrauchssprachlichen '__oder__' und seinen Synonymen hilfreich sein.

Zunächst zur Adjunktoreinführung: Gegeben sei das Szenario einer kleinen Ostseeuniversität, an der baltische Folklore eine alles, also auch die Stipendienvergabe,

beherrschende Rolle spielt: Wer Däne, Schwede oder Finne ist, erhält einen Bonus. Nun ist Torsten Finne. Um zu zeigen, daß er einen Bonus erhält, muß man so argumentieren: Torsten ist Finne. Also ist er Schwede oder Finne. Also ist er Däne oder Schwede oder Finne. Nach dem erwähnten Vergabeprinzip erhält er deshalb einen Bonus. Diese informelle Überlegung läßt sich schematisch so darstellen:

[24]	1	Da	$\bigwedge\xi\ ((A \vee (B \vee \Gamma)) \rightarrow \Delta)$
	2	Also	$(([\theta, \xi, A] \vee ([\theta, \xi, B] \vee [\theta, \xi, \Gamma])) \rightarrow [\theta, \xi, \Delta])$
	3	Da	$[\theta, \xi, \Gamma]$
	$\Rightarrow$ 4	Also	$[\theta, \xi, B] \vee [\theta, \xi, \Gamma]$
	$\Rightarrow$ 5	Also	$[\theta, \xi, A] \vee ([\theta, \xi, B] \vee [\theta, \xi, \Gamma])$
	6	Also	$[\theta, \xi, \Delta]$

In der ersten Zeile findet das Prinzip schematischen Ausdruck; in A, B, Γ, Δ sei genau ξ frei. In der zweiten Zeile wird das Prinzip auf den interessierenden θ-Fall spezialisiert. Die beiden ersten Schritte – Notieren des Prinzips und Spezialisierung auf den interessierenden Fall – dienen nur der vollständigen schematischen Beschreibung des Szenarios. In der dritten Zeile wird vorhandenes Wissen über den interessierenden Fall eingebracht. Um im sechsten Schritt die gewünschte Subjunktorbeseitigung vollziehen zu können, muß die θ-Entität, auf die Γ zutrifft, unter die einschlägigen Fälle subsumiert werden. Dies geschieht durch Adjunktoreinführung in den durch Doppelpfeil markierten Schritten 4 und 5.

Ü4 a) Notieren Sie das informell besprochene Beispiel in Analogie zu [24] und machen Sie sich die Entsprechungen deutlich, z.B. 'Torsten' entspricht θ. Vgl. zum Schritt [2] den Absatz 3.2.4 sowie 4.3.1.

b) Geben Sie eine weitere Instanz für das Schema [24]!

Die Adjunktoreinführung ist ein unverzichtbarer Zug in der lebens- und sonderweltlich bewährten Subsumtionspraxis. Seine Selbstverständlichkeit führt zu der üblichen intuitiven Raffung, in der er leicht als eigenständiger Folgerungsschritt verschwindet. Dieser Umstand läßt es dann als verständlich (wenn auch nicht als entschuldbar) erscheinen, wenn die Adjunktoreinführung als für die diskursive Praxis verzichtbares Manöver dargestellt wird. – Die Schlussfigur läßt sich so wiedergeben:

[25] Ξ_X A

Also_X $\mathrm{A} \vee \mathrm{B}$ Also_X $\mathrm{B} \vee \mathrm{A}$

Man darf also von einer Aussage A auf eine Adjunktion aus A und B schließen und auch eine Adjunktion aus B und A folgern. Die Abhängigkeiten bleiben dabei unverändert. – Die Regel der Adjunktoreinführung (=AE) lautet:

[26] Wenn man eine Aussage A in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse *X* gewonnen hat, dann darf man sowohl die Adjunktion aus A und einer beliebigen Aussage B als auch die Adjunktion aus B und A in Abhängigkeit von *X* folgern.

Zurück zur Ostseefolklore: Angenommen, es ist bekannt, daß Torsten Däne oder Finne ist. Ferner gilt: Alle Dänen erhalten einen Bonus und alle Finnen erhalten einen Bonus. Also erhält Torsten in beiden Fällen einen Bonus. Schematisch:

[27]	1	Da	$\bigwedge\xi\,(\mathrm{A} \rightarrow \Delta)$
	2	Da	$\bigwedge\xi\,(\Gamma \rightarrow \Delta)$
$\rightarrow$	3	Da	$[\theta, \xi, \mathrm{A}] \vee [\theta, \xi, \Gamma]$
	4	Sei_1	$[\theta, \xi, \mathrm{A}]$
	5	Also	$[\theta, \xi, \mathrm{A}] \rightarrow [\theta, \xi, \Delta]$
	6	Also_1	$[\theta, \xi, \Delta]$
	7	Sei_2	$[\theta, \xi, \Gamma]$
	8	Also	$[\theta, \xi, \Gamma] \rightarrow [\theta, \xi, \Delta]$
	9	Also_2	$[\theta, \xi, \Delta]$
$\Rightarrow$	10	Also	$[\theta, \xi, \Delta]$

In den beiden ersten Zeilen stehen die beiden (Vergabe)Prinzipien. Die dritte Zeile ist die Adjunktion, die zwei Untersuchungskorridore, zwei Fälle öffnet, die gesondert zu betrachten sind. Der erste Fall findet in den Zeilen 4-6 Betrachtung, der zweite in den Zeilen 7 bis 9. Die Fallbetrachtung beginnt mit der Annahme, die das Untersuchungsfeld umreißt: Im ersten Fall ist das θ-Objekt A. Im Schritt 5 wird durch Spezialisierung aus Zeile 1 gefolgert, daß das θ-Objekt Δ ist, falls es A ist; und SB führt auch schon ins Ziel. Da der zweite Fall analog verläuft, kann man abschließend in Zeile 10 folgern: Ergibt sich in beiden Fällen, daß das θ-Objekt Δ ist, dann ergibt sich dies auch im Lichte der fallaufspannenden Adjunktion.

Die Adjunktorbeseitigung wird, gekennzeichnet durch den Doppelpfeil, in Zeile 10 vollzogen. Die einfachen Pfeile gehen mit ihrer Spitze auf die gewonnenen bzw. die Prämissenzeilen, wobei in der Fallbetrachtung der Pfeil bei der Annahme seinen Ausgangspunkt nimmt. In den Fallbetrachtungen ist das Ergebnis von der Fallannahme (und gegebenenfalls weiteren Aussagen) abhängig. Beim Schluß nach Adjunktionsbeseitigung tritt die Abhängigkeit von den Aussagen, von denen die Adjunktion abhängt, an die Stelle der Abhängigkeit von den Fallannahmen.

Ü5 a) Notieren Sie das informell besprochene Beispiel in Analogie zu [27] und machen Sie sich die Entsprechungen deutlich!

b) Geben Sie eine weitere Instanz für das Beweisschema [27]!

Ausgangspunkt der Schlußfigur ist die in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse X gewonnene Adjunktion $\mathrm{A} \vee \mathrm{B}$; dann muß in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse Y, der A angehört, und von einer Aussagenklasse Z, der B angehört, die Aussage Δ gewonnen worden sein; dann läßt sich Δ in Abhängigkeit von X, zuzüglich $Y\backslash\{\mathrm{A}\}$, zuzüglich $Z\backslash\{\mathrm{B}\}$ folgern.

[28]	Ξ_X	$\mathrm{A} \vee \mathrm{B}$	
	Ξ_Y	Δ	, wobei $\mathrm{A} \in Y$
	Ξ_Z	Δ	, wobei $\mathrm{B} \in Z$
	Also$_{X \cup (Y\backslash\{\mathrm{A}\}) \cup (Z\backslash\{\mathrm{B}\})}$	Δ	

Wiederum näher an der Diskurspraxis im Sinne der Erläuterung zu SE (↑[6]+) ist folgende Figur:

[28]+	Ξ_X	$\mathrm{A} \vee \mathrm{B}$	
	Sei	A	
	...	...	
	Also$_Y$	Δ	, wobei $\mathrm{A} \in Y$
	Sei	B	
	...	...	
	Also$_Z$	Δ	, wobei $\mathrm{B} \in Z$
	Also$_{X \cup (Y\backslash\{\mathrm{A}\}) \cup (Z\backslash\{\mathrm{B}\})}$	Δ	

Es ergibt sich abschließend folgende Formulierung der Adjunktorbeseitigung (=AB):

[29] Wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse *X* die Adjunktion einer Aussage A und einer Aussage B gewonnen hat, wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse *Y*, wobei $A \in Y$, eine Aussage Δ und in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse Z, wobei $B \in Z$, ebenfalls Δ gewonnen hat, dann darf man in Abhängigkeit von $X \cup (Y \setminus \{A\}) \cup (Z \setminus \{B\})$ die Aussage Δ folgern.

AB stellt einen abhängigkeitentilgenden Schluß dar; die Adjunktion ist die Hauptprämisse des Schlusses, die jeweils in den Fallbetrachtungen gewonnene Aussage stellt die Nebenprämisse dar. – AE gibt den Weg vor, um auf eine Adjunktion zu schließen. Geschieht dies frei von Abhängigkeiten, dann ist die gefolgerte Adjunktion beweisbar bzw. – allgemein – wahr. Insofern fixiert AE den Beweis- bzw. Wahrheitsqualifizierungsweg für Adjunktionen. AB eröffnet die Möglichkeit, auf Aussagen zu schließen, sofern sie in Abhängigkeit von beiden Adjunkten (und gegebenenfalls weiteren Aussagen) folgen. Ist die Adjunktion wahr, dann ist auch die gefolgerte Aussage wahr, falls keine weiteren Abhängigkeiten auftreten. Insofern spezifiziert AB die Rolle von Adjunktionen als Wahrheitsbasis.

AB gilt als schwierigste junktorenlogische Regel; auf die Einübung des Umgangs mit dem Adjunktor ist daher besonderer Wert zu legen. Das Gesetz von der Adjunktion der Subjunktionsglieder besagt: Bedingt A B und bedingt Γ Δ, dann bedingt die Adjunktion der Antezedentia, also $A \vee \Gamma$, die Adjunktion der Sukzedentia, also $B \vee \Delta$:

[30] Es-gilt $((A \rightarrow B) \wedge (\Gamma \rightarrow \Delta)) \rightarrow ((A \vee \Gamma) \rightarrow (B \vee \Delta))$

Der Beweiskandidat ist eine Subjunktion; der Beweisweg ist demnach durch SE festgelegt. Man hat $(A \vee \Gamma) \rightarrow (B \vee \Delta)$ in alleiniger Abhängigkeit von $(A \rightarrow B) \wedge (\Gamma \rightarrow \Delta)$ zu gewinnen, um dann in der letzten Zeile das Gewünschte frei von Abhängigkeiten zu folgern:

[30]+ 1	Sei$_1$	$(A \rightarrow B) \wedge (\Gamma \rightarrow \Delta)$	
...	...	...	
k	Also$_1$	$(A \vee \Gamma) \rightarrow (B \vee \Delta)$	
k+1	Also	$((A \rightarrow B) \wedge (\Gamma \rightarrow \Delta)) \rightarrow ((A \vee \Gamma) \rightarrow (B \vee \Delta))$	| SE; k

Die Restaufgabe besteht demnach darin, das Sukzedens in Abhängigkeit vom Antezedens zu folgern. Da das Sukzedens wiederum eine Subjunktion darstellt, gibt SE nochmals den

Weg vor: $B \vee \Delta$ ist in Abhängigkeit von $A \vee \Gamma$ und in Abhängigkeit von der ersten Annahme zu folgern:

[30]▫	1	Sei_1	$(A \to B) \wedge (\Gamma \to \Delta)$	
	2	Sei_2	$A \vee \Gamma$	
	...	...	...	
	k-1	$Also_{1,2}$	$B \vee \Delta$	
	k	$Also_1$	$(A \vee \Gamma) \to (B \vee \Delta)$	SE; k-1
	k+1	Also	$((A \to B) \wedge (\Gamma \to \Delta)) \to ((A \vee \Gamma) \to (B \vee \Delta))$	SE; k

Mit der in Zeile 2 angenommenen Adjunktion ist ein Untersuchungsraum mit zwei Optionen, zum einen A, zum anderen Γ, geöffnet. Man hat zu zeigen, daß man in beiden Fällen zu $B \vee \Delta$ gelangt:

[30]°	1	Sei_1	$(A \to B) \wedge (\Gamma \to \Delta)$	
	2	Sei_2	$A \vee \Gamma$	
	3	Sei_3	A	
	...	...	...	
	m	$Also_{1,3}$	$B \vee \Delta$	
	m+1	Sei_4	Γ	
	...	...	...	
	l	$Also_{1,4}$	$B \vee \Delta$	
	k-1	$Also_{1,2}$	$B \vee \Delta$	AB; 2,m,l
	k	$Also_1$	$(A \vee \Gamma) \to (B \vee \Delta)$	SE; k-1
	k+1	Also	$((A \to B) \wedge (\Gamma \to \Delta)) \to ((A \vee \Gamma) \to (B \vee \Delta))$	SE; k

In Zeile k-1 kann AB angewendet werden, sofern es gelingt, die beiden Fallbetrachtungen erfolgreich zu führen. Aus der ersten Annahme lassen sich mit KB zwei Subjunktionen gewinnen, die gemeinsam mit der Fallannahme durch SB den Schluß auf jeweils ein Adjunkt erlaubt; AE führt dann ins Ziel. Der gesamte Beweis liest sich dann bei durchlaufender Bezifferung so:

[30]*	1	Sei$_1$	$(A \to B) \wedge (\Gamma \to \Delta)$	
$\to$	2	Sei$_2$	$A \vee \Gamma$	
	3	Sei$_3$	A	
	4	Also$_1$	$A \to B$	KB; 1
	5	Also$_{1,3}$	B	SB; 3,4
	6	Also$_{1,3}$	$B \vee \Delta$	AE; 5
	7	Sei$_4$	Γ	
	8	Also$_1$	$\Gamma \to \Delta$	KB; 1
	9	Also$_{1,4}$	Δ	SB; 7,8
	10	Also$_{1,4}$	$B \vee \Delta$	AE; 9
	11	Also$_{1,2}$	$B \vee \Delta$	AB; 2,6,10
	12	Also$_1$	$(A \vee \Gamma) \to (B \vee \Delta)$	SE; 11
	13	Also	$((A \to B) \wedge (\Gamma \to \Delta)) \to ((A \vee \Gamma) \to (B \vee \Delta))$	SE; 12

Die Anwendung von AB bzw. die vorausgesetzte diskursive Lage wird wiederum durch die erstmals in [27] verwendeten Pfeile markiert. – In der Folge wird die Kommutativität des Adjunktors bewiesen:

[31]	0	Es-gilt	$(A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$	
$\to$	1	Sei$_1$	$A \vee B$	
	2	Sei$_2$	A	
	3	Also$_2$	$B \vee A$	AE; 2
	4	Sei$_3$	B	
	5	Also$_3$	$B \vee A$	AE; 4
	6	Also$_1$	$B \vee A$	AB; 1,3,5
$\to$	7	Sei$_4$	$B \vee A$	
	8	Sei$_5$	B	
	9	Also$_5$	$A \vee B$	AE; 8
	10	Sei$_6$	A	

11	Also_6	$A \vee B$	AE; 10
12	Also_4	$A \vee B$	AB; 7,9,11
13	Also	$(A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$	BE; 6,12

Der Beweis hat zwei Teile: Um BE anzuwenden, ist $B \vee A$ in Abhängigkeit von $A \vee B$ zu gewinnen, und umgekehrt. Die erste Aufgabe wird erledigt in den Zeilen 1 bis 6, die zweite in den Zeilen 7 bis 12. In beiden Teilen genügen AE und AB zur Legitimierung der Folgerungsschritte. – Zuletzt ist die Distributivität des Adjunktors bezüglich des Konjunktors nachzuweisen:

[32] 0 Es-gilt $(A \vee (B \wedge \Gamma)) \leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee \Gamma))$

Nach BE muß das rechte Bisubjunkt in alleiniger Abhängigkeit vom linken und das linke in alleiniger Abhängigkeit vom rechten gefolgert werden. Im ersten Beweisteil öffnet die Adjunktion zwei Optionen: Sowohl im A- wie auch im $B \wedge \Gamma$-Fall ergibt sich die gewünschte Konjunktion aus zwei Adjunktionen:

[32]+ → 1	Sei_1	$A \vee (B \wedge \Gamma)$	
2	Sei_2	A	
3	Also_2	$A \vee B$	AE; 2
4	Also_2	$A \vee \Gamma$	AE; 2
5	Also_2	$(A \vee B) \wedge (A \vee \Gamma)$	KE; 3,4
6	Sei_3	$B \wedge \Gamma$	
7	Also_3	B	KB; 6
8	Also_3	$A \vee B$	AE; 7
9	Also_3	Γ	KB; 6
10	Also_3	$A \vee \Gamma$	AE; 9
11	Also_3	$(A \vee B) \wedge (A \vee \Gamma)$	KE; 8,10
12	Also_1	$(A \vee B) \wedge (A \vee \Gamma)$	AB; 1,5,11

Beim zweiten Beweisteil stellt eine Konjunktion zweier Adjunktionen die Annahmebasis dar; KB führt auf zwei Adjunktionen, die ein Adjunkt gemeinsam haben. Dieser Umstand läuft auf eine Schachtelung der beiden AB hinaus:

[32]°	13	Sei$_4$	$(A \vee B) \wedge (A \vee \Gamma)$	
	14	Also$_4$	$A \vee B$	KB; 13
	15	Also$_4$	$A \vee \Gamma$	KB; 13
	16	Sei$_5$	A	
	17	Also$_5$	$A \vee (B \wedge \Gamma)$	AE; 16
	18	Sei$_6$	B	
	19	Sei$_7$	Γ	
	20	Also$_{6,7}$	$B \wedge \Gamma$	KE; 18,19
	21	Also$_{6,7}$	$A \vee (B \wedge \Gamma)$	AE; 20
	22	Also$_{4,7}$	$A \vee (B \wedge \Gamma)$	AB; 14,17,21
	23	Also$_4$	$A \vee (B \wedge \Gamma)$	AB; 15,17,22

Die erste Fallbetrachtung wird in Zeile 16 durch Annahme der A-Option eröffnet und führt in Zeile 17 ins Ziel. Die zweite beginnt in Zeile 18. Da kein Weg offen steht, auf der vorhandenen Prämissenbasis $B \wedge \Gamma$ zu erreichen, wird Γ in Zeile 19 zusätzlich angenommen. Derartige Annahmen sind stets mit Tilgungshoffnungen im weiteren Beweisverlauf verbunden. Unter dieser Zusatzannahme gelangt die zweite Fallbetrachtung in Zeile 21 ins Ziel, so daß in Zeile 22 mit AB das Gewünschte gefolgert werden kann. Beim ersten Zusehen erweist sich die Abhängigkeit von dem siebtens Angenommenen als Schönheitsfehler. Neuerliche Inspektion zeigt aber, daß die Zeilen 16 und 17 einerseits, die Zeilen 19 bis 22 andererseits gerade die für $A \vee \Gamma$ einschlägigen Fallbetrachtungen sind. Nochmalige Anwendung von AB führt dann ins Ziel. Nicht mehr notiert ist die abschließende BE auf die Zeilen 12 und 23.

Ü6 Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) $(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)$

b) $((A \vee B) \wedge (A \rightarrow \Delta) \wedge (B \rightarrow \Gamma)) \rightarrow (\Delta \vee \Gamma)$

c) $((A \vee B) \wedge (A \rightarrow \Gamma) \wedge (B \rightarrow \Gamma)) \rightarrow \Gamma$

d) $(A \vee (B \vee \Gamma)) \leftrightarrow ((A \vee B) \vee \Gamma)$

e) $(A \wedge (B \vee \Gamma)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge \Gamma))$

4.2.4 Der Negator

Zur Erinnerung: Der Negator '¬__' ist ein einstelliger, formelbestimmender und formelerzeugender Operator. Das Ergebnis der Anwendung des Negators '¬__' auf eine Formel Δ ist die Negation $\neg\Delta$; dabei ist Δ das Negatum. Der Negator ist von den hier betrachteten Junktoren der einzige einstellige (↑3.2.3).

Anzugeben ist nun, unter welchen Bedingungen auf eine Negation geschlossen werden darf und was aus einer Negation gefolgert werden kann. Die Antworten sind wiederum einfach, weichen aber in ihrer Struktur erkennbar von dem bislang gegebenen Muster ab (↑5.): Man darf auf eine Negation schließen, also auf $\neg\mathrm{A}$, falls man eine Aussage Δ und ihre Negation gewonnen hat, von denen wenigstens eine von A abhängt. Man darf ferner aus der doppelten Negation einer Aussage Δ, also aus $\neg\neg\Delta$, auf Δ schließen. – Bei der Erläuterung beider Schlußlizenzen kann eine Orientierung am gebrauchssprachlichen 'nicht' und seinen Synonymen hilfreich sein.

Zunächst zur Negatoreinführung: Liegt kognitiver Trouble vor, dann darf an den Ursachen etwas getan werden. 'Trouble' meint: In einem Diskurs ist eine Aussage Δ und ihre Negation $\neg\Delta$ gewonnen worden. Die >Ursachen< sind die Mitglieder der Aussagenklassen X bzw. Y, von denen Δ bzw. $\neg\Delta$ abhängen. Die Regel erlaubt es, im Ursachenfeld Ordnung zu schaffen: Man darf eine der Aussagen aus der gesamten Abhängigkeitsklasse $X\cup Y$ negieren. Die Aussage, die >gekillt< wird, verschwindet aus der Abhängigkeitsklasse. Die Regel ist also eine Art trouble-shooter. Es resultiert als Schlußfigur:

[33] Ξ_X Δ

Ξ_Y $\neg\,\Delta$, wobei $\mathrm{A} \in X \cup Y$

$\mathrm{Also}_{(X\cup Y)\setminus\{\mathrm{A}\}}$ $\neg\,\mathrm{A}$

Mit der Erlaubnis, irgendeine Aussage aus der Abhängigkeitsklasse zu negieren, ist keine Anweisung verbunden, eine bestimmte Aussage zu negieren: Welche Aussage man wählt, ergibt sich aus den diskursiven Zielen. – Die Regel der Negatoreinführung (=NE) läßt sich so formulieren:

[34] Wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse X eine Aussage Δ gewonnen hat und in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse Y die Negation von Δ gewonnen hat, wobei eine Aussage $\mathrm{A}\in X\cup Y$, dann darf man in Abhängigkeit von $(X\cup Y)\setminus\{\mathrm{A}\}$ die Negation von A folgern.

Mit NE liegt wiederum ein abhängigkeitentilgender Schluß vor: Die Prämissenabhängigkeiten werden zwar zusammengeführt; andererseits wird aber eine der Aussagen beim Schluß von der Abhängigkeitenklasse abgezogen. – Der Schluß gemäß Negatorbeseitigung verändert an den Abhängigkeiten nichts:

[35] Ξ_X $\neg\neg\Delta$

Also$_X$ Δ

Die Regel der (doppelten) Negatorbeseitigung (=NB) lautet:

[36] Wenn man die Negation der Negation einer Aussage Δ in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse *X* gewonnen hat, dann darf man Δ in Abhängigkeit von *X* folgern.

NE gibt den Weg vor, um auf eine Negation zu schließen: Wer auf $\neg A$ schließen will, muß einen Widerspruch erzeugen, der (auch) durch A >verursacht< ist. Geschieht der Schluß auf $\neg A$ frei von Abhängigkeiten, enthält also die Abhängigkeitsklasse A als einziges Element, dann ist die gefolgerte Negation beweisbar bzw. – allgemeiner – wahr. Insofern fixiert NE den Beweis- bzw. Wahrheitsqualifizierungsweg für die Negation von Aussagen. – NB eröffnet die Möglichkeit, auf Aussagen zu schließen, sofern man ihre doppelte Negation gewonnen hat. Ist die doppelte Negation wahr, d.h. frei von Abhängigkeiten gewonnen, dann ist auch die doppelt negierte Aussage wahr.

Die erste zum Beweis aufgegebene Aussage ist das junktorenlogische (Nicht)Widerspruchsprinzip bzw. das principium contradictionis: Es trifft nicht zu, daß A und die Negation von A zugleich gegeben sein können:

[37] Es-gilt $\neg(\Gamma \wedge \neg\Gamma)$

Um auf $\neg(\Gamma\wedge\neg\Gamma)$ zu schließen, muß man eine Aussage und ihre Negation gewinnen, so zwar, daß eine dieser Prämissen von $\Gamma\wedge\neg\Gamma$ abhängt. Es wären die Aussagen Γ bzw. $\neg\Gamma$ Prämissen der gewünschten Form, wenn man sie in Abhängigkeit von $\Gamma\wedge\neg\Gamma$ gewinnen könnte. Nun hängen die Annahmen einerseits von sich selbst ab; und andererseits ergibt sich aus $\Gamma\wedge\neg\Gamma$ durch KB sowohl Γ wie auch $\neg\Gamma$; damit ist der Beweisgang vorgezeichnet:

[37]+ 1	Wäre$_1$	$\Gamma \wedge \neg\Gamma$	
2	Also$_1$	Γ	KB; 1
3	Also$_1$	$\neg\Gamma$	KB; 1
4	Also	$\neg(\Gamma \wedge \neg\Gamma)$	NE; 2,3

Damit ist das erste Exemplar eines <u>indirekten Beweises</u> vorgeführt: Um mit NE auf $\neg A$, hier: $\neg(\Gamma\wedge\neg\Gamma)$, schließen zu können, nimmt man A, hier: $\Gamma\wedge\neg\Gamma$, an und erzeugt daraus einen Widerspruch. Hängen die Glieder des Widerspruchs nur noch von der Annahme des indirekten Beweises ab, dann ist mit NE der gewünschte Beweis erbracht. Im vorliegenden Fall bestehen also insgesamt folgende Entsprechungen: Γ entspricht Δ; $\neg\Gamma$ entspricht $\neg\Delta$; $\Gamma\wedge\neg\Gamma$ entspricht A, $\neg(\Gamma\wedge\neg\Gamma)$ entspricht $\neg A$ und $X\cup Y$ ist die Einerklasse $\{\Gamma\wedge\neg\Gamma\}$. - Um die Annahme des indirekten Beweises gesondert zu markieren, wird aus mnemotechnischen Gründen der Performator 'Wäre__' benutzt, der aber ebenso wie 'Sei__' durch die Annahmeregel bestimmt wird.

Die Vorführung des Beweises zum Widerspruchsprinzip gibt Anlaß, auch die Schlußfigur zur NE um die praxisnähere Variante zu ergänzen: Die Aussage, die zu widerlegen ist, wird angenommen; dann ist die Aussage und ihre Negation zu folgern, die für NE charakteristisch sind:

[33]*	Wäre	A	
	Ξ_X	Δ	
	Ξ_Y	$\neg\Delta$	, wobei $A \in X \cup Y$
	$\text{Also}_{(X\cup Y)\setminus\{A\}}$	$\neg A$	

In der Folge ist das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten, das tertium-non-datur, zu beweisen. Dabei wird die zweite, die <u>klassische</u> Form des indirekten Beweises illustriert:

[38] Es-gilt $A \vee \neg A$

Zwischen A und $\neg A$ gibt es kein >Drittes<. Zu beweisen ist eine Adjunktion; und diese Aufgabe führt zunächst zu AE. Um aber AE einzusetzen, müßte man eines der beiden Adjunkte schon gewonnen haben; dies könnte nur durch Annahmen geschehen. Damit aber hätte man nicht $A\vee\neg A$, sondern nur $A\rightarrow(A\vee\neg A)$ bzw. $\neg A\rightarrow(A\vee\neg A)$ bewiesen. Auch diese Aussagen sind ehrenwerte Theoreme, aber vom tertium-non-datur durchaus verschieden.

Wenn der ordentliche Weg versagt, muß man einen außerordentlichen beschreiten. Dieser ergibt sich durch Hintereinanderschaltung von NE und NB: Man nimmt die Negation des Beweiskandidaten an, erzeugt in Abhängigkeit davon einen Widerspruch und schließt mit NE auf die doppelte Negation des tertium-non-datur. Der Schluß mit NB führt dann sofort zum Ziel; damit ergibt sich als Beweiskontur:

[38]+	1	Wäre$_1$	$\neg (A \vee \neg A)$	
	...	...	...	
	k	Also	$\neg \neg (A \vee \neg A)$	NE; ?
	k+1	Also	$A \vee \neg A$	NB; k

Das Fragezeichen im Kommentar zur k-ten Zeile deutet die Folgeaufgabe an: Gesucht ist eine Aussage und ihre Negation, die genau von der ersten Annahme abhängen sollten. An dieser Stelle bleibt nur die Möglichkeit, Annahmeakte zu vollziehen in der Hoffnung, die Annahmen im Fortgang tilgen zu können. Um die erste Annahme, wie gewünscht, >ins Geschehen< einzubeziehen, legt es sich nahe, das Negatum zu erzeugen, indem man A oder aber $\neg A$ annimmt, um dann durch AE die Adjunktion zu gewinnen:

[38]°	1	Wäre$_1$	$\neg (A \vee \neg A)$	
	2	Sei$_2$	A	
	k	Also$_2$	$A \vee \neg A$	AE; 2

Mit $A \vee \neg A$ und $\neg(A \vee \neg A)$ hat man eine Aussage und ihre Negation gewonnen. Damit umfaßt das Spektrum der Negationskandidaten zwei Aussagen: $\neg(A \vee \neg A)$ und A. Negiert man $\neg(A \vee \neg A)$, gewinnt man zwar die gewünschte Aussage, aber in unerwünschter Abhängigkeit. Die Negation von A führt hingegen auf ein nur von der ersten Annahme abhängiges $\neg A$; mit AE kommt man dann neuerlich zu $A \vee \neg A$ und kann NE in der gewünschten Abhängigkeit vollziehen:

[38]	1	Wäre$_1$	$\neg (A \vee \neg A)$	
	2	Sei$_2$	A	
	3	Also$_2$	$A \vee \neg A$	AE; 2
	4	Also$_1$	$\neg A$	NE; 1,3
	5	Also$_1$	$A \vee \neg A$	AE; 4
	6	Also	$\neg \neg (A \vee \neg A)$	NE; 1,5
	7	Also	$A \vee \neg A$	NB; 6

Als allgemeines Rezept läßt sich dem Beweis das tertium-non-datur entnehmen: Kommt man nicht auf ordentlichem Wege zum Beweis einer Aussage Δ, dann kann man die Möglichkeit über NE und NB in Betracht ziehen, wobei man mit der Negation der zu

beweisenden Aussage startet. Dieser Beweistyp ist der klassische indirekte Beweis, weil die die klassische Logik charakterisierende Regel NB eine wesentliche Rolle spielt Das allgemeine Schema für das klassische indirekte Beweisen bzw. Schließen hat folgende Gestalt:

[33]+	Wäre	$\neg A$	
	Ξ_X	Δ	
	Ξ_Y	$\neg \Delta$	, wobei $A \in X \cup Y$
	Also$_{(X \cup Y) \setminus \{A\}}$	$\neg \neg A$	
	Also$_{(X \cup Y) \setminus \{A\}}$	A	

Der letzte Schritt, die doppelte Negatorbeseitigung, ist für das klassische indirekte Schließen wesentlich. Ist $(X \cup Y) \setminus \{A\}$ leer, dann liegt ein indirekter Beweis vor. Mit NB sind die Beweismöglichkeiten wesentlich erweitert: Eine Aussage gleich welchen Hauptoperators kann man, falls sie beweisbar ist, auch klassisch indirekt beweisen, die Umkehrung gilt jedoch nicht. Als Faustregel für die Beweissuche gilt somit: Wenn man einen Beweis für eine Aussage mit τ als Hauptoperator sucht, arbeitet man zunächst mit der τ-Einführung als übergreifende Regel. Beispiel: Versuche zunächst, eine Konjunktion über KE zu beweisen. Bei negativem Ausgang ist der klassische indirekte Weg zu erproben (↑5.)!

In der Folge wird ohne weiteren Kommentar der Beweis eines Kontrapositionsgesetzes notiert; auch die vordere Zeilenbezifferung entfällt:

[39]	Es gilt	$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
	Sei	$A \rightarrow B$
	Sei	$\neg B$
	Wäre	A
	Also	B
	Also	$\neg A$
	Also	$\neg B \rightarrow \neg A$
	Sei	$\neg B \rightarrow \neg A$
	Sei	A
	Wäre	$\neg B$

Also	$\neg A$
Also	$\neg \neg B$
Also	B
Also	$A \rightarrow B$
Also	$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

Ü7 a) Ergänzen Sie die Kommentierung!

b) Verdeutlichen Sie sich den Beweisgang auf Basis der benutzten Regeln!

Das zuletzt zu beweisende Ex-falso-quodlibet, besser Ex-contradictione-quodlibet, besagt, lax geredet, daß aus einem Widerspruch Beliebiges folgt. Akzeptiert man also einen Widerspruch als wahr, dann könnte man aus dem Widerspruch und dem erörterten Prinzip Beliebiges beweisen. Der Unterschied zwischen wahr und falsch und damit auch die Möglichkeit des Unterscheidenkönnens wäre aufgehoben:

[40]	0	Es-gilt	$(A \wedge \neg A) \rightarrow \Delta$	
	1	Sei$_1$	$A \wedge \neg A$	
	2	Wäre$_2$	$\neg \Delta$	
	3	Also$_{1,2}$	$(A \wedge \neg A) \wedge \neg \Delta$	KE; 1,2
	4	Also$_{1,2}$	$A \wedge \neg A$	KB; 3
	5	Also$_{1,2}$	A	KB; 4
	6	Also$_{1,2}$	$\neg A$	KB; 4
	7	Also$_1$	$\neg \neg \Delta$	NE; 5,6
	8	Also$_1$	Δ	NB; 7
	9	Also	$(A \wedge \neg A) \rightarrow \Delta$	SE; 8

Da der Beweiskandidat eine Subjunktion ist, wird in Zeile 1 das Antezedens angenommen. Für die Herleitung von Δ in Zeile 8 ist der (klassische) indirekte Weg gewählt, indem man in Zeile 2 $\neg\Delta$ annimmt. Um $\neg\Delta$ in die Kandidatenmenge für das Negieren nach NE zu ziehen, wird in den Zeilen 3 und 4 in der üblichen Weise eine künstliche Abhängigkeit hergestellt. KB führt in 5 und 6 zu der für NE erforderten Diskurslage. In Zeile 7 wird dann die Annahme des indirekten Beweises negiert. NB und SE sorgen für die abschließenden Schritte.

Ü8 Beweisen Sie:

a) $\neg \neg A \leftrightarrow A$

b) $(A \wedge \neg A) \rightarrow \neg \Delta$

c) $(A \rightarrow \neg B) \leftrightarrow (B \rightarrow \neg A)$

d) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg (A \wedge \neg B)$

e) $(A \wedge B) \leftrightarrow \neg (\neg A \vee \neg B)$

4.3 Regeln für die Quantoren

In der Folge kommen die Regeln für den Universal- und den Partikularquantor zur Sprache. Mit Hilfe dieser beiden Quantoren und des im nächsten Abschnitt dargestellten Identitätsprädikators können später Mindest-, Höchst- und Anzahlquantoren definiert werden; dabei wird der Eins- bzw. der Einzigkeitsquantor eine hervorragende Position im Blick auf die Organisation der Bezugnahme einnehmen (↑5., 7.)

4.3.1 Der Universalquantor

Zur Erinnnerung: Der Universalquantifikator '$\bigwedge$..' ist ein einstelliger, variablenbestimmender und quantorenerzeugender Operator; das Ergebnis der Anwendung von '$\bigwedge$..' auf eine Variable ξ ist der ξ bindende Quantor $\bigwedge\xi$__. Der Universalquantor $\bigwedge\xi$__ ist ein einstelliger, formelbestimmender und formelerzeugender Quantor; das Ergebnis der Anwendung von $\bigwedge\xi$__ auf eine Formel Δ ist eine universalquantifizierte Formel. Ist in Δ höchstens ξ frei, dann ist die Formel $\bigwedge\xi\Delta$ die Universalquantifikation von Δ bezüglich ξ; solche Universalquantifikationen werden auch als universale Aussagen bzw. als Universalaussagen geführt (↑3.2.3).

Anzugeben ist nun, unter welchen Bedingungen auf eine Universalquantifikation geschlossen werden darf und was aus einer Universalquantifikation gefolgert werden kann: Falls eine Eigenschaft, ausgedrückt durch Δ, auf eine beliebige repräsentative Entität, die durch einen Parameter β vertreten wird, zutrifft, dann darf man schließen, daß Δ auf alle Gebilde zutrifft, dann darf man also auf $\bigwedge\xi\Delta$ schließen. Umgekehrt: Aus einer Universalquantifikation $\bigwedge\xi\Delta$, daraus also, daß Δ von allen Gebilden gilt, darf man folgern, daß Δ auch auf jedes einzelne θ zutrifft. – Zum Verständnis beider Schlußlizenzen kann eine Orientierung am gebrauchssprachlichen 'Für alle..' und seinen Synonymen hilfreich sein.

Um die Aufmerksamkeit auf das hier Wesentliche zu konzentrieren, sei festgelegt: A, B, Γ, Δ sind Formeln, in denen höchstens ξ oder die ansonsten verlangte Variable frei ist; θ ist stets geschlossener Term, β, β^* usf. sind stets Parameter. Die Parameterbestimmungen für die Partikularquantorbeseitigung und die Universalquantoreinführung werden stets als erfüllt vorausgesetzt und nicht im einzelnen hinter den Zeilen mitnotiert oder im Kommentar erwähnt. Erst nach ihrer Erläuterung wird diese Ergänzung als Übung verlangt (↑Ü12e)).

Zunächst zur Universalquantorbeseitigung: Der Schluß vom Allgemeinen aufs Einzelne, von einer Universalquantifikation auf eine Instanz, wurde bereits im Rahmen der Darlegung der grammatischen Begrifflichkeit erläutert (↑3.1, 3.2.4). Man kann also direkt die Schlußfigur notieren:

[41] Ξ_X $\bigwedge\xi\Delta$

Ξ_X $[\theta, \xi, \Delta]$

Dabei ist θ ein geschlossener Term. Die Regel der <u>U</u>niversal(quantor)<u>b</u>eseitigung (=UB) kann so formuliert werden:

[42] Wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse *X* die Universalquantifikation einer Formel Δ bezüglich ξ gewonnen hat, dann darf man in Abhängigkeit von *X* das Ergebnis der Substitution eines geschlossenen Terms θ für ξ in Δ folgern.

Der Schluß nach UB ändert an den Abhängigkeiten nichts. – Wenn alle Menschen sterblich sind und Sokrates ein Mensch ist, dann ist Sokrates sterblich. Das (Theorem)Schema zu dieser (Theorem)Instanz, die generalisierte Subjunktorbeseitigung, wird so bewiesen:

[43]	0	Es-gilt	$(\bigwedge\xi\,(\Delta \to \Gamma) \wedge [\theta, \xi, \Delta]) \to [\theta, \xi, \Gamma]$	
	1	Sei$_1$	$\bigwedge\xi\,(\Delta \to \Gamma) \wedge [\theta, \xi, \Delta]$	
	2	Also$_1$	$\bigwedge\xi\,(\Delta \to \Gamma)$	| KB; 1
	3	Also$_1$	$[\theta, \xi, \Delta]$	| KB; 1
	4	Also$_1$	$[\theta, \xi, \Delta] \to [\theta, \xi, \Gamma]$	| UB; 2
	5	Also$_1$	$[\theta, \xi, \Gamma]$	| SB; 3,4
	6	Also	$(\bigwedge\xi\,(\Delta \to \Gamma) \wedge [\theta, \xi, \Delta]) \to [\theta, \xi, \Gamma]$	| SE; 5

UB kann in dem Sinne iteriert angewendet werden, als eine mehrfache Universalquantifikation bzgl. desselben Gebildes mehrfach spezialisiert werden kann: Aus '$\bigwedge x \bigwedge y$ Vertraut(x, y)' läßt sich '$\bigwedge y$ Vertraut(Sokrates, y)' und dann 'Vertraut(Sokrates,

Sokrates)' schließen. Der geschlossene Term θ, hier 'Sokrates', darf demnach, wie die zweite Folgerung zeigt, in Δ, hier: '$\bigwedge y$ Vertraut(Sokrates, *y*)', schon Teilterm sein.

Die Regel der Universalquantoreinführung kann informell so formuliert werden: Wenn man von einem repräsentativen Gebilde, vertreten durch den Parameter β, gezeigt hat, daß ihm die durch Δ ausgedrückte Eigenschaft zukommt, dann darf man daraus schließen, daß allen Gebilden die Eigenschaft Δ zukommt, dann darf man also auf $\bigwedge\xi\Delta$ schließen. Man betrachte die Aussage: Alle Bayern sind Europäer. Ein Beweis könnte so aussehen: Sei z ein Bayer. Nun sind alle Bayern Deutsche. Wenn z Bayer ist, ist er demzufolge Deutscher. Also ist z Deutscher. Ferner sind alle Deutschen Europäer. Wenn also z Deutscher ist, ist er auch Europäer. Also ist z Europäer. Also ist z Europäer, falls er Bayer ist. Damit gilt insgesamt: Alle Bayern sind Europäer. Das Schema dieses Beweises hat folgende Gestalt:

[44]	0	Es-gilt	$\bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow \Gamma)$	
	1	Sei$_1$	$[\beta, \xi, \Delta]$	
	2	Da	$\bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow A)$	
	3	Also	$[\beta, \xi, \Delta] \rightarrow [\beta, \xi, A]$	| UB; 2
	4	Also$_1$	$[\beta, \xi, A]$	| SB; 1,3
	5	Da	$\bigwedge\xi\ (A \rightarrow \Gamma)$	
	6	Also	$[\beta, \xi, A] \rightarrow [\beta, \xi, \Gamma]$	| UB; 5
	7	Also$_1$	$[\beta, \xi, \Gamma]$	| SB; 4,6
	8	Also	$[\beta, \xi, \Delta] \rightarrow [\beta, \xi, \Gamma]$	| SE; 7
	$\Rightarrow$ 9	Also	$\bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow \Gamma)$	| UE; 8

Ü9 a) Notieren Sie das in Prosa entwickelte Beispiel im Stil von [44]!

b) Legen Sie eine Liste mit den Entsprechungen an (z.B.: 'Bayer(*x*)' = Δ)!

c) Finden Sie eine weitere Instanz zu dem Beweisschema [44]!

Ziel ist der Nachweis, daß alle Gebilde die Eigenschaft haben, Γ zu sein, falls sie Δ sind. Gezeigt wird dies für die β-Gegebenheit, und zwar nach der >Logik der Subjunktion< und unter Anziehung zweier allgemeiner Tatsachen, die in Zeile 2 und Zeile 5 notiert sind. In Zeile 8 ist gezeigt, daß die Eigenschaft, Γ zu sein, falls Δ zutrifft, von dem repräsentativ gewählten β-Ding gilt. Das legitimiert den durch den Doppelpfeil markierten Schluß der Universalquantoreinführung. Die Schlußfigur hat folgende Gestalt:

[45] Ξ_X $[\beta, \xi, \Delta]$, wobei β weder Teilterm von Δ noch Teilterm einer Aussage $\Gamma \in X$ ist.
Also_X $\bigwedge\xi\Delta$

Die an die Prämisse angefügte Bedingung garantiert, daß β wirklich eine repräsentative Gegebenheit ist und keine besonderen Eigenschaften mittransportiert, die diese Repräsentativität stören; die Parameterbedingung wird erst später im Detail erläutert, wenn Vertrautheit im Umgang mit den neuen Regeln hergestellt ist (↑4.3.2). – Die Regel der Universal(quantor)einführung (=UE) lautet:

[46] Wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse *X* das Ergebnis der Substitution eines Parameters β für eine Variable ξ in einer Formel Δ, in der höchstens ξ frei ist, gewonnen hat, wobei β weder Teilterm von Δ noch Teilterm einer Aussage $\Gamma \in X$ ist, dann darf man die Universalquantifikation von Δ bezüglich ξ in Abhängigkeit von *X* folgern.

UE ist wie UB eine Regel, die in der Konklusion nicht zu einer Änderung der Abhängigkeiten führt. – Das erste Theorem greift sowohl auf Elemente der Beispielbetrachtung [44] wie auch auf den Nachweis der Transitivität des Subjunktors (↑[15]) zurück. Wie immer wird der Zusammenhang von Bedeutung und Beweisweg ins Zentrum der Aufmerksamkeit gerückt.

[47] Es-gilt $(\bigwedge\omega\,(B \to \Gamma) \wedge \bigwedge\omega\,(\Gamma \to \Delta)) \to \bigwedge\omega\,(B \to \Delta)$

Der Beweiskandidat ist eine Subjunktion. Um eine Subjunktion zu beweisen, nehmen wir zunächst ihr Antezedens an, um daraus ihr Sukzedens zu folgern; dabei soll das Sukzedens allein vom Antezedens abhängen, so daß die durch SE gewonnene Subjunktion frei von Abhängigkeiten ist:

[47]+ 1	Sei_1	$\bigwedge\omega\,(B \to \Gamma) \wedge \bigwedge\omega\,(\Gamma \to \Delta)$	
...	...	...	
k	Also_1	$\bigwedge\omega\,(B \to \Delta)$	
k+1	Also	$(\bigwedge\omega\,(B \to \Gamma) \wedge \bigwedge\omega\,(\Gamma \to \Delta)) \to \bigwedge\omega\,(B \to \Delta)$	| SE; k

Die verbleibende Teilaufgabe besteht in der Folgerung von $\bigwedge\omega(B \to \Delta)$ in Abhängigkeit von der Annahme der ersten Zeile. Die Aussage der Zeile k ist eine Universalquantifikation. Aussagen dieser Art werden gemäß UE gefolgert. Dazu ist zu zeigen, daß der Bedingungszusammenhang zwischen B und Δ auf eine beliebig, aber fest gewählte, eben

eine repräsentative, Entität zutrifft: $[\beta,\omega,B]\rightarrow[\beta,\omega,\Delta]$. Ist diese Subjunktion in Abhängigkeit von der erstens angenommenen Aussage gewonnnen, dann greift UE:

[47]°	1	Sei_1	$\bigwedge\omega\,(B \rightarrow \Gamma) \wedge \bigwedge\omega\,(\Gamma \rightarrow \Delta)$	
	...	...	...	
	k-1	$Also_1$	$[\beta, \omega, B] \rightarrow [\beta, \omega, \Delta]$	
	k	$Also_1$	$\bigwedge\omega\,(B \rightarrow \Delta)$	|UE; k-1
	k+1	Also	$(\bigwedge\omega\,(B \rightarrow \Gamma) \wedge \bigwedge\omega\,(\Gamma \rightarrow \Delta)) \rightarrow \bigwedge\omega\,(B \rightarrow \Delta)$	|SE; k

Die Aussage von k-1 ist eine Subjunktion, die in der bekannten Weise gemäß SE gewonnen wird. Herzustellen ist insgesamt folgende Diskurslage:

[47]¤	1	Sei_1	$\bigwedge\omega\,(B \rightarrow \Gamma) \wedge \bigwedge\omega\,(\Gamma \rightarrow \Delta)$	
	2	Sei_2	$[\beta, \omega, B]$	
	...	...	...	
	k-2	$Also_{1,2}$	$[\beta, \omega, \Delta]$	
	k-1	$Also_1$	$[\beta, \omega, B] \rightarrow [\beta, \omega, \Delta]$	|SE; k-2
	k	$Also_1$	$\bigwedge\omega\,(B \rightarrow \Delta)$	|UE; k-1
	k+1	Also	$(\bigwedge\omega\,(B \rightarrow \Gamma) \wedge \bigwedge\omega\,(\Gamma \rightarrow \Delta)) \rightarrow \bigwedge\omega\,(B \rightarrow \Delta)$	|SE; k

In k-2 muß man sowohl von dem erstens wie auch von dem zweitens Angenommenen abhängen, damit in k-1 die erforderliche Abhängigkeit besteht. Damit ist auch die Restaufgabe gestellt: Folgere aus der in Zeilen 1 und 2 gegebenen Basis die Aussage von k-2. Das erstens Angenommene ist eine Konjunktion, die man gemäß KB zerlegen kann. In Zeile 3 und 4 gewinnt man in Abhängigkeit von dem erstens Angenommenen Universalquantifikationen:

[47]*	1	Sei_1	$\bigwedge\omega\,(B \rightarrow \Gamma) \wedge \bigwedge\omega\,(\Gamma \rightarrow \Delta)$	
	2	Sei_2	$[\beta, \omega, B]$	
	3	$Also_1$	$\bigwedge\omega\,(B \rightarrow \Gamma)$	|KB; 1
	4	$Also_1$	$\bigwedge\omega\,(\Gamma \rightarrow \Delta)$	|KB; 1
	...	...	...	

k-2	$\text{Also}_{1,2}$	$[\beta, \omega, \Delta]$	
k-1	Also_1	$[\beta, \omega, B] \rightarrow [\beta, \omega, \Delta]$	|SE; k-2
k	Also_1	$\bigwedge\omega\ (B \rightarrow \Delta)$	|UE; k-1
k+1	Also	$(\bigwedge\omega\ (B \rightarrow \Gamma) \wedge \bigwedge\omega\ (\Gamma \rightarrow \Delta)) \rightarrow \bigwedge\omega\ (B \rightarrow \Delta)$	|SE; k

Die Aussagen von 3 und 4 betrachten generelle Zusammenhänge zwischen der B-, der Γ- und der Δ-Eigenschaft. In diesem Beweiskontext interessiert jedoch der repräsentative Spezialfall β. Mit UB gewinnt man aus 3 und 4 die hier zielführende Spezialisierung:

[47]++	1	Sei_1	$\bigwedge\omega\ (B \rightarrow \Gamma) \wedge \bigwedge\omega\ (\Gamma \rightarrow \Delta)$	
	2	Sei_2	$[\beta, \omega, B]$	
	3	Also_1	$\bigwedge\omega\ (B \rightarrow \Gamma)$	|KB; 1
	4	Also_1	$\bigwedge\omega\ (\Gamma \rightarrow \Delta)$	|KB; 1
	5	Also_1	$[\beta, \omega, B] \rightarrow [\beta, \omega, \Gamma]$	|UB; 3
	6	Also_1	$[\beta, \omega, \Gamma] \rightarrow [\beta, \omega, \Delta]$	|UB; 4
	…	…	…	
	k-2	$\text{Also}_{1,2}$	$[\beta, \omega, \Delta]$	
	...	...	...	

Damit ergibt sich nur noch die Aufgabe, aus den Subjunktionen in 5 und 6 und aus dem Antezedens der ersten Subjunktion, welches in Zeile 2 angenommen worden ist, die Aussage von k-2 zu gewinnen. Diese Aufgabe wurde beim Beweis der Transitivität des Subjunktors bereits gelöst (↑[15]). Insgesamt ergibt sich dann folgender Beweis:

[47]°°	1	Sei_1	$\bigwedge\omega\ (B \rightarrow \Gamma) \wedge \bigwedge\omega\ (\Gamma \rightarrow \Delta)$	
	2	Sei_2	$[\beta, \omega, B]$	
	3	Also_1	$\bigwedge\omega\ (B \rightarrow \Gamma)$	|KB; 1
	4	Also_1	$\bigwedge\omega\ (\Gamma \rightarrow \Delta)$	|KB; 1
	5	Also_1	$[\beta, \omega, B] \rightarrow [\beta, \omega, \Gamma]$	|UB; 3
	6	Also_1	$[\beta, \omega, \Gamma] \rightarrow [\beta, \omega, \Delta]$	|UB; 4
	7	$\text{Also}_{1,2}$	$[\beta, \omega, \Gamma]$	|SB; 2,5
	8	$\text{Also}_{1,2}$	$[\beta, \omega, \Delta]$	|SB; 6,7

9	Also_1	$[\beta, \omega, B] \rightarrow [\beta, \omega, \Delta]$	SE; 8
10	Also_1	$\bigwedge\omega\,(B \rightarrow \Delta)$	UE; 9
11	Also	$(\bigwedge\omega\,(B \rightarrow \Gamma) \wedge \bigwedge\omega\,(\Gamma \rightarrow \Delta)) \rightarrow \bigwedge\omega\,(B \rightarrow \Delta)$	SE; 10

Dabei werden die Zeilen unter Wegfall der k-Bezifferung laufend numeriert. – Das zweite Theorem hält fest, daß man aus der Adjunktion zweier Universalquantifikationen auf die Universalquantifikation zweier Adjunktionen schließen darf:

[48]	0	Es-gilt	$(\bigwedge\xi\Delta \vee \bigwedge\xi\Gamma) \rightarrow \bigwedge\xi\,(\Delta \vee \Gamma)$	
$\rightarrow$	1	Sei_1	$\bigwedge\xi\Delta \vee \bigwedge\xi\Gamma$	
	2	Sei_2	$\bigwedge\xi\Delta$	
	3	Also_2	$[\beta, \xi, \Delta]$	UB; 2
	4	Also_2	$[\beta, \xi, \Delta] \vee [\beta, \xi, \Gamma]$	AE; 3
	5	Also_2	$\bigwedge\xi\,(\Delta \vee \Gamma)$	UE; 4
	6	Sei_3	$\bigwedge\xi\Gamma$	
	7	Also_3	$[\beta, \xi, \Gamma]$	UB; 6
	8	Also_3	$[\beta, \xi, \Delta] \vee [\beta, \xi, \Gamma]$	AE; 7
	9	Also_3	$\bigwedge\xi\,(\Delta \vee \Gamma)$	UE; 8
	10	Also_1	$\bigwedge\xi\,(\Delta \vee \Gamma)$	AB; 1,5,9
	11	Also	$(\bigwedge\xi\Delta \vee \bigwedge\xi\Gamma) \rightarrow \bigwedge\xi\,(\Delta \vee \Gamma)$	SE; 10

Das Antezedens der zu beweisenden Subjunktion erzwingt eine Fallunterscheidung. Sowohl im ersten (Zeile 2-5) wie auch im zweiten Fall (Zeile 6-9) folgt das Gewünschte. Mit AB kann man dann das Sukzedens folgern; damit ist die Möglichkeit zur Anwendung von SE gegeben. – Schließlich sei noch eine quantorenlogische Variante des Nichtwiderspruchsprinzips bewiesen:

[49]	0	Es-gilt	$\bigwedge\xi \neg (\Delta \wedge \neg \Delta)$	
	1	Wäre$_1$	$[\beta, \xi, \Delta] \wedge \neg [\beta, \xi, \Delta]$	
	2	Also$_1$	$[\beta, \xi, \Delta]$	| KB; 1
	3	Also$_1$	$\neg [\beta, \xi, \Delta]$	| KB; 1
	4	Also	$\neg ([\beta, \xi, \Delta] \wedge \neg [\beta, \xi, \Delta])$	| NE; 2,3
	5	Also	$\bigwedge\xi \neg (\Delta \wedge \neg \Delta)$	| UE; 4

Bei diesem Beweis kommt es darauf an, die geeignete >Zielscheibe< für den indirekten Beweis zu finden. Dazu muß man sich klarmachen, welche Aussage für die Anwendung von UE paßt. Da diese Aussage eine Negation ist, startet man mit dem Negatum. Die Beweiszüge 1 bis 4 sind vom Beweis des junktorenlogischen Widerspruchsprinzips bekannt (↑[37]).

Ü10 Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) $(\bigwedge\omega\, (B \rightarrow \Gamma) \wedge \bigwedge\omega\, B) \rightarrow \bigwedge\omega\, \Gamma$

b) $\bigwedge\omega\, (B \wedge \Gamma) \leftrightarrow (\bigwedge\omega\, B \wedge \bigwedge\omega\, \Gamma)$

c) $\bigwedge\omega\, (B \rightarrow \Gamma) \rightarrow (\bigwedge\omega\, B \rightarrow \bigwedge\omega\, \Gamma)$

d) $(\bigwedge\omega\, (B \vee \Gamma) \wedge \bigwedge\omega \neg \Gamma) \rightarrow \bigwedge\omega\, B$

UE gibt den Weg vor, um auf eine Universalquantifikation zu schließen. Geschieht dies frei von Abhängigkeiten, dann ist die gefolgerte Universalquantifikation beweisbar bzw. – allgemeiner – wahr. Insofern fixiert UE den Beweis- bzw. Wahrheitsqualifizierungsweg für Universalquantifikationen. UB eröffnet die Möglichkeit, auf Aussagen zu schließen, die aus der Substitution eines geschlossenen Terms für die Variablen in der universalquantifizierten Formel entstehen, also auf Spezialisierungen der Universalaussage. Ist die Universalquantifikation wahr, dann ist auch die Spezialisierung wahr. Insofern spezifiziert UB die Rolle von Universalaussagen als Wahrheitsbasis.

4.3.2 Der Partikularquantor

Zur Erinnerung: Der Partikularquantifikator '$\bigvee$..' ist ein einstelliger, variablenbestimmender und operatorenerzeugender Operator. Der erzeugte Operator, das Ergebnis der Anwendung des Partikularquantifikators '$\bigvee$..' auf eine Variable ξ, also $\bigvee\xi$__, der ξ bindende Partikularquantor, ist ein formelbestimmender und formelerzeugender Operator; das

Ergebnis der Anwendung von $\bigvee\xi$__ auf eine Formel Δ ist eine partikularquantifizierte Formel. Ist in Δ höchstens ξ frei, dann ist die Formel $\bigvee\xi\Delta$ die Partikularquantifikation von Δ bezüglich ξ; solche Partikularquantifikationen werden auch als partikulare Aussagen bzw. Partikularaussagen geführt (↑3.2.3).

Anzugeben ist nun, unter welchen Bedingungen auf eine Partikularquantifikation geschlossen werden darf bzw. was aus einer Partikularquantifikation gefolgert werden kann. Zum ersten: Falls eine Δ-Eigenschaft auf eine ϑ-Entität zutrifft, dann darf man daraus schließen, daß für wenigstens eine Entität die Δ-Eigenschaft gilt. Kurz: Besitzt ein bestimmtes Einzelnes eine Eigenschaft, dann gibt es etwas, was diese Eigenschaft aufweist. Zum zweiten: Hat man eine Partikularquantifikation gewonnen, dann darf man aus ihr all das folgern, was aus einer zugehörigen >Ersatzannahme< folgt. Hat man gewonnen, daß eine Δ-Eigenschaft auf wenigstens ein ξ zutrifft, dann darf man daraus all das folgern, was daraus folgt, daß Δ auf ein beliebig, aber fest gewähltes β zutrifft. – Zum Verständnis beider Schlußlizenzen kann eine Orientierung am gebrauchssprachlichen ’Es gibt ein..’ und seinen Synonymen hilfreich sein.

Zunächst zur Partikularquantoreinführung: Man darf daraus, daß für einen singulären Gegenstand etwas gilt, folgern, daß es etwas gibt bzw. daß für wenigstens ein Gebilde gilt, daß es die Eigenschaft hat, die dem singulären Gegenstand zukommt. UB erlaubt den Schluß vom Universalen aufs Singuläre; die jetzt erörterte Regel gestattet den Übergang vom Singulären aufs Partikulare. Die Abhängigkeiten bleiben dabei konstant. Die Schlußfigur:

[50] Ξ_x $[\theta, \xi, \Delta]$
Also_x $\bigvee\xi\Delta$

Wenn man etwa die Aussage ’3=3’ gewonnen hat, dann darf man daraus die Aussagen ’$\bigvee x$ x=3’, ’$\bigvee x$ 3=x’, ’$\bigvee x$ x=x’ folgern. Im ersten Fall entspricht ’3’ ϑ und ’x=3’ entspricht Δ; ersichtlich korrespondiert dann [’3’, ’x’, ’x=3’], also ’3=3’ dem [θ, ξ, Δ]. Im zweiten Fall entspricht wiederum ’3’ θ und ’3=x’ entspricht Δ; ersichtlich korrespondiert dann [’3’, ’x’, ’3=x’], also ’3=3’, dem [θ, ξ, Δ]. Im dritten Fall entspricht wiederum ’3’ θ und ’x=x’ entspricht Δ; ersichtlich korrespondiert dann [’3’, ’x’, ’x=x’], also ’3=3’, dem [θ, ξ, Δ].

Material gesprochen: Im ersten Fall schließt man daraus, daß 3 die Eigenschaft hat, zu 3 in der Identitätsbeziehung zu stehen, daß es etwas gibt, das zu 3 in der Identitätsbeziehung steht. Im zweiten Fall schließt man daraus, daß 3 die Eigenschaft hat, daß 3 zum erstgenannten Gebilde in der Identitätsbeziehung steht, daß es etwas gibt, zu dem 3 in der

Identitätsbeziehung steht. Im dritten Fall schließt man daraus, daß 3 zu sich in der Identitätsrelation steht, daß wenigstens ein Gebilde zu sich in der Identitätsbeziehung steht.

Aus '$\bigvee x\ x{=}3$' kann man weiter auf '$\bigvee z \bigvee x\ x{=}z$' schließen und aus '$\bigvee x\ 3{=}x$' läßt sich '$\bigvee y \bigvee x\ y{=}x$' folgern. Die Prämisse des Schlusses muß also keineswegs eine atomare Aussage sein. Im ersten Fall hat 3 die Eigenschaft, daß es etwas gibt, das zu 3 in der Identitätsbeziehung steht. Also gilt, daß für wenigstens ein Gebilde zutrifft, daß es etwas gibt, das zu ihm in der Identitätsrelation steht; ['3', 'z', '$\bigvee x\ x{=}z$'] entspricht in diesem Beispiel [θ, ξ, Δ]. Im zweiten Fall hat 3 die Eigenschaft, daß 3 zu wenigstens einem Gebilde in der Identitätsbeziehung steht. Also gibt es wenigstens eine Gegebenheit, die zu wenigstens einem Gebilde in der Identitätsrelation steht; ['3', 'z', '$\bigvee x\ z{=}x$'] entspricht in diesem Beispiel [θ, ξ, Δ]. Die Eigenschaft, die das Einzelne besitzt, kann also komplex sein. Formal ausgedrückt: ϑ kann Teilterm einer molekularen Formel Δ sein. – Die Regel der <u>P</u>artikular(quantor)<u>e</u>inführung (=PE) läßt sich abschließend so formulieren:

[51] Wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse *X* das Ergebnis der Substitution eines geschlossenen Terms θ für eine Variable ξ in einer Formel Δ, in der höchstens ξ frei ist, gewonnen hat, dann darf man in Abhängigkeit von *X* die Partikularquantifikation von Δ bezüglich ξ folgern.

Was auf alle zutrifft, gilt auch für einzelne Gegenstände; und wenn etwas von einem einzelnen Gegenstand gilt, trifft es auch auf wenigstens eine Gegebenheit zu. Vom Universalen gibt es also über das Singuläre einen >Durchgang< zum Partikularen, eben dies zeigt der folgende Beweis:

[52]	Es-gilt	$\bigwedge\xi\Delta \rightarrow \bigvee\xi\Delta$
	Sei$_1$	$\bigwedge\xi\Delta$
	Also$_1$	[θ, ξ, Δ]
	Also$_1$	$\bigvee\xi\Delta$
	Also	$\bigwedge\xi\Delta \rightarrow \bigvee\xi\Delta$

Die soeben formulierte Regel wird im zweiten Folgerungsschritt angewendet. – Die Regel der Partikularquantorbeseitigung wird wie die Regel der Adjunktorbeseitigung als schwierig empfunden. Beide Regeln haben eine ganz ähnliche Struktur: Aus einer Adjunktion resp. einer Partikularquantifikation soll das folgen, was aus bestimmten anderen Aussagen folgt. Aus einer Adjunktion darf man schließen, was aus beiden Fällen der Adjunktion, was aus

beiden Adjunkten, folgt. Aus einer Partikularquantifikation darf man schließen, was aus einem repräsentativen Fall, der Ersatzannahme für die Quantifikation folgt.

Zunächst ein Beispiel: Zu begründen ist die Aussage ’Alle Menschen haben einen Vater’ bzw. grammatisch formatiert, ’Für alle *x*: Wenn *x* ein Mensch ist, dann gibt es ein *y*, so daß *y* Vater von *x* ist.’ Begründung: 1 Sei_1: z ein Mensch. 2 Da: Für alle *x*: Wenn *x* Mensch ist, dann gibt es ein *u*, so daß *u x* zeugte. 3 Also: Wenn *z* Mensch ist, dann gibt es ein *u*, so daß *u* z zeugte. 4 $Also_1$: Es gibt es ein *u*, so daß *u* z zeugte. 5 Sei_2: u ist ein solches, d.h. u zeugte z. 6 Da: Für alle *x*,*y*: Wenn *x* Vater von *y*, dann und nur dann zeugte *x y*. 7 Also: Für alle *y*: Wenn u Vater von *y*, dann und nur dann zeugte u *y*. 8 Also: Wenn u Vater von z, dann und nur dann zeugte u z. 9 $Also_2$: u ist Vater von z. 10 $Also_2$: Es gibt ein *u*, so daß *u* Vater von z ist. 11 $Also_1$: Es gibt ein *u*, so daß *u* Vater von z ist. 12 Also: Wenn z Mensch ist, dann gibt es ein *u*, so daß *u* Vater von z ist. 13 Also: Für alle *x*: Wenn *x* Mensch ist, dann gibt es ein *u*, so daß *u* Vater von *x* ist. – Dieser Begründungsinstanz ist folgendes Begründungsschema zugeordnet:

[53]	0	Es-gilt	$\bigwedge\xi\,(\Phi(\xi) \rightarrow \bigvee\omega\,\Psi(\omega, \xi))$	
	1	Sei_1	$\Phi(\beta)$	
	2	Da	$\bigwedge\xi\,(\Phi(\xi) \rightarrow \bigvee\zeta\,X(\zeta, \xi))$	
	3	Also	$\Phi(\beta) \rightarrow \bigvee\zeta\,X(\zeta, \beta)$	| UB; 2
	4	$Also_1$	$\bigvee\zeta\,X(\zeta, \beta)$	| SB; 1,3
	5	Sei_2	$X(\beta^*, \beta)$	
	6	Da	$\bigwedge\xi\bigwedge\zeta\,(\Psi(\xi, \zeta) \leftrightarrow X(\xi, \zeta))$	
	7	Also	$\bigwedge\zeta\,(\Psi(\beta^*, \zeta) \leftrightarrow X(\beta^*, \zeta))$	| UB; 6
	8	Also	$\Psi(\beta^*, \beta) \leftrightarrow X(\beta^*, \beta)$	| UB; 7
	9	$Also_2$	$\Psi(\beta^*, \beta)$	| BB; 5,8
	10	$Also_2$	$\bigvee\omega\,\Psi(\omega, \beta)$	| PE; 9
	⇒ 11	$Also_1$	$\bigvee\omega\,\Psi(\omega, \beta)$	| PB; 4, 10
	12	Also	$\Phi(\beta) \rightarrow \bigvee\omega\,\Psi(\omega, \beta)$	| SE; 11
	13	Also	$\bigwedge\xi\,(\Phi(\xi) \rightarrow \bigvee\omega\,\Psi(\omega, \xi))$	| UB; 12

Es entspricht Φ dem Prädikator ’..ist Mensch’ und Ψ dem Prädikator ’..ist Vater von..’; *X* korrespondiert ’..zeugte..’. Anstatt der allgemeineren Formelmitteilungszeichen Δ, Γ, B usf.

wurden hier die Prädikatorenmitteilungszeichen gewählt: So wird die Aufmerksamkeit nicht durch prima facie wenig transparente, weil geschachtelte, Substitutionsverhältnisse abgelenkt. Die hier interessierenden Schritte finden zwischen den Zeilen 4 und 11 statt: In Zeile 4 wird eine Partikularquantifikation gewonnen, und zwar im Folgerungsmodus. Die Partikularquantifikation wird zur weiteren Verwendung als Prämisse dadurch aufbereitet, daß ein Repräsentant für das wenigstens eine ζ gewählt wird, das zu β in X steht. Das ist insofern legitim, als ja nach PE für eine singuläre Gegebenheit gelten muß, daß sie in X zu β steht. Andererseits ist nicht klar, welches Singuläre dies ist. Das repräsentative Gebilde, hier β^*, soll nun zwar alle die Eigenschaften haben dürfen, die auf alles zutreffen; insofern ist gegen den UB-Schritt von Zeile 6 auf Zeile 7 nichts einzuwenden. Es soll aber ansonsten nur die in der Partikular- bzw. in der repräsentativen Ersatzannahme ausgedrückte Eigenschaft besitzen. Was auf alles zutrifft, soll auch von β^* gelten; ansonsten soll von β^* aber auch nur gelten, daß es in X zu β steht. Um diesen Ausschluß zu garantieren, werden der Regel einige später erläuterte Kautelen hinzugefügt.

In Zeile 10 ist man insoweit zum Ziel gelangt, als man das gewünschte Sukzedens erreicht hat. Nun >erinnert< man sich daran, daß man das Ergebnis im Betrachtungsrahmen der repräsentativen Ersatzannahme erzielt hat und geht zu dem eigentlich gewonnenen Rahmen zurück, der durch die Partikularquantifikation gegeben ist. Dieser Folgerungszug ist die Partikularquantorbeseitigung. Anwendungszeilen bzw. –prämissen sind die Partikularaussage aus Zeile 4 und die in Zeile 10 gewonnenen Zielaussage. Die Abhängigkeiten wechseln: An die Stelle der Abhängigkeit von der repräsentativen Annahme tritt die Abhängigkeit von den Aussagen, von denen die Partikularaussage abhängt. Hängt die gewonnene Aussage von weiteren Aussagen ab, dann werden die Abhängigkeiten weitergegeben. Die Schlußfigur hat folgende Gestalt:

[54]	Ξ_X	$\bigvee\xi\Delta$	
	…	…	
	Also_Y	Γ	,wobei $[\beta, \xi\ \Delta] \in Y$ + Kautelen
	$\text{Also}_{X\cup(Y\setminus\{[\beta,\ \xi\ \Delta]\})}$	Γ	

Die praxisnahe Schlußfigur hat dann folgendes Aussehen:

[54]+	Ξ_X	$\bigvee\xi\Delta$	
	Sei_k	$[\beta, \xi\ \Delta]$	
	…	…	
	Also_Y	Γ	,wobei $[\beta, \xi\ \Delta] \in Y$ + Kautelen
	$\text{Also}_{X\cup(Y\setminus\{[\beta,\ \xi\ \Delta]\})}$	Γ	

Der Schluß tilgt die Ersatzannahme. – Die folgende Regel der Partikularquantorbeseitigung (=PB) enthält auch die in [54] nur global angedeuteten Kautelen:

[55] Wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse X die Partikularquantifikation von Δ bezüglich ξ gewonnen hat und wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse Y eine Aussage Γ gewonnen hat, wobei das Ergebnis der Substitution des Parameters β für ξ in Δ Element von Y ist und β nicht Teilterm eines $A\in(Y\setminus\{[\beta,\xi,\Delta]\})\cup\{\Delta,\Gamma\}$ ist, dann darf man in Abhängigkeit von $X\cup(Y\setminus\{[\beta,\xi,\Delta]\})$ die Aussage Γ folgern.

Zunächst soll durch den Beweis einschlägiger Aussagen Vertrautheit mit PB herstellt werden. Die Partikularquantifikation einer Adjunktion aus Δ und Γ ist gleichwertig der Adjunktion aus der Partikularquantifikation von Δ und Γ.

[56]	0	Es-gilt	$\bigvee\xi\ (B \vee \Gamma) \leftrightarrow (\bigvee\omega\ B \vee \bigvee\omega\ \Gamma)$	
	1	Sei_1	$\bigvee\xi\ (B \vee \Gamma)$	
→	2	Sei_2	$[\beta, \xi, B] \vee [\beta, \xi, \Gamma]$	
	3	Sei_3	$[\beta, \xi, B]$	
	4	Also_3	$\bigvee\xi\ B$	|PE; 3
	5	Also_3	$\bigvee\xi\ B \vee \bigvee\xi\ \Gamma$	|AE; 4
	6	Sei_4	$[\beta, \xi, \Gamma]$	
	7	Also_4	$\bigvee\xi\ \Gamma$	|PE; 6
	8	Also_4	$\bigvee\xi\ B \vee \bigvee\xi\ \Gamma$	|AE; 7
	9	Also_2	$\bigvee\xi\ B \vee \bigvee\xi\ \Gamma$	|AB; 2,5,8
	10	Also_1	$\bigvee\xi\ B \vee \bigvee\xi\ \Gamma$	|PB; 1,9
→	11	Sei_5	$\bigvee\xi\ B \vee \bigvee\xi\ \Gamma$	

12	Sei_6	$\bigvee\xi\ B$	
13	Sei_7	$[\beta, \xi, B]$	
14	$Also_7$	$[\beta, \xi, B] \vee [\beta, \xi, \Gamma]$	AE; 13
15	$Also_7$	$\bigvee\xi\ (B \vee \Gamma)$	PE; 14
16	$Also_6$	$\bigvee\xi\ (B \vee \Gamma)$	PB; 12,15
17	Sei_8	$\bigvee\xi\ \Gamma$	
18	Sei_9	$[\beta, \xi, \Gamma]$	
19	$Also_9$	$[\beta, \xi, B] \vee [\beta, \xi, \Gamma]$	AE; 18
20	$Also_9$	$\bigvee\xi\ (B \vee \Gamma)$	PE; 19
21	$Also_8$	$\bigvee\xi\ (B \vee \Gamma)$	PB; 17,20
22	$Also_5$	$\bigvee\xi\ (B \vee \Gamma)$	AB; 11,16,21
23	Also	$\bigvee\xi\ (B \vee \Gamma) \leftrightarrow (\bigvee\xi\ B \vee \bigvee\xi\ \Gamma)$	BE; 10,22

Beim Weg von links nach rechts findet in Zeile 10 eine Partikularbeseitigung auf Basis einer Adjunktorbeseitigung in Zeile 9 statt. Auf dem Weg von rechts nach links findet in Zeile 22 eine Adjunktorbeseitigung auf Basis zweier Partikularbeseitigungen in den Zeilen 16 und 21 statt. Diese Schrittfolge wird durch die jeweiligen Startformeln, einmal Partikularaussage, einmal Adjunktion, vorgegeben. – Die folgende Aussage ist eine Variante der einfachen Quantorumformung: Die Universalquantifikation einer Formel Δ ist gleichwertig der Negation der Partikularquantifikation der Negation von Δ. Material: Eine Eigenschaft trifft genau dann auf alle Gebilde zu, wenn es kein Gebilde gibt, auf das sie nicht zutrifft:

[57]	0	Es-gilt	$\bigwedge\xi\Delta \leftrightarrow \neg \bigvee\xi\neg \Delta$	
	1	Sei_1	$\bigwedge\xi\Delta$	
	2	$Wäre_2$	$\bigvee\xi\neg \Delta$	
	3	Sei_3	$\neg [\beta, \xi, \Delta]$	
	4	$Also_{2,3}$	$\bigvee\xi\neg \Delta \wedge \neg [\beta, \xi, \Delta]$	KE; 2,3
	5	$Also_{2,3}$	$\neg [\beta, \xi, \Delta]$	KB; 4
	6	$Also_1$	$[\beta, \xi, \Delta]$	UB; 1
	7	$Also_{1,3}$	$\neg \bigvee\xi\neg \Delta$	NE; 5,6

8	Also$_{1,2}$	$\neg \bigvee\xi \neg \Delta$	|PB, 2,7
9	Also$_1$	$\neg \bigvee\xi \neg \Delta$	|NE; 2,8
10	Sei$_4$	$\neg \bigvee\xi \neg \Delta$	
11	Wäre$_5$	$\neg [\beta, \xi, \Delta]$	
12	Also$_5$	$\bigvee\xi \neg \Delta$	|PE; 11
13	Also$_4$	$\neg \neg [\beta, \xi, \Delta]$	|NE; 10,12
14	Also$_4$	$[\beta, \xi, \Delta]$	|NB; 13
15	Also$_4$	$\bigwedge\xi\Delta$	|UE; 14
16	Also	$\bigwedge\xi\Delta \leftrightarrow \neg \bigvee\xi \neg \Delta$	|BE; 9,15

Bei der Links-Rechts-Richtung ist die Herstellung der künstlichen Abhängigkeit in den Zeilen 4 und 5 zu beachten (↑[18]+). Bei der Rechts-Links-Richtung kommt es auf die Findung der Annahme des indirekten Beweises an, die in Zeile 11 erfolgt: Zu folgern ist eine Universalaussage; dazu benötigt man nach UE eine Aussage der Art $[\beta, \xi, \Delta]$. Diese erhält man, indem man ihre Negation, also $\neg[\beta, \xi, \Delta]$, zum Widerspruch führt. Aus $\neg\neg[\beta, \xi, \Delta]$ ergibt sich dann mit NB das Gewünschte.

Zuletzt ist eine komplexe Quantorumformung zu betrachten: Die Universalquantifikation einer Subjunktion aus Δ und Γ ist gleichwertig der Negation der Partikularquantifikation der Konjunktion aus Δ und der Negation von Γ:

[58] Es-gilt $\bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow \Gamma) \leftrightarrow \neg \bigvee\xi\ (\Delta \wedge \neg \Gamma)$

Material gesprochen: Sind alle Δ-Dinge Γ, dann gibt es kein Δ-Gebilde, das nicht Γ ist. Der Beweiskandidat ist eine Bisubjunktion. Nach BE ist damit die übergreifende Gestalt des Beweises festgelegt:

[58]°	1	Sei$_1$	$\bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow \Gamma)$	
	...	...	...	
	k	Also$_1$	$\neg \bigvee\xi\ (\Delta \wedge \neg \Gamma)$	
	k+1	Sei$_2$	$\neg \bigvee\xi\ (\Delta \wedge \neg \Gamma)$	
	...	...	...	
	n	Also$_2$	$\bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow \Gamma)$	
	n+1	Also	$\bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow \Gamma) \leftrightarrow \neg \bigvee\xi\ (\Delta \wedge \neg \Gamma)$	| BE; k,n

Die Links-Rechts-Richtung geht aus von der Annahme der Universalaussage. Um die Negation der Partikularaussage zu erhalten, nimmt man die Partikularaussage in der Absicht an, sie zum Widerspruch zu führen. Die angenommene Partikularquantifikation wird mit Blick auf PB durch eine repräsentative Ersatzannahme ersetzt:

[58]*	1	Sei$_1$	$\bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow \Gamma)$
	2	Wäre$_2$	$\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \neg \Gamma)$
	3	Sei$_3$	$[\beta, \xi, \Delta] \wedge \neg [\beta, \xi, \Gamma]$
	...	...	...
	k	Also$_1$	$\neg \bigvee\xi\ (\Delta \wedge \neg \Gamma)$

Die Inspektion der Zeilen 1 und 3 macht auch schon klar, wie der Widerspruch zu erzeugen ist: Die erste Annahme ist auf β zu spezialisieren: $[\beta, \xi, \Delta] \rightarrow [\beta, \xi, \Gamma]$. Mit dem ersten Konjunkt aus Zeile 3 erhält man dann mit SB $[\beta, \xi, \Gamma]$, was dem zweiten Konjunkt aus Zeile 3 widerspricht. Allerdings ist hier der Negationskandidat, die Annahme des indirekten Beweises, nicht in der >Schußlinie< von NE. Mittels der Herstellung einer künstlichen Abhängigkeit kann das geleistet werden:

[58]°	1	Sei$_1$	$\bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow \Gamma)$	
	2	Wäre$_2$	$\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \neg \Gamma)$	
	3	Sei$_3$	$[\beta, \xi, \Delta] \wedge \neg [\beta, \xi, \Gamma]$	
	4	Also$_{2,3}$	$\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \neg \Gamma) \wedge ([\beta, \xi, \Delta] \wedge \neg [\beta, \xi, \Gamma])$	| KE; 2,3
	5	Also$_{2,3}$	$[\beta, \xi, \Delta] \wedge \neg [\beta, \xi, \Gamma]$	| KB; 4
	6	Also$_{2,3}$	$[\beta, \xi, \Delta]$	| KB; 5

7	Also$_{2,3}$	$\neg [\beta, \xi, \Gamma]$	KB; 5
8	Also$_{1}$	$[\beta, \xi, \Delta] \rightarrow [\beta, \xi, \Gamma]$	UB; 1
9	Also$_{1,2,3}$	$[\beta, \xi, \Gamma]$	SB; 6,8
10	Also$_{1,3}$	$\neg \bigvee\xi (\Delta \wedge \neg \Gamma)$	NE; 7,9
11	Also$_{1,2}$	$\neg \bigvee\xi (\Delta \wedge \neg \Gamma)$	PB; 2,10
12	Also$_{1}$	$\neg \bigvee\xi (\Delta \wedge \neg \Gamma)$	NE; 2,11

In Zeile 10 hat man die gewünschte Aussage erhalten, muß sich aber über die Abhängigkeit von der Ersatzannahme in Zeile 3 daran erinnern, daß man noch die >wirkliche< Abhängigkeit, d.h. die Abhängigkeit von der Partikularaussage, herstellen muß; das geschieht in Zeile 11. Damit ist wiederum mit Zeile 2 und Zeile 11 eine Aussage und ihre Negation gegeben. Durch NE macht man sich frei von der Annahme des indirekten Beweises und ist im Ziel.

Die Umkehrrichtung steht unter der Annahme $\neg\bigvee\xi(\Delta\wedge\neg\Gamma)$. Um die Zielaussage $\bigwedge\xi(\Delta\rightarrow\Gamma)$ zu erreichen, muß man $[\beta,\xi,\Delta]\rightarrow[\beta,\xi,\Gamma]$ in Abhängigkeit von der Annahme gewinnen. Dazu wiederum hat man das Antezedens der Subjunktion anzunehmen. Mit Blick auf die Annahme kann man dann indirekt verfahren und die Annahme von $\neg[\beta,\xi,\Gamma]$ zum Widerspruch führen:

[58]*	13	Sei$_{4}$	$\neg \bigvee\xi (\Delta \wedge \neg \Gamma)$	
	14	Sei$_{5}$	$[\beta, \xi, \Delta]$	
	15	Wäre$_{6}$	$\neg [\beta, \xi, \Gamma]$	
	16	Also$_{5,6}$	$[\beta, \xi, \Delta] \wedge \neg [\beta, \xi, \Gamma]$	KE; 14,15
	17	Also$_{5,6}$	$\bigvee\xi (\Delta \wedge \neg \Gamma)$	PE; 16
	18	Also$_{4,5}$	$\neg \neg [\beta, \xi, \Gamma]$	NE; 13,17
	19	Also$_{4,5}$	$[\beta, \xi, \Gamma]$	NB; 18
	20	Also$_{4}$	$[\beta, \xi, \Delta] \rightarrow [\beta, \xi, \Gamma]$	SE; 19
	21	Also$_{4}$	$\bigwedge\xi (\Delta \rightarrow \Gamma)$	UE; 20
	22	Also	$\bigwedge\xi (\Delta \rightarrow \Gamma) \leftrightarrow \neg \bigvee\xi (\Delta \wedge \neg \Gamma)$	BE; 12,21

Ü11 Beweisen Sie folgende Aussagen!

a) $\bigvee\xi\ (B \wedge \Gamma) \rightarrow \bigvee\xi\ B \wedge \bigvee\xi\ \Gamma$

b) $\bigwedge\xi\ (B \rightarrow \Gamma) \rightarrow (\bigvee\xi\ B \rightarrow \bigvee\xi\ \Gamma)$

c) $\bigvee\xi\ B \leftrightarrow \neg \bigwedge\xi \neg B$

d) $\neg \bigwedge\xi\ B \leftrightarrow \bigvee\xi \neg B$

e) $\neg \bigvee\xi\ B \leftrightarrow \bigwedge\xi \neg B$

f) $\bigvee\xi\ (B \wedge \Gamma) \leftrightarrow \neg \bigwedge\xi\ (B \rightarrow \neg \Gamma)$

g) $\bigwedge\xi\ (B \rightarrow \neg \Gamma) \leftrightarrow \neg \bigvee\xi\ (B \wedge \Gamma)$

h) $\bigvee\xi\ (B \wedge \neg \Gamma) \leftrightarrow \neg \bigwedge\xi\ (B \rightarrow \Gamma)$

i) $\bigwedge\xi\ B \vee \bigvee\xi \neg B$

PE gibt den Weg vor, um auf eine Partikularquantifikation zu schließen. Geschieht dies frei von Abhängigkeiten, dann ist die gefolgerte Partikularquantifikation beweisbar bzw. – allgemeiner – wahr. Insofern fixiert PE den Beweis- bzw. Wahrheitsqualifizierungsweg für Partikularquantifikationen. PB eröffnet die Möglichkeit, auf Aussagen zu schließen, die aus der repräsentativen Annahme einer gegebenen Partikularquantifikation folgen. Ist die Partikularquantifikation wahr und ist die gefolgerte Aussage auch sonst frei von Abhängigkeiten, dann ist auch die gefolgerte Aussage wahr. Insofern fixiert PB die Rolle von Partikularquantifikationen als Wahrheitsbasen.

PB und UE sind die Quantorregeln, die ausdrücklich Parameter ins Spiel bringen. Parameter werden benötigt, weil Individuenkonstanten oder andere von Parametern verschiedene geschlossene Terme für die Formulierung von PB und UE untauglich sind. Ersetze man etwa in UE die Rede vom Parameter β durch jene von dem geschlossenen Term θ, dann könnte man aus der Aussage ’2 ist eine Primzahl’ die Universalaussage ’$\bigwedge x$ *x* ist eine Primzahl’ folgern. Bestimmte Individuen haben bestimmte, sie von anderen unterscheidende Eigenschaften; und diese unterscheidenden Eigenschaften, im Beispiel: das Primzahlsein, können eben nicht im Folgerungswege auf alle anderen übertragen werden. – Auch bei PB können die Parameter in ihrer Funktion nicht durch andere geschlossene Terme ersetzt werden: Bildete man die repräsentative Ersatzannahme zu ’$\bigvee x$ *x* ist eine gerade Zahl’ etwa mit der Individuenkonstante ’5’, so ergäbe sich ’5 ist eine gerade Zahl’; mit einer Zusatzprämisse wie ’5 ist eine ungerade Zahl’ resultierte dann über KE, PE und PB die Aussage ’$\bigvee x$ (*x* ist eine gerade Zahl und *x* ist eine ungerade Zahl)’. Auch in diesem Falle

sind Individuenkonstanten deshalb ungeeignet, weil die Individuen sie charakterisierende spezielle Eigenschaften in den Folgerungszusammenhang mitbringen.

Sowohl UE wie auch PB enthalten Kautelen, die sichern, daß die Parameter nicht mehr als die ihnen zugedachte universal bzw. partikulär repräsentierende Rolle spielen. Diese sind exemplarisch zu erläutern. (i) In UE ist verlangt, daß der Parameter β nicht Teilterm der Formel Δ ist. Man betrachte das folgende Schlussfragment:

[59]	1	Da	$\bigwedge x\ x = x$
	2	Also	z = z
	3	Also	$\bigwedge x\ x = z$
	4	Also	$\bigvee z \bigwedge x\ x = z$

In Zeile 1 ist eine logische Wahrheit (↑[66]) notiert. Mit UB gelangt man zur Spezialisierung in Zeile 2. Mit dem kritischen Schritt der inkorrekten Universaleinführung erhält man die Universalaussage von Zeile 3. PE ergibt die falsche Aussage, daß wenigstens ein Gebilde mit allem identisch ist. Inhaltlich gesprochen wird an der kritischen Stelle folgender Übergang vollzogen: Aus dem Umstand, daß ein universal repräsentatives Gebilde mit sich identisch ist, schließt man darauf, daß alle Gebilde mit dem universal repräsentativen zusammenfallen. Das erfolgt dadurch, daß man den Parameter ’z’ >stehenläßt<. Dadurch aber wird z eine ganz neue Eigenschaft zugeschrieben. Bezieht man den kritischen Schritt auf die Formulierung von UE unter [46], so resultiert: ’z’ entspricht β, ’*x*’ entspricht ξ, ’*x*=z’ entspricht Δ und [’z’, ’*x*’, ’*x*=z’], also ’z=z’, entspricht [β, ξ, Δ]. Der Parameter ’z’ ist unzulässigerweise in Δ noch Teilterm. Eine korrekte UE müßte alle ’z’ erfassen, also ’*x*=*x*’ als Δ wählen. Die Kautel schließt demnach aus, daß der repräsentative Gegenstand durch Stehenlassen eine neue Eigenschaft erhält.

(ii) In UE ist ferner gefordert, daß der Parameter β nicht in einer Aussage Γ aus der Aussagenklasse *X* vorkommt, also nicht in einer Aussage, von der die Universalquantifikation bzw. ihre Parametrisierung abhängt. Man betrachte das folgende Schlußfragment:

[60]	1	Da	$\bigvee x\ x = 2$
	2	Sei_1	z = 2
	3	Also_1	$\bigwedge z\ z = 2$
	4	Also	$\bigwedge z\ z = 2$

Es ist eine logische Wahrheit, daß wenigstens ein Gebilde mit 2 identisch ist, daraus >folgt< über UE und PB die falsche Aussage, daß alle Gebilde mit 2 identisch sind. Inhaltlich gesehen, besteht der Fehlschluß darin, daß ein partikulärer Repräsentant universalisiert wird. Bezieht man den kritischen Schritt auf die Formulierung von UE unter [46], dann resultieren folgende Entsprechungen: ’z=2’ entspricht Γ und ist überdies einziges Element von X, ’z’ bzw. ’z’ entsprechen ξ bzw. β, ’z=2’ korrespondiert Δ und [’z’, ’z’, ’z=2’] also ’z=2’, entspricht [β, ξ, Δ].

(iii) Die PB enthält die Bestimmung, daß der Parameter β nicht Teilterm einer Aussage $A \in Y$ sein darf, also nicht Teilterm einer Aussage, von der Γ abhängt. Man betrachte den folgenden Schluß:

[61]	1	Da	$\bigvee x\, x = 2 \wedge \bigvee x \neg x = 2$
	2	Also	$\bigvee x\, x = 2$
	3	Sei$_1$	$z = 2$
	4	Also	$\bigvee x \neg x = 2$
	5	Sei$_2$	$\neg z = 2$
	6	Also$_{1,2}$	$z = 2 \wedge \neg z = 2$
	7	Also$_{1,2}$	$\bigvee x\, (x = 2 \wedge \neg x = 2)$
	8	Also$_1$	$\bigvee x\, (x = 2 \wedge \neg x = 2)$
	9	Also	$\bigvee x\, (x = 2 \wedge \neg x = 2)$

Ausgangspunkt ist eine arithmetische Wahrheit, Endpunkt eine logische Falschheit. Der unzulässige Schritt ist in 8 vollzogen. Die Entsprechung von Beispiel und Regelformulierung für den Schritt 8: ’$\bigvee x(x{=}2 \wedge \neg x{=}2)$’ entspricht Γ, ’$\bigvee x \neg x{=}2$’ korrespondiert $\bigvee \xi \Delta$, wobei ’x’ ξ und ’$\neg x{=}2$’ Δ korrespondiert. Y umfaßt ’z=2’ und ’ $\neg$z=2’, [β, ξ, Δ] ist durch [’z’, ’x’, ’$\neg x{=}2$’], also ’$\neg$z=2’, realisiert. Die Regel schließt ’z=2’ in der Abhängigkeitenklasse aus. Sie verhindert dadurch, daß zweimal derselbe Parameter gewählt wird. Inhaltlich: Repräsentiert ein Individuum schon den Sachverhalt, mit 2 identisch zu sein, dann darf es nicht noch zusätzlich die ganz andere Eigenschaft repräsentieren, von 2 verschieden zu sein. Bei Iterierungen von PB ist also stets ein neuer Parameter zu wählen.

(iv) Die PB verlangt ferner, daß der Parameter β nicht Teilterm der Konklusion Γ sein darf:

[62]	1	Da	$\bigwedge x\ (x = 2 \rightarrow \text{Primzahl}(x))$
	2	Da	$\bigvee x\ x = 2$
	3	Sei_1	$x = 2$
	4	Also	$x = 2 \rightarrow \text{Primzahl}(x)$
	5	Also_1	$\text{Primzahl}(x)$
↯	6	Also	$\text{Primzahl}(x)$
	7	Also	$\bigwedge x\ \text{Primzahl}(x)$

Im Ausgang von zwei Wahrheiten wurde eine arithmetische Falschheit erschlossen, indem die PB >zu früh< vollzogen worden ist: Eine Aussage mit nur partikular repräsentierendem Parameter wurde dadurch für die UB freigegeben. Die Aussage ’Primzahl(x)’ entspricht dabei Γ. – Regelgemäß ist, anbei bemerkt, die Universalbeseitigung in Schritt 4: Was für alle gilt, gilt auch für das Gebilde, das vorübergehend die Eigenschaft, mit 2 identisch zu sein, repräsentiert.

(v) Schließlich fordert PB, daß der Parameter β nicht schon in der Formel Δ vorhanden sein darf, was wiederum der Idee der partikulären Repräsentation widerspräche; Beispiel:

[63]	1	Da	$\bigwedge x \bigvee y \neg x = y$
	2	Also	$\bigvee y \neg x = y$
	3	Sei_1	$\neg x = x$
	4	Also_1	$\bigvee x \neg x = x$
↯	5	Also	$\bigvee x \neg x = x$

Es bestehen folgende Entsprechungen:

[63]+	1	ξ	'y'
	2	β	'x'
	3	Δ	'$\neg$ x = y'
	4	$\bigvee\xi\Delta$	'$\bigvee y \neg$ x = y'
	5	[β, ξ, Δ]	['x', 'y', '$\neg$ x = y']
	6	Γ	'$\bigvee x \neg x = x$'
	7	Y	{$\neg$ x = x}

x repräsentiert bereits eine Eigenschaft, nämlich die Eigenschaft, mit wenigstens einem *y* nicht identisch zu sein, und kann deshalb nicht noch zusätzlich partikuläre Repräsentationsaufgaben übernehmen, also die spezielle Eigenschaft repräsentieren, mit x nicht identisch zu sein. Auch in diesem Falle ist stets ein neuer Parameter für die Bildung der Ersatzannahme zu wählen.

Ü12 Untersuchen und kritisieren Sie folgende Argumentationen, indem Sie aufzeigen, inwiefern sie gegen die Quantorenregeln verstoßen:

a) Es-gilt $\bigvee x$ (Gerade-Zahl(x) $\wedge$ Ungerade-Zahl(x))

Da $\bigvee x$ Gerade-Zahl(x)

Da $\bigvee u$ Ungerade-Zahl(u)

Sei$_1$ Gerade-Zahl(w)

Sei$_2$ Ungerade-Zahl(w)

Also$_{1,2}$ Gerade-Zahl(w) $\wedge$ Ungerade-Zahl(w)

Also$_{1,2}$ $\bigvee x$ (Gerade-Zahl(x) $\wedge$ Ungerade-Zahl(x))

Also$_1$ $\bigvee x$ (Gerade-Zahl(x) $\wedge$ Ungerade-Zahl(x))

Also $\bigvee x$ (Gerade-Zahl(x) $\wedge$ Ungerade-Zahl(x))

b) Es-gilt $\bigvee x$ Gerade-Zahl(x) $\rightarrow$ $\bigwedge x$ Gerade-Zahl(x)

Sei$_1$ $\bigvee x$ Gerade-Zahl(x)

Sei$_2$ Gerade-Zahl(w)

Also$_2$ $\bigwedge x$ Gerade-Zahl(x)

Also$_1$ $\bigwedge x$ Gerade-Zahl(x)

Also $\bigvee x$ Gerade-Zahl(x) $\rightarrow \bigwedge x$ Gerade-Zahl(x)

c) Es-gilt $\bigvee z \bigwedge x\ x = z$

Also u = u

Also $\bigwedge x\ x = \mathrm{u}$

Also $\bigvee z \bigwedge x\ x = z$

d) Es-gilt $\bigvee y\ (y > 2 \wedge \neg\ y > 2)$

Da $\bigvee y\ y > 2$

Sei$_1$ $1 > 2$

Da $\neg\ 1 > 2$

Also$_1$ $1 > 2 \wedge \neg\ 1 > 2$

Also$_1$ $\bigvee y\ (y > 2 \wedge \neg\ y > 2)$

Also $\bigvee y\ (y > 2 \wedge \neg\ y > 2)$

e) Setzen Sie in den Beweisen [44], [47], [48], [49], [53], [56], [58] die erforderlichen Parameterbedingungen in die Kommentarspalte!

4.4. Regeln für den Identitätsprädikator

Zur Erinnerung: Das Identitätszeichen '..=..' bzw. '=(..,..)' ist ein zweistelliger, termbestimmender und formelerzeugender Operator, also ein zweistelliger Prädikator. Die Anwendung des Identitätsprädikators '..=..' auf Terme θ_1, θ_2 führt zu Identitätsformeln $\theta_1 = \theta_2$. Handelt es sich bei θ_1, θ_2 um geschlossene Terme, dann liegt eine Identitätsaussage bzw. eine geschlossene Identitätsformel vor.

Anzugeben ist nun, unter welchen Bedingungen auf eine Identitätsaussage geschlossen werden darf, und was aus einer Identitätsaussage (und gegebenenfalls weiteren Prämissen) gefolgert werden kann. Die Einführungsregel erlaubt, auf die Identität eines Gegenstandes mit sich selbst zu schließen, also auf eine Aussage $\theta = \theta$; dieser Schluß ist an keine Bedingung geknüpft, mithin prämissenfrei. Die Beseitigungsregel gestattet, aus einer Identität θ_1=θ_2 und der Tatsache, daß die θ_1-Entität eine Δ-Eigenschaft hat, also aus [θ_1, ξ, Δ], zu folgern, daß auch θ_2 die Δ-Eigenschaft besitzt, also [θ_2, ξ, Δ]. – Zum Verständnis beider Schlußlizenzen kann eine Orientierung am gebrauchssprachlichen '..ist identisch mit..' und seinen Synonymen hilfreich sein.

Die Schlußfigur für die Identitätseinführung ist denkbar einfach:

[64] Also $\theta = \theta$

Es sind weder Prämissen noch Abhängigkeiten vorhanden. Die Regel der Identitätseinführung (=IE) lautet entsprechend:

[65] Man darf in Abhängigkeit von 0 eine Identitätsaussage der Form $\theta = \theta$ folgern.

Die Identität beliebiger Gegenstände mit sich selbst gibt es nach IE demzufolge >gratis<. Dieser Umstand wird durch die Totalreflexivität der Identität ausdrücklich gemacht:

[66]	0	Es-gilt	$\bigwedge x\ x = x$	
	1	Also	$x = x$	| IE
	2	Also	$\bigwedge x\ x = x$	| UE; 1

Die Identitätsbeseitigung artikuliert die Intuition, daß, ungenau gesprochen, Identische ihre Eigenschaften teilen. Ist 5 identisch mit 3+2 und ist 5 eine Primzahl, dann eben auch 3+2. Ist Jesse James ein Verbrecher und Mr. Smith niemand anders als Jesse James, dann ist auch Mr. Smith ein Verbrecher. Die Schlußfigur zu diesen Instanzen hat folgende Gestalt:

[67]	Ξ_X	$\theta_1 = \theta_2$
	Ξ_Y	$[\theta_1, \xi, \Delta]$
	$\text{Also}_{X \cup Y}$	$[\theta_2, \xi, \Delta]$

Die Identitätsaussage ist die Hauptprämisse, die Δ-Aussage stellt die Nebenprämisse dar. Der Schluß führt die Abhängigkeiten der beiden Prämissen zusammen. – Die Regel der Identitätsbeseitigung (=IB) lautet:

[68] Wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse X die Identitätsaussage aus θ_1 und θ_2 gewonnen hat und wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse Y das Ergebnis der Substitution von θ_1 für ξ in eine Formel Δ, in der höchstens ξ frei ist, gewonnen hat, dann darf man in Abhängigkeit von $X \cup Y$ das Ergebnis der Substitution von θ_2 für ξ in Δ folgern.

Der Beweis der folgenden Aussagen macht mit dem vorgestellten Regelpaar und ihrem Zusammenspiel vertraut. Zunächst gilt die Identität in beide Richtungen:

[69]	0	Es-gilt	$\bigwedge x \bigwedge y\ (x = y \rightarrow y = x)$	
	1	Sei$_1$	x = y	
	2	Also	x = x	| IE
	3	Also$_1$	y = x	| IB; 1,2
	4	Also	x = y $\rightarrow$ y = x	| SE; 3
	5	Also	$\bigwedge y$ (x = $y \rightarrow y$ = x)	| UE ; 4
	6	Also	$\bigwedge x \bigwedge y\ (x = y \rightarrow y = x)$	| UE ; 5

Die Schritte 1 und 4 bis 6 sind bekannt und bedürfen als nun geläufige Routine keines Kommentars. Im Schritt 2 wird nach IE 'x=x' gefolgert. Als Formel Δ fungiert '*u*=x'. θ_1 wird durch 'x' und θ_2 durch 'y' instanziiert. Dann ist ['x', '*u*', '*u*=x'], also 'x=x' Instanz von [θ_1, ξ, Δ], ['y', '*u*', '*u*=x'], also 'y=x' ist Instanz von [θ_2, ξ, Δ] und 'x=y' ist Instanz für das Schema θ_1=θ_2. Das Besondere an diesem Schluß besteht darin, daß die Δ-Aussage ihrerseits eine Identitätsaussage ist. Informell würde man die soeben bewiesene Symmetrie der Identität so begründen: Sei x identisch mit y. Nun hat x wie jedes Gebilde die Eigenschaft, mit sich identisch zu sein; also ist auch y identisch mit x.

Die folgende Aussage hält die Transitivität der Identität fest: Ist eine Gegebenheit identisch mit einer Gegebenheit, die ihrerseits mit einer Gegebenheit identisch ist, dann ist auch die erst- mit der letztgenannten identisch:

[70]	0	Es-gilt	$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z\ (x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$	
	1	Sei$_1$	x = y $\wedge$ y = z	
	2	Also$_1$	x = y	| KB; 1
	3	Also$_1$	y = z	| KB; 1
	4	Also$_1$	x = z	| IB; 2,3
	5	Also	x = y $\wedge$ y = z $\rightarrow$ x = z	| SE; 4
	6	Also	$\bigwedge z$ (x = y $\wedge$ y = $z \rightarrow$ x = z)	| UE; 5
	7	Also	$\bigwedge y \bigwedge z$ (x = $y \wedge y = z \rightarrow$ x = z)	| UE; 6
	8	Also	$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z\ (x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$	| UE; 7

Der entscheidende Schritt wird in Zeile 4 vollzogen; für den Beweis der Transitivität wird IE nicht benötigt. Totalreflexive, symmetrische und transitive zweistellige Prädikatoren bzw. – material gesprochen – Relationen werden als totale Gleichheitsprädikatoren bzw. als totale Gleichheiten geführt. Sie lassen sich auch mit einer Aussage charakterisieren, die für die Identität so lautet:

[71]	0	Es-gilt	$\bigwedge x \bigwedge y\ (x = y \leftrightarrow \bigwedge z\ (x = z \leftrightarrow y = z))$	
	1	Sei_1	x = y	
	2	Sei_2	x = z	
	3	$\text{Also}_{1,2}$	y = z	| IB; 1,2
	4	Sei_3	y = z	
	5	$\text{Also}_{1,3}$	x = z	| IB; 1,4
	6	Also_1	$x = z \leftrightarrow y = z$	| BE; 3,5
	7	Also_1	$\bigwedge z\ (x = z \leftrightarrow y = z)$	| UE; 6
	8	Sei_4	$\bigwedge z\ (x = z \leftrightarrow y = z)$	
	9	Also_4	$x = y \leftrightarrow y = y$	| UB ; 8
	10	Also	y = y	| IE
	11	Also_4	x = y	| BB; 9,10
	12	Also	$x = y \leftrightarrow \bigwedge z\ (x = z \leftrightarrow y = z)$	| BE; 7,11
	13	Also	$\bigwedge y\ (x = y \leftrightarrow \bigwedge z\ (x = z \leftrightarrow y = z))$	| UE; 12
	14	Also	$\bigwedge x \bigwedge y\ (x = y \leftrightarrow \bigwedge z\ (x = z \leftrightarrow y = z))$	| UE; 13

Die hier interessierenden Folgerungen werden in den Zeilen 3,5 und 10 vollzogen. Für den Weg von links nach rechts benötigt man IB, für den umgekehrten Weg kommt man mit IE aus.

Zuletzt sei noch ein Theoremschema erörtert: Wenn ein θ-Gegenstand die Eigenschaft Δ hat, dann gibt es eine Gegebenheit ξ, die mit θ identisch ist und die die Δ-Eigenschaft hat. Auch die Umkehrung gilt. Jesse James ist also genau dann ein Ehrenmann, wenn es eine mit Jesse James identische Gegebenheit gibt, die ein Ehrenmann ist. – In der folgenden Formulierung präsentiert Δ wiederum eine Formel, in der höchsten ξ frei ist:

[72]	0	Es-gilt	$[\theta, \xi, \Delta] \leftrightarrow \bigvee\xi\ (\xi = \theta \wedge \Delta)$	
	1	Sei$_1$	$[\theta, \xi, \Delta]$	
	2	Also	$\theta = \theta$	|IE
	3	Also$_1$	$\theta = \theta \wedge [\theta, \xi, \Delta]$	|KE; 1,2
	4	Also$_1$	$\bigvee\xi\ (\xi = \theta \wedge \Delta)$	|PE; 3
	5	Sei$_2$	$\bigvee\xi\ (\xi = \theta \wedge \Delta)$	
	6	Sei$_3$	$\beta = \theta \wedge [\beta, \xi, \Delta]$	
	7	Also$_3$	$\beta = \theta$	|KB; 6
	8	Also$_3$	$[\beta, \xi, \Delta]$	|KB; 6
	9	Also$_3$	$[\theta, \xi, \Delta]$	|IB; 7,8
	10	Also$_2$	$[\theta, \xi, \Delta]$	|PB; 5,9
	11	Also	$[\theta, \xi, \Delta] \leftrightarrow \bigvee\xi\ (\xi = \theta \wedge \Delta)$	|BE; 4,10

In diesem Beweis ist zu beachten, daß β nicht Teilterm von Δ ist. – Der Umgang mit den Identitätsregeln wird durch folgende Übungen vertieft:

Ü13 Beweisen Sie:

a) $\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z\ (x = y \wedge x = z \Rightarrow y = z)$

b) $\bigwedge x \bigwedge y\ (x = y \leftrightarrow \bigvee z\ (x = z \wedge z = y))$

c) $[\theta, \xi, \Delta] \leftrightarrow \bigwedge\xi\ (\xi = \theta \rightarrow \Delta)$; dabei sei θ geschlossener Term und Δ Formel, in der höchstens ξ frei ist.

IE gibt den extrem kurzen, da prämissen- und abhängigkeitenfreien Weg vor, um eine Wahrheit zu folgern. IB eröffnet die Möglichkeit zum >Eigenschaftentransfer<: Aus der Identität zwischen θ_1 und θ_2 und der Tatsache, daß θ_1 Δ ist, kann man auf den Umstand schließen, daß θ_2 ebenfalls Δ ist. Geschieht dies frei von Abhängigkeiten, dann ist wiederum wahr, daß θ_2 ein Δ-Ding ist. Insofern umreißt IB die Rolle der Identität als Wahrheitsbasis.

Anmerkung: Die Identität wird normalerweise mit dem üblicherweise LEIBNIZ zugeschriebenen Ununterscheidbarkeitsgedanken verbunden: Identisch ist, was in allen Eigenschaften übereinkommt, sich also nicht unterscheiden läßt. Das läßt sich z.B. in Sprachen zweiter Stufe ausdrücken (↑3.[19]). Für Sprachen erster Stufe mit den hier

gegebenen Regeln ist jedoch ein analoges Metatheorem formulierbar: Die Identität zwischen θ_1 und θ_2 ist genau dann beweisbar, wenn beweisbar ist, daß θ_1 und θ_2 in allen Eigenschaften Δ übereinkommen. Sei beweisbar, daß $\theta_1=\theta_2$. Gelte ferner $[\theta_1, \xi, \Delta]$. Mit IB gilt dann $[\theta_2, \xi, \Delta]$. Die Umkehrung ergibt sich analog; beide Betrachtungen gelten für beliebiges Δ. – Sei umgekehrt beweisbar, daß $[\theta_1, \xi, \Delta]\leftrightarrow[\theta_2, \xi, \Delta]$ für beliebiges Δ, also auch für die Eigenschaft, mit θ_2 identisch zu sein. Dann gilt insbesondere $\theta_1=\theta_2\leftrightarrow\theta_2=\theta_2$. Mit IE ist $\theta_2=\theta_2$, also ist auch $\theta_1=\theta_2$ beweisbar.

Anhand der Ununterscheidbarkeitsidee kann man sich auch verdeutlichen, warum der Identitätsprädikator zu den logischen Konstanten gerechnet wird: Er fügt den Prädikatoren und ihren Verknüpfungsmöglichkeiten, d.h. dem Unterscheidungspotential einer Sprache, nichts Neues hinzu, sondern faßt diese lediglich zusammen.

4.5. Das Regelwerk im Überblick

Im Vortext konnten die Kernoperatoren dadurch mit Bedeutung versorgt werden, daß die Einführungs- und die Beseitigungsfrage beantwortet wurde: Bei welcher Diskurslage darf man auf eine Aussage schließen, deren Hauptoperator der jeweils zu regulierende Redeteil ist? Was darf man aus einer derartigen Aussage (und gegebenenfalls weiteren Prämissen) schließen?

Der intuitive Kern dieser Reglementierungsvorschläge läßt sich so formulieren: Man darf auf eine Subjunktion $A\rightarrow B$ schließen, wenn man B in Abhängigkeit von A gewonnen hat. Hat man umgekehrt $A\rightarrow B$ und das Antezedens A gewonnen, dann darf man auf das Sukzedens B schließen. – Hat man Aussagen A, B gewonnen, dann darf man die Konjunktion aus A und B folgern. Umgekehrt darf man aus einer Konjunktion jedes ihrer Konjunkte folgern. – Hat man eine Aussage A in Abhängigkeit von einer Aussage B gewonnen und umgekehrt, dann darf man auf die Bisubjunktion $A\leftrightarrow B$ schließen. Ist umgekehrt die Bisubjunktion $A\leftrightarrow B$ und eines der Bisubjunkte verfügbar, dann darf man auf das jeweils andere Bisubjunkt schließen. – Man darf aus jeder Aussage A auf die Adjunktion dieser Aussage und einer beliebigen Aussage B schließen. Umgekehrt darf man aus einer Aussage $A\vee B$ all das schließen, was aus jedem der beiden Adjunkte folgt. – Hat man eine Aussage Γ und ihre Negation $\neg\Gamma$ gewonnen, dann darf man eine ihrer >Ursachen<, also eine der Aussagen, von denen Γ und $\neg\Gamma$ abhängen, negieren. Aus der doppelten Negation einer Aussage darf man die Aussage selbst folgern.

Hat man für einen repräsentativen Fall gezeigt, daß die Eigenschaft Δ zutrifft, so darf man auf die Universalquantifikation von Δ schließen. Umgekehrt darf man aus einer Universalquantifikation auf jede singuläre Instanz schließen. – Trifft Δ auf einen singulären Gegenstand zu, dann darf man auf die Partikularquantifikation von Δ schließen. Aus einer Partikularquantifikation darf man folgern, was aus ihrer repräsentativen Annahme folgt.

Man darf ohne Prämissen auf die Identität eines Gegenstands mit sich selbst schließen. Ist ein Gegenstand mit einem Gegenstand identisch und besitzt der erstgenannte die Δ-Eigenschaft, dann darf man daraus schließen, daß auch der zweitgenannte die Δ-Eigenschaft besitzt. – Die Schlußfiguren und die ausführlichen Regelformulierungen lesen sich auf einen Blick so:

[73] <u>Die Subjunktoreinführung (SE)</u>:

Sei	A	
...	...	
Also$_X$	B	, wobei $\mathrm{A} \in X$
Also$_{X\setminus\{\mathrm{A}\}}$	$\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$	

Wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse X mit $\mathrm{A} \in X$ eine Aussage B gewonnen hat, dann darf man in Abhängigkeit von $X\setminus\{\mathrm{A}\}$ die Subjunktion aus A und B folgern.

<u>Die Subjunktorbeseitigung (SB)</u>:

Ξ_X	$\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$
Ξ_Y	A
Also$_{X\cup Y}$	B

Wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse X die Subjunktion aus einer Aussage A und einer Aussage B gewonnen hat und wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse Y die Aussage A gewonnen hat, dann darf man in Abhängigkeit von $X\cup Y$ die Aussage B folgern.

<u>Die Konjunktoreinführung (KE)</u>:

Ξ_X	A
Ξ_Y	B
Also$_{X\cup Y}$	$\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$

Wenn man eine Aussage A in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse X und eine Aussage B in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse Y gewonnen hat, dann darf man die Konjunktion aus A und B in Abhängigkeit von $X \cup Y$ folgern.

Die Konjunktorbeseitigung (KB):

Ξ_X	$A \wedge B$
Also_X	A
Also_X	B

Wenn man die Konjunktion aus einer Aussage A und einer Aussage B in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse X gewonnen hat, dann darf man sowohl A als auch B in Abhängigkeit von X folgern.

Die Bisubjunktoreinführung (BE):

Sei	A	
...	...	
Also_X	B	, wobei $A \in X$
Sei	B	
...	...	
Also_Y	A	, wobei $B \in Y$
$\text{Also}_{(X\setminus\{A\})\cup(Y\setminus\{B\})}$	$A \leftrightarrow B$	

Wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse X, wobei eine Aussage $A \in X$, eine Aussage B gewonnen hat, wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse Y, wobei eine Aussage $B \in Y$, eine Aussage A gewonnen hat, dann darf man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse $(X\setminus\{A\})\cup(Y\setminus\{B\})$ die Bisubjunktion aus A und B folgern.

Die Bisubjunktorbeseitigung (BB):

Ξ_X $A \leftrightarrow B$

Ξ_Y	A		Ξ_Y	B
$\text{Also}_{X\cup Y}$	B		$\text{Also}_{X\cup Y}$	A

Wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse X die Bisubjunktion aus einer Aussage A und einer Aussage B gewonnen hat, wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse Y das linke bzw. das rechte Bisubjunkt, also A bzw. B, gewonnen hat, dann darf man in Abhängigkeit von $X \cup Y$ das rechte bzw. linke Bisubjunkt, also B bzw. A, folgern.

<u>Die Adjunktoreinführung (AE)</u>:

Ξ_X A

Also$_X$ $\mathrm{A} \vee \mathrm{B}$ Also$_X$ $\mathrm{B} \vee \mathrm{A}$

Wenn man eine Aussage A in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse X gewonnen hat, dann darf man sowohl die Adjunktion aus A und einer beliebigen Aussage B als auch die Adjunktion aus B und A in Abhängigkeit von X folgern.

<u>Die Adjunktorbeseitigung (AB)</u>:

Ξ_X	$\mathrm{A} \vee \mathrm{B}$	
Sei	A	
...	...	
Also$_Y$	Δ	, wobei $\mathrm{A} \in Y$
Sei	B	
...	...	
Also$_Z$	Δ	, wobei $\mathrm{B} \in Z$
Also$_{X \cup (Y \setminus \{\mathrm{A}\}) \cup (Z \setminus \{\mathrm{B}\})}$	Δ	

Wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse X die Adjunktion einer Aussage A und einer Aussage B gewonnen hat, wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse Y, wobei $\mathrm{A} \in Y$, eine Aussage Δ und in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse Z, wobei $\mathrm{B} \in Z$, ebenfalls Δ gewonnen hat, dann darf man in Abhängigkeit von $X \cup (Y \setminus \{\mathrm{A}\}) \cup (Z \setminus \{\mathrm{B}\})$ die Aussage Δ folgern.

Die Negatoreinführung (NE):

Ξ_X Δ

Ξ_Y $\neg\,\Delta$, wobei $\mathrm{A} \in X \cup Y$

$\mathrm{Also}_{(X\cup Y)\setminus\{\mathrm{A}\}}$ $\neg\,\mathrm{A}$

Wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse X eine Aussage Δ gewonnen hat und in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse Y die Negation von Δ gewonnen hat, wobei eine Aussage $\mathrm{A}\in X\cup Y$, dann darf man in Abhängigkeit von $(X\cup Y)\setminus\{\mathrm{A}\}$ die Negation von A folgern.

Die Negatorbeseitigung (NB):

Ξ_X $\neg\neg\,\Delta$

Also_X Δ

Wenn man die Negation der Negation einer Aussage Δ in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse X gewonnen hat, dann darf man Δ in Abhängigkeit von X folgern.

Die Universalquantoreinführung (UE):

Ξ_X $[\beta, \xi, \Delta]$, wobei β weder Teilterm von Δ noch Teilterm einer Aussage $\Gamma \in X$ ist.

Also_X $\bigwedge\xi\Delta$

Wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse X das Ergebnis der Substitution eines Parameters β für eine Variable ξ in einer Formel Δ, in der höchstens ξ frei ist, gewonnen hat, wobei β weder Teilterm von Δ noch Teilterm einer Aussage $\Gamma\in X$ ist, dann darf man die Universalquantifikation von Δ bezüglich ξ in Abhängigkeit von X folgern.

Die Universalquantorbeseitigung (UB):

Ξ_X $\bigwedge\xi\Delta$

Also_X $[\theta, \xi, \Delta]$

Wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse X die Universalquantifikation einer Formel Δ bezüglich ξ gewonnen hat, dann darf man in Abhängigkeit von X das Ergebnis der Substitution eines geschlossenen Terms θ für ξ in Δ folgern.

Die Partikularquantoreinführung (PE):

Ξ_X $[\theta, \xi, \Delta]$

Also_X $\bigvee\xi\Delta$

Wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse *X* das Ergebnis der Substitution eines geschlossenen Terms θ für eine Variable ξ in einer Formel Δ, in der höchstens ξ frei ist, gewonnen hat, dann darf man in Abhängigkeit von *X* die Partikularquantifikation von Δ bezüglich ξ folgern.

Die Partikularquantorbeseitigung (PB):

Ξ_X $\bigvee\xi\Delta$

Sei_k $[\beta, \xi\ \Delta]$

… …

Also_Y Γ ,wobei $[\beta, \xi\ \Delta] \in Y$ + Kautelen

$\text{Also}_{X\cup(Y\setminus\{[\beta,\ \xi\ \Delta]\})}$ Γ

Wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse *X* die Partikularquantifikation von Δ bezüglich ξ gewonnen hat und wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse *Y* eine Aussage Γ gewonnen hat, wobei das Ergebnis der Substitution des Parameters β für ξ in Δ Element von *Y* ist und β nicht Teilterm eines $A\in(Y\setminus\{[\beta,\xi,\Delta]\})\cup\{\Delta,\Gamma\}$ ist, dann darf man in Abhängigkeit von $X\cup(Y\setminus\{[\beta,\xi,\Delta]\})$ die Aussage Γ folgern.

Die Identitätseinführung (IE):

Also $\theta = \theta$

Man darf in Abhängigkeit von 0 eine Identitätsaussage der Form $\theta=\theta$ folgern.

Die Identitätsbeseitigung (IB):

Ξ_X $\theta_1 = \theta_2$

Ξ_Y $[\theta_1, \xi, \Delta]$

$\text{Also}_{X\cup Y}$ $[\theta_2, \xi, \Delta]$

Wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse *X* die Identitätsaussage aus θ_1 und θ_2 gewonnen hat und wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse *Y* das

Ergebnis der Substitution von θ_1 für ξ in eine Formel Δ, in der höchstens ξ frei ist, gewonnen hat, dann darf man in Abhängigkeit von $X \cup Y$ das Ergebnis der Substitution von θ_2 für ξ in Δ folgern.

Die Regelformulierungen unterliegen einigen Prinzipien: Zufolge des Formalitätsprinzips wird auf die materiale Eigenart der jeweils beteiligten Formeln kein Bezug genommen; die angebotenen Regeln gelten für physikalische und theologische, für psychologische und juristische usf. Kontexte. Zufolge des Kategorizitätsprinzips sind die Festlegungen eindeutig zu halten: Werden zwei Operatoren über dasselbe Regelpaar fixiert, dann sollen diese Fixierungen gleichwertig sein. Nach dem Separiertheitsprinzip wird jeder Operator für sich festgelegt: Bei keiner Festlegung wird zurück- oder vorgegriffen auf schon festgelegte oder noch festzulegende Operatoren. – Weitere Prinzipien betreffen das Verhältnis von Einführungs- und Beseitigungsregeln und sind im Kontext des Logischen Pluralismus (↑5.) anzudeuten.

Die vorgelegten Regeln lassen sich nach der jeweiligen Prämissenanzahl sortieren: IE ist die einzige prämissenfreie Regel, alle übrigen sind prämissenführend. Unter den prämissenführenden Regeln sind einprämissige wie etwa SE oder PE, zweiprämissige wie SB oder IB und dreiprämissige wie AB zu unterscheiden. – Bezüglich der Beseitigungsregeln kann bei den mehrprämissigen die Hauptprämisse (mit den zu beseitigenden Zeichen als Hauptoperator) von der oder – im Falle von AB – den Nebenprämissen unterschieden werden.

Die erörterten Regeln sind schließlich unterscheidbar danach, ob mit dem Folgerungsschritt Abhängigkeiten getilgt werden oder nicht. Abhängigkeitentilgende Regeln sind SE, BE, AB, NE, PB. Das Schließen aus und auf Konjunktionen und Universalquantifikationen bietet keine Tilgungsmöglichkeiten.

Die logischen Regeln sind Musterbeispiele für Wortverwendungsregeln. Sie legen gemeinsam die (korrekte) Verwendung des Folgerungsperformators fest. Die einzelnen Regelpaare fixieren zusätzlich die Bedeutung des jeweiligen Operators. – Die Regelformulierung ist so gehalten, daß nicht auf die gerade gewählte Zeichengestalt abgestellt wird: Es spielt also keine Rolle, ob man nun gerade ’Also__’ für den Folgerungsperformator oder ’__→__’ als Subjunktor wählt. Es muß beim Aufbau einer konkreten Sprache eben nur in unverwechselbarer Weise festgelegt sein, welcher Ausdruck wofür gebraucht wird. Auch die Stenonamen wie ’SB’ oder ’KE’ stellen nicht – wie ’→B’ oder ’∧E’ – auf die gerade gewählte optische Realisierung ab.

4.6. Literatur

Gentzen, G.: Untersuchungen über das logische Schließen; in: Mathematische Zeitschrift 39 (1934), S. 176-210 und 405-431; Wiederabdruck Darmstadt 1974.

Dieser philosophische und mathematische Klassiker entwickelt u.a. erstmals die Methode des natürlichen Schließens (und zwar in der Form des Baumkalküls). Er ist interessant sowohl aus historischen wie auch aus philosophischen Gründen, dürfte aber insgesamt nur dem philosophisch und mathematisch vorgebildetem Leser zugänglich sein. Im II. Abschnitt finden sich jedoch auch die dem Anfänger offenen grundsätzlichen Überlegungen zum natürlichen Schließen.

Hinst, P.: Pragmatische Regeln des logischen Argumentierens; in: Gethmann, C.F. (Hg.): Logik und Pragmatik; Frankfurt/Main 1982, S. 199-215.

Hinst bietet die erste Fassung der vorangehend benutzten Formatierung des logischen Schließens, die eine performativ explizite lineare Variante des Gentzenschen Kalküls des natürlichen Schließens darstellt. Zugleich enthält der Essay Hinweise zum sprachphilosophischen Hintergrund und zur Einbettung des Schließens in andere kognitive Redehandlungen in wissenschaftlichen Zusammenhängen; ein auch für den Anfänger gut lesbarer Text.

Lemmon, E.J.: Beginning Logic, Indianapolis/Cambridge 1998 (ninth printing).

Lemmons Buch für den Start in ein logisch bewußtes Erkenntnisleben ist im angelsächsischen Raum <u>das</u> Werk zur Begleitung des elementaren Logikunterrichts. Der verwendete Kalkül ist dem hier favorisierten sehr nahe, macht jedoch die performative Seite (noch) nicht explizit. Der Text kann auch dem Anfänger zum Selbststudium empfohlen werden. Für ein solches Unternehmen sollte man auch den von George Schumm erarbeiteten „Companion to Lemmon's 'Beginning Logic'" heranziehen.

Siegwart, G.: Identität; in: Sandkühler, H.J. (Hg.): Enzyklopädie Philosophie, Bd.1; Hamburg 1999, S. 603-607.

Der Artikel entwickelt die verschiedenen Charakterisierungen der Identität und die hauptsächlichen philosophischen Probleme, zu denen dieser Redeteil Anlaß gibt.

Tennant, N.: Natural Logic, Edinburgh 1990[2].

Tennant entwickelt ein System des natürlichen Schließens unter Beachtung philosophischer Fragen der Bedeutungsgestaltung und verbindet das System mit modelltheoretischen Fragestellungen; für den fortgeschrittenen Anfänger geeignet; einschlägig sind die vier ersten Kapitel.

5. Folgerungsverhältnisse *197*

5.1 Der Folgerungsbegriff und verwandte Konzepte *198*

5.1.1 Folgerungsakt versus Folgerungsrelation: Die (meta)logische Perspektive *198*

5.1.2 Konsequenz – Äquivalenz – Determiniertheit *201*

5.1.3 Konsistenz – Verträglichkeit – Maximalkonsistenz *206*

5.1.4 (In)Konsistenz – Umgebende Unterscheidungen *211*

5.2 Verfahren der Diskursvereinfachung *218*

5.2.1 Die Non-Sequitur-Diagnose *218*

5.2.2 Diskursabkürzung: Anziehung – Zulässige Regeln *230*

5.3 Der Einzigkeitsquantor *236*

5.3.1 Zur Definition von Junktoren *236*

5.3.2 Die formelquantifizierende Rede im Überblick *239*

5.3.3 Mindestzahlquantoren und Höchstzahlquantoren *242*

5.3.4 Varianten der Einzigkeit *245*

Zusatz: Logischer Pluralismus *256*

5.4. Literatur *262*

„Und warum marschiert er nicht gleich morgens früh in einen Brunnen oder einen Abgrund, je nachdem, wie es sich eben so ergibt, sondern scheint sich doch davor in Acht zu nehmen, so als meine er (eben) nicht, daß das Hineinfallen gleichermaßen nicht gut und gut ist!?“

(Aristoteles)

5. Folgerungsverhältnisse

Das erste Kapitel erläutert Zweck und Programm einer philosophischen Vorschule: Was immer sonst Philosophie sein mag, sie macht in jedem Falle jene konzeptiv-diskursive Basisausrüstung verfügbar, die für eine erfolgreiche Absolvierung kognitiver Geschäfte aller Art (wenn nicht unentbehrlich, so doch) in hohem Maße hilfreich ist (1.). Die Bereitstellung der erwähnten Zurüstung wird eröffnet mit der Skizzierung des philosophischen Rahmenwerks: Die Konzepte von Redehandlung und Sprache, Wahrheit und Bedeutung finden kursorische Erläuterung (2.). Die eigentliche >Arbeit< setzt mit der Darstellung der Rationalen Grammatik ein: Im Zentrum steht die Grammatik von Sprachen erster Stufe, die atomaren Kategorien sowie die Prinzipien ihrer Zusammensetzung zu molekularen Gebilden (3.). Die grammatische Begrifflichkeit bleibt für alle weiteren Entwicklungen vorausgesetzt, auch und insbesondere für die sehr viel später dargelegte methodische Begriffsbildung(↑9.-11). Der vierte Schritt dient der Gestaltung der Annahme- und der Folgerungshandlung und damit der Regulierung der Junktoren, der Quantoren und des Identitätsprädikators. Verbunden damit ist eine elementare Unterweisung in der Technik des Argumentierens (4.).

Wer im Sinne der Grundregeln korrekt folgern kann, beherrscht damit noch keineswegs den Folgerungsbegriff und verwandte Konzepte wie etwa Konsistenz, Verträglichkeit, Entscheidbarkeit usf. Da jedoch auch diese Begriffe schon bei elementaren Verständigungen über konzeptiv-diskursive Problemlagen zum Einsatz kommen, sind sie in provisorischer Weise bereitzustellen und einzuüben (5.1). – Diskurse lassen sich in vielfacher Weise vereinfachen: So kann man durch eine Non-sequitur-Diagnose erkennen, daß jeder Ableitungsversuch scheitern wird, so kann man Beweise durch das Anziehen logisch-wahrer Aussagen, durch zulässige Regeln und durch Substitutionsregeln abkürzen (5.2). Mit Hilfe der bereitgestellten logischen Redemittel läßt sich der Einzigkeitsquantor definieren. Die zentrale Rolle der Einzigkeit für das Referieren veranlaßt eine detaillierte Erörterung (5.3). Ein Zusatz nimmt den gelegentlichen Hinweis auf, daß es zur hier vorgestellten und fortlaufend benutzten klassischen Logik Alternativen gibt. Vornehmlich die traditionelle Konkurrenz zur klassischen Logik, die minimale und die intuitionistische Logik, finden

Erörterung. – Literaturhinweise zur Metalogik und zur Philosophie der Logik leiten das weitere Studium an (5.4).

5.1 Der Folgerungsbegriff und verwandte Konzepte

Wer den vierten Teil erfolgreich absolviert hat, beherrscht im Prinzipiellen die Folgerungshandlung, das korrekte Schließen. Um sich über die Folgerungsverhältnisse zu verständigen, jene Beziehungen, die durch Vollzug des Schließens entstehen können, benötigt man indes nicht nur den Folgerungsperformator, sondern auch den Folgerungsprädikator '..folgt-aus..', der den Folgerungsbegriff ausdrückt. Zunächst ist über Beispiele der Unterschied und der Zusammenhang zwischen Folgerungsakt und Folgerungsrelation herauszustellen. Dabei wird zugleich die (meta)logische Perspektive eingerichtet (5.1.1). – Die beiden Anschlußschritte dienen der informellen Darstellung (meta)logischer Konzepte. Zunächst ist zu erläutern, was unter 'Konsequenz', 'Äquivalenz' und 'logischer (In)Determiniertheit' sowie angeschlossenen Begriffen zu verstehen ist (5.1.2). Sodann können die Begriffe der Konsistenz, Verträglichkeit und Maximalkonsistenz erläutert werden (5.1.3). Eine Reihe von Unterscheidungen, die zur Anwendung der Konsistenzbegrifflichkeit i.b. und der (meta)logischen Konzepte i.a. beitragen, findet abschließend Erläuterung (5.1.4).

Bei den vorgenommenen Etablierungen handelt es sich um informelle Darlegungen; auf die begriffliche Bearbeitung muß insoweit verzichtet werden, als die geeigneten (klassensprachlichen) Redemittel erst zu einem späteren Zeitpunkt (und auch dort nur) in Anfängen bereitgestellt werden (↑13.). Die Ausführungen zielen lediglich auf die durch exemplarische Vorführungen herbeigeführte intuitiv verläßliche Handhabung durch die Leserin.

5.1.1 Folgerungsakt versus Folgerungsrelation: Die (meta)logische Perspektive

Im Vollzug von Folgerungsakten ziehen wir aus gegebenen Aussagen Konsequenzen. In Betrachtung von Aussagenzusammenhängen untersuchen wir u.a., ob eine Aussage Konsequenz aus einer Aussagenklasse ist, ob Aussagenklassen harmonieren, ob eine Aussagenmenge konsistent ist, ob sie alle ihre Konsequenzen zum Element hat usf. Gefolgert wird auf allen Gebieten; mit Aussagenzusammenhängen befassen sich unter den gegebenen Rücksichten vornehmlich Logiker. Die damit angesprochenen Szenarien sind in ihrem Verhältnis anhand von zwei Beispielen zu erläutern.

Das erste Beispiel ist das wohlbekannte Rechts/Links-Szenario (↑1.1.3). Die dort gegebene Überlegung läßt sich mit den inzwischen entwickelten Mitteln z.B. so darstellen:

[1]	1	Da	A liegt links von B
	2	Da	A liegt rechts von B
	3	Da	$\bigwedge x \bigwedge y$ (x liegt rechts von $y \rightarrow \neg$ y liegt rechts von x)
	4	Also	$\bigwedge y$ (A liegt rechts von $y \rightarrow \neg$ y liegt rechts von A)
	5	Also	A liegt rechts von B $\rightarrow \neg$ B liegt rechts von A
	6	Also	$\neg$ B liegt rechts von A
	7	Da	$\bigwedge u \bigwedge w$ (u liegt rechts von $w \leftrightarrow w$ liegt links von u)
	8	Also	$\bigwedge w$ (B liegt rechts von $w \leftrightarrow w$ liegt links von B)
	9	Also	B liegt rechts von A $\leftrightarrow$ A liegt links von B
	10	Also	B liegt rechts von A
	11	Also	B liegt rechts von A $\wedge \neg$ B liegt rechts von A

In den Zeilen 4-6 und 8-11 werden Folgerungen gezogen, signalisiert durch den Folgerungsperformator 'Also__'. – Macht man nun den u.a. durch Folgerungsakte hergestellten Diskurs zum Gegenstand der Analyse, dann formuliert man z.B. folgende Zusammenhänge: In der Zeile 11 findet sich frei von <u>Abhängigkeiten</u> eine <u>Kontradiktion</u>. Da diese Aussage eine <u>Konsequenz</u> aus der Klasse der angezogenen Aussagen ist, ergibt sich, daß diese Klasse <u>inkonsistent</u> ist. Insofern <u>Konsistenz</u> eine notwendige Bedingung für Wahrheit darstellt, können nicht alle Elemente der <u>inkonsistenten</u> Aussagenklasse wahr sein. – Die unterstrichenen Redeteile sind (meta)logische Ausdrücke. Am Rande sei darauf aufmerksam gemacht, daß auch im (meta)logischen Kommentar angezogen und gefolgert wird: So signalisiert 'Da__' wie üblich das Anziehen und die Wendung 'ergibt sich__' markiert den Folgerungsakt. Das Folgern findet sich eben in <u>allen</u> Diskursen, damit aber auch in Diskursen über Diskurse.

Ü1 Liefern Sie einen Zeile-für-Zeile-Kommentar zu [1]!

Das zweite Beispiel artikuliert eine aus ethischen Grundkursen geläufige Variante des moralischen Relativismus. Es ist typisch für Texte dieses Genres.

[2] Since right and wrong are relative to culture, there's no duty that binds universally. What's wrong in one culture is right in another; universal obligations are a myth. Relativism should fill us with toleration toward other cultures. We can't say that we're right and they're wrong. So everyone ought to respect the values of others.

(GENSLER, H.J.: Formal Ethics, London/New York 1996, p. 15 (auch dort als Beispiel)).

In der Folge ist es nicht um Interpretation und Würdigung dieser Überlegung zu tun, sondern um die Thematisierung einiger Akte, die in einem derartigen Projekt jedenfalls zu vollziehen wären. – Zunächst erfolgen in [2] argumentative Handlungen, vornehmlich Anziehungen und Folgerungen. Man betrachte z.B. den ersten Satz (im Sinn der traditionellen Grammatik); die performative Analyse führt auf:

[3] Since Right and wrong are relative to culture

So There's no duty that binds universally

Jede umfassende Bewertung wird die Frage aufwerfen: Ist die Konklusion >tatsächlich< eine Konsequenz aus der Prämisse. In Beantwortung dieser Frage wird man die betrachtete Aussage zunächst formatieren. Das läßt sich für die Konklusion z.B. mit

[4] $\neg\bigvee x\,(\text{Duty}(x) \wedge \text{Binds-universally}(x))$

leicht durchführen. Gleichgültig wie man die Prämisse formatiert: Man hat in jedem Falle noch Aussagen hinzuzufügen, die die Rede von 'right' und 'wrong' mit den Prädikatkonstanten 'Duty(..)' und 'Binds-universally(..)' verbinden. Erst auf einer so verstärkten Prämissenbasis dürfte die angezielte Konsequenzrelation bestehen.

Ü2 Es dürfte im Geiste des erörterten Textes sein, die Aussage '$\neg\bigvee x(\text{Duty}(x)\wedge\text{Binds-universally}(x))$' mit Hilfe der Aussagen '$\bigwedge x(\text{Duty}(x)\rightarrow\bigvee y(\text{Culture}(y)\wedge\text{Relative-to}(x,y)))$' und '$\bigwedge x\bigwedge y(\text{Culture}(x)\wedge\text{Relative-to}(y,x)\rightarrow\neg\text{Binds-universally}(y))$' zu begründen. Führen Sie eine solche Begründung durch!

Die Lektüre des Textes zeitigt unmittelbar einen Inkonsistenzverdacht: Steht nicht der letzte Satz bzw. dessen Aussage im Widerspruch zu [4]? Die Tatsache, daß es keine universal bindenden Pflichten gibt, reimt sich nicht zusammen damit, daß jedermann die Werte der anderen respektieren soll – was offenkundig eine universal bindende Pflicht ist. Formatiert man die letzte Aussage, dann ergibt sich mit einigen naheliegenden Manipulationen:

[5] $\bigwedge z\bigwedge x\bigwedge y\,(\text{Person}(x) \wedge \text{Person}(y) \wedge x \neq y \wedge \text{Value-of}(z,y) \rightarrow \text{Ought-to-respect}(x,z))$

[4] und [5] bilden ersichtlich keine Kontradiktion. Um die in [2] mitgeteilte Aussagenklasse als inkonsistent qualifizieren zu können und so das unabweisbare Inkonsistenzgefühl begrifflich zu fassen, muß man eine Hinzufügung vornehmen, z.B.:

[6] $(\bigwedge z \bigwedge x \bigwedge y\ (\text{Person}(x) \wedge \text{Person}(y) \wedge x \neq y \wedge \text{Value-of}(z,y) \rightarrow \text{Ought-to-respect}(x,z))) \rightarrow$
$(\bigvee w\ (\text{Duty}(w) \wedge \text{Binds-universally}(w)))$

Die Aussagenklasse {[4], [5], [6]} ist ersichtlich inkonsistent, insofern sowohl [4] als auch das Negatum von [4] aus ihr folgen. Die zuletzt genannte Aussage folgt mit SB aus [5] und [6]. Unter (der wohl eher aus terminologischen Festlegungen fließenden) Aussage [6] sind also [4] und [5] unverträglich.

Der Text [2] stellt eine (gebrauchs- bzw. bildungssprachliche) Argumentation dar, in der, wie in allen Diskursen, gefolgert wird: Der Folgerungsakt durchzieht unser gesamtes Erkenntnisgeschäft. Auch in der (partiellen) Kommentierung werden selbstredend Folgerungshandlungen vollzogen. Allerdings enthalten die Aussagen, aus denen bzw. auf die geschlossen wird, (meta)logische Prädikatoren wie ’Folgerung’, ’Kontradiktion’, ’Verträglichkeit’ usf. Folgern ist demnach eine Sache, das Sich-Verständigen über Folgerungsverhältnisse eine andere. Gefolgert wird in allen Diskursbereichen, die Thematisierung der Folgerungsverhältnisse fällt in die Logik. Insoweit man sich der (meta)logischen Begrifflichkeit bedient, macht man Anleihen im Vokabelsortiment des Logikers. In jeder Interpretation kognitiver Texte, in jeder Kontroverse, in jeder Konstruktion, Analyse und Kritik sprachlicher Systeme werden diese Redeteile offensichtlich benötigt. Aus diesem Grunde sind sie zumindest kursorisch bei einer Darstellung der Denkwerkzeuge zu berücksichtigen.

Die Wortzusammenstellung ’(meta)logisch’ ist so motiviert: Bezeichnet man die durch die Folgerungsregeln gegebenen Verhältnisse schon als logische, dann sind die sie thematisierenden Begriffe (meta)logische; anderenfalls artikuliert man mit logischen Konzepten die Folgerungsverhältnisse.

5.1.2 Konsequenz – Äquivalenz – Determiniertheit

Was ist hinreichend und notwendig dafür, daß eine Aussage Konsequenz aus einer Aussagenklasse ist? Man betrachte die Argumentation unter [1]. Die Kontradiktion in Zeile 11 soll eine Konsequenz aus den in den Zeilen 1 bis 3 und 7 angezogenen Aussagen sein: Sie wird aus diesen Aussagen durch Anwendung der logischen Regeln gewonnen. Stellte man

die Anziehungen als Annahmen dar, dann wäre die Aussage von 11 in Abhängigkeit von den angenommenen Aussagen gewonnen. Wenn es also eine Argumentation bzw. eine Ableitung einer Aussage aus angenommenen Aussagen gibt, dann soll die betrachtete Aussage Konsequenz der Klasse der angenommenen Aussage sein.

Diese Herangehensweise macht es nötig, zunächst das Ableitungskonzept zu charakterisieren. Einfachheitshalber unterbleibt hier wie in der Folge die ausdrückliche Bezugnahme auf den sprachlichen Rahmen; damit wird aus dem vierstelligen Prädikator '..ist in..Ableitung für..aus..' der dreistellige '..ist Ableitung für..aus..'. $\mathcal{A}$ <u>ist eine Ableitung</u> resp. <u>Argumentation für</u> Γ <u>aus</u> X genau dann, wenn $\mathcal{A}$ eine Sequenz ist, so daß für jedes Glied $\mathcal{A}_i$ von $\mathcal{A}$ gilt: $\mathcal{A}_i$ ist ein Annahmesatz gemäß der Annahmeregel AR oder $\mathcal{A}_i$ ist ein Folgerungssatz gemäß SE, SB, ..., IE, IB und Γ ist die im letzten Glied von $\mathcal{A}$ in Abhängigkeit von der Aussagenklasse X gefolgerte Aussage.

Mit Hilfe des Ableitungskonzepts läßt sich nun (durch >Wegbinden< der ersten Stelle) unmittelbar angeben, wann eine Aussage eine Konsequenz einer Aussagenklasse ist: Γ ist <u>Konsequenz</u> resp. <u>Folgerung</u> aus X genau dann, wenn es eine Ableitung $\mathcal{A}$ für Γ aus einer Unterklasse von X gibt. – Da der soeben charakterisierte Begriff in der Folge häufig Verwendung findet, wird er gemeinsam mit seinem Negatprädikator, wie üblich, durch '..$\vdash$..' bzw. '..$\nvdash$..' abgekürzt.

Wer zeigen will, daß eine Aussage Γ Konsequenz aus einer Aussagenklasse X ist, kann dies >durch die Tat< tun, indem er eine Argumentation für Γ aus X vorlegt. So ist etwa die Kontradiktion in Zeile 11 von [1] eine Konsequenz der Klasse der Aussagen aus Zeile 1 bis 3 und 7; und so gilt – man erinnere sich an Übung 2 – auch: {'$\bigwedge x$ (Duty(x) $\rightarrow$ $\bigvee y$ (Culture(y) $\wedge$ Relative-to(x,y)))', '$\bigwedge x \bigwedge y$ (Culture(x) $\wedge$ Relative-to(y,x) $\rightarrow \neg$ Binds-universally(y))'} $\vdash$ '$\neg \bigvee x$ (Duty(x) $\wedge$ Binds-universally(x))'.

Das entscheidende Bestandstück der Charakterisierung sind die Annahmeregel und die logischen Regeln. Diese lassen sich auch als Eigenschaften des Folgerungsbegriffs lesen. So gilt etwa für beliebige Aussagenklassen X, Y und beliebige Aussagen A, B: Wenn $X \vdash \mathrm{A}$ und $Y \vdash \mathrm{B}$, dann $X \cup Y \vdash \mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$; wenn $X \vdash \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$ und $Y \vdash \mathrm{A}$, dann $X \cup Y \vdash \mathrm{B}$. Das erste Beispiel ist der (meta)logische Ausdruck von KE: Liegt eine Ableitung von A aus X vor und eine Ableitung von B aus Y, dann gibt es – eben über KE – eine Ableitung der Konjunktion aus A und B aus $X \cup Y$. Das zweite Beispiel ist analog der (meta)logische Ausdruck von SB.

Ü3 Formulieren Sie den (meta)logischen Ausdruck von AB, UE und IE!

Die Folgerungsrelation ist in dem modifizierten Sinne reflexiv, daß alle Aussagen Δ, die Element einer Aussagenklasse X sind, auch zu ihren Konsequenzen zählen: Wenn $\Delta \in X$, dann $X \vdash \Delta$. Wegen $\Delta \in \{\Delta\}$ gilt insbesondere $\{\Delta\} \vdash \Delta$. Elementschaft garantiert Konsequenzschaft. – Folgt ferner die Subjunktion aus Δ und Γ aus X, dann folgt Γ aus $X \cup \{\Delta\}$ alleine. Auch die als Deduktionstheorem bekannte Umkehrung gilt: Wenn Γ Konsequenz aus $X \cup \{\Delta\}$ ist, dann ist die Subjunktion aus Δ und Γ Konsequenz aus X allein. Insgesamt gilt dann: $X \vdash \Delta \rightarrow \Gamma$ genau dann, wenn $X \cup \{\Delta\} \vdash \Gamma$.

Der im folgenden dargestellte Zug der Folgerungsrelation wird oft als Schnitt bzw. Cut bezeichnet: Ist eine Aussage Γ Konsequenz aus $X \cup \{B\}$ und folgt ferner B aus Y, dann folgt Γ aus $X \cup Y$. Die Aussage B wird in der letzten Folgerungsbeziehung >herausgeschnitten<: Wenn $X \cup \{B\} \vdash \Gamma$ und $Y \vdash B$, dann $X \cup Y \vdash \Gamma$. – Folgt eine Aussage Γ aus einer Aussagenklasse Z, dann folgt Γ auch aus jeder Erweiterung von Z: Wenn $Z \vdash \Gamma$ und $Z \subseteq X$, dann $X \vdash \Gamma$. Das ist die Eigenschaft der Prämissenerweiterung; damit wird (meta)logisch die Möglichkeit der Herstellung künstlicher Abhängigkeiten gespiegelt. – Die Transitivität der Folgerungsrelation kann so ausgedrückt werden: Wenn alle Aussagen B einer Aussagenklasse X aus einer Aussagenklasse Y folgen und eine Aussage Γ ebenfalls aus X folgt, dann folgt Γ bereits aus Y: Wenn $Y \vdash B$, wobei $B \in X$, und $X \vdash \Gamma$, dann $Y \vdash \Gamma$. Eine Menge Y, aus der alle Elemente einer Klasse X folgen, kann X als Prämissenklasse ersetzen.

Schließlich ist noch die Endlichkeit festzuhalten. Folgt Δ aus einer beliebigen Aussagenklasse X, dann gibt es eine endliche Teilmenge Y von X, aus der Δ ebenfalls folgt: Wenn $X \vdash \Delta$, dann gibt es eine endliche Klasse $Z \subseteq X$ mit $Z \vdash \Delta$. – Eine Klasse ist genau dann endlich, wenn sie keine echte Teilklasse dergestalt besitzt, daß es eine eineindeutige Abbildung zwischen ihr und der Teilklasse gibt.– Bemerkung: Diese Erläuterung zeigt, daß für das eigentliche Geschäft des Logikers weitere Redeteile bereitgestellt werden müssen, die der mathematischen bzw. der Klassensprache entstammen.

Mit Hilfe der Konsequenzschaft läßt sich der Begriff der (logischen) Äquivalenz definieren: Eine Aussage A ist einer Aussage B (logisch) äquivalent, wenn sowohl B eine Konsequenz aus der Einerklasse von A wie auch A eine Konsequenz aus der Einerklasse von B ist. Wählt man '..$\dashv\vdash$..' als Kürzel, dann ergibt sich: $A \dashv\vdash B$ genau dann, wenn sowohl $\{A\} \vdash B$ als auch $\{B\} \vdash A$.

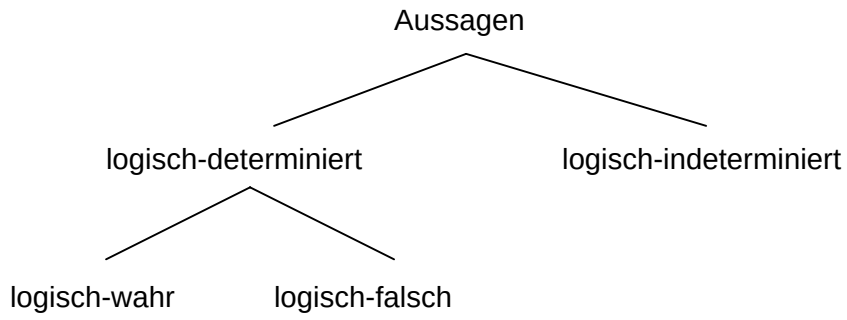
Die Äquivalenz ist ebenfalls reflexiv: Für jede Aussage Δ gilt: $\Delta \dashv\vdash \Delta$. Ferner liegt Symmetrie vor: Für beliebige Aussagen A, B gilt: Wenn $A \dashv\vdash B$, dann $B \dashv\vdash A$. Die Transitivität liest sich so: Für beliebige Aussagen B, Γ, Δ gilt: Wenn $B \dashv\vdash \Gamma$ und $\Gamma \dashv\vdash \Delta$ gilt, dann gilt auch $B \dashv\vdash \Delta$. Ferner gilt die bei Ringbeweisen ausgenutzte Zirkeltransitivität. Für beliebige Aussagen A, B,

Γ gilt: Wenn $\{A\}\vdash B$ und $\{B\}\vdash\Gamma$ und $\{\Gamma\}\vdash A$, dann sind A, B, Γ paarweise äquivalent, also $A\dashv\vdash B$, $B\dashv\vdash\Gamma$, $\Gamma\dashv\vdash A$ (↑5.2.3).

Eine Aussage Γ soll <u>logisch-wahr</u> bzw. <u>logisch-beweisbar</u> sein genau dann, wenn es eine Ableitung aus der leeren Klasse für Γ gibt bzw. wenn Γ Konsequenz aus der leeren Klasse ist: Γ ist logisch-wahr genau dann, wenn $0\vdash\Gamma$. Als Abkürzung fungiere '$\vdash$..'. – Zwischen Konsequenz bzw. Äquivalenz von Aussagen einerseits und der logischen Wahrheit ihrer Subjunktion bzw. Bisubjunktion andererseits besteht folgender Zusammenhang: Eine Aussage B ist genau dann Konsequenz aus einer Einerklasse aus einer Aussage A, wenn die Subjunktion aus A und B logisch-wahr ist: $\{A\}\vdash B$ genau dann, wenn $\vdash A\rightarrow B$. Zwei Aussagen sind genau dann logisch äquivalent, wenn ihre Bisubjunktion logisch-wahr ist: $A\dashv\vdash B$ genau dann, wenn $\vdash A\leftrightarrow B$.

Eine Aussage Δ ist <u>logisch-falsch</u> bzw. <u>logisch-widerlegbar</u>, wenn die Negation von Δ logisch-wahr ist. <u>Logisch-determiniert</u> sind genau die Aussagen, die logisch-wahr oder logisch-falsch sind. Alle übrigen Aussagen sind <u>logisch-indeterminiert</u> bzw. <u>logisch-kontingent</u>. – Es resultiert folgende Gliederung der (entscheidbaren) Aussagen:

[7]



Die Aussage 'es regnet $\vee\ \neg$ es regnet' ist logisch-wahr, die Aussage '$\neg$ (es regnet $\vee\ \neg$ es regnet)' ist logisch-falsch; demgegenüber ist die Aussage 'es regnet' logisch-kontingent: Über ihr Wahr- bzw. Falschsein kann nicht mit ausschließlich logischen Mitteln befunden werden. Sie hat mit der herrschenden Wetterlage zu tun.

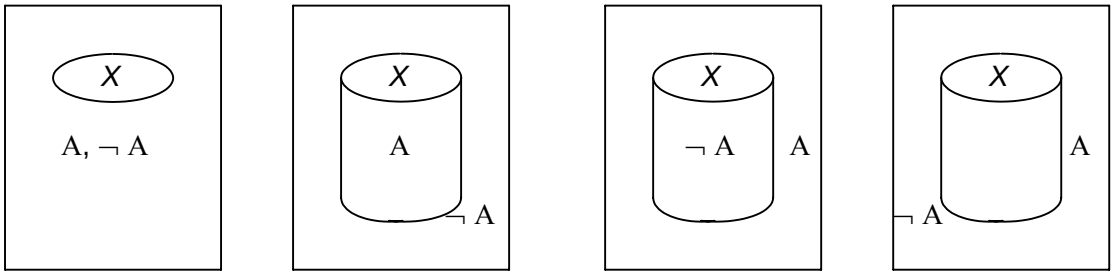
Ü4 Geben Sie aus der Arithmetik, der Philosophie und einem Bereich Ihrer Wahl ein Beispiel für eine logisch-wahre, logisch-falsche, wahre logisch-indeterminierte und falsche logisch-indeterminierte Aussage.

Wegen Prämissenerweiterung gilt: Wenn eine Aussage Δ logisch-wahr ist, folgt sie aus einer beliebigen Aussagenklasse. Da die Negation einer logisch-falschen Aussage logisch-wahr und damit ohnehin gegeben ist, resultiert mit Ex-falso-quod-libet: Aus einer Klasse mit einer logisch-falschen Aussage folgt jede beliebige Aussage.

Die im vorangehenden Kapitel bewiesenen Theoreme sind logisch-wahre Aussagen(schemata), die unendlich viele logisch-wahre Instanzen überdecken. – Eine Aussage A ist entscheidbar durch (bzw. ist abhängig von) einer Aussagenklasse *X*, wenn A oder die Negation von A Konsequenz von *X* ist: $X \vdash A$ oder $X \vdash \neg A$. Unentscheidbarkeit (bzw. Unabhängigkeit) von A durch *X* liegt hingegen vor, wenn weder A noch die Negation von A aus *X* folgt: $X \nvdash A$ und $X \nvdash \neg A$. Logisch-wahre und logisch-falsche Aussagen sind von allen Aussageklassen abhängig: Logisch-wahre Aussagen folgen wegen Prämissenerweiterung aus allen Aussageklassen; und damit folgt auch die Negation logisch-falscher Aussagen aus allen Aussageklassen. Das eigentliche Anwendungsfeld des Begriffs sind also logisch-indeterminierte Aussagen. Da ferner inkonsistente Aussagenklassen jede Aussage entscheiden, ist das interessante Anwendungsfeld nochmals auf die konsistenten Aussagenklassen einzuschränken. Insgesamt ist das Konzept für logisch indeterminierte Aussagen und konsitente Aussagenklassen angelegt.

Es ist eine Aussage A Konsequenz einer Aussagenklasse *X* oder nicht; und es ist ferner die Negation von A Konsequenz einer Aussagenklasse *X* oder nicht. Damit sind vier Fälle zu unterscheiden: $X \vdash A$ und $X \vdash \neg A$, $X \vdash A$ und $X \nvdash \neg A$, $X \nvdash A$ und $X \vdash \neg A$, $X \nvdash A$ und $X \nvdash \neg A$. Das folgende Diagramm spiegelt die vier Möglichkeiten, dabei ist die gesamte elliptische Menge die Konsequenzenklasse von *X*; nur im ersten Fall ist die Konsequenzenklasse die Gesamtheit aller Aussagen:

[8]



Im ersten Fall ist *X* (in der unten eingeführten Terminologie) inkonsistent, in den drei anderen konsistent. In den beiden mittleren Fällen liegt (nicht triviale) Entscheidbarkeit vor, im letzten Unentscheidbarkeit.

Mit Hilfe des (einstelligen) Redundanzbegriffs greift man auf die Folgerungsverhältnisse innerhalb einer Aussagenklasse zu: Eine Aussagenklasse *X* ist (logisch) redundant resp. abhängig genau dann, wenn für wenigstens ein $\Delta \in X$ gilt, daß $X \setminus \{\Delta\} \vdash \Delta$; Δ folgt aus der Restklasse von *X*. Es ist *X* irredundant bzw. unabhängig, falls für kein $\Delta \in X$ gilt, daß $X \setminus \{\Delta\} \vdash \Delta$.

Beide Konzepte, Entscheidbarkeit und Redundanz, spielen v.a. bei der Untersuchung von Axiomensystemen eine Rolle. Hat man z.B. gezeigt, daß eine Aussage durch eine (konsistente) Axiomenklasse abhängig ist, dann kann man die Negation dieser Aussage (zweiter Fall) oder diese Aussage (dritter Fall) der Axiomenklasse nicht unter Konsistenzwahrung hinzufügen. Ist die Aussage hingegen unabhängig, dann entstehen durch ihre oder ihrer Negation Hinzufügung alternative Axiomenklassen. – Ist eine Axiomenklasse als redundant erwiesen, dann wird man das redundante Glied streichen. Erstangebote von Axiomensystemen sind häufig redundant und werden erst später irredundant gemacht.

Entscheidet eine Aussagenklasse alle Aussagen einer Sprache, dann ist sie deduktiv vollständig: X ist deduktiv-vollständig genau dann, wenn für alle Aussagen Δ gilt: Δ ist entscheidbar durch (abhängig von) X, d.h. $X \vdash \Delta$ oder $X \vdash \neg\Delta$.

Als deduktiv geschlossen bezeichnet man eine Aussagenklasse schließlich, wenn sie ihre sämtlichen Konsequenzen zum Mitglied hat: X ist deduktiv-geschlossen genau dann, wenn für alle Aussagen A gilt: Wenn $X \vdash \mathrm{A}$, dann $\mathrm{A} \in X$. Die deduktive Geschlossenheit kehrt also die Reflexivität um. Eine Klasse ist damit genau dann deduktiv geschlossen, wenn sie mit ihrer Konsequenzenklasse zusammenfällt. Damit ist auch die Konsequenzenklasse einer beliebigen Menge deduktiv geschlossen. Deduktiv-geschlossene Klassen umfassen alle logischen Wahrheiten. Ferner ist die Konsequenzenklasse der Konsequenzenklasse einer Klasse mit der Konsequenzenklasse identisch; Iterierungen der Konsequenzen-klassenbildung führen nicht zu einer gegenüber der Konsequenzenklasse neuen Klasse.

5.1.3 Konsistenz – Verträglichkeit – Maximalkonsistenz

Auf Basis des Konsequenzbegriffs sind konsistente Aussagenklassen bestimmbar als solche Mengen, für die es keine Aussagen dergestalt gibt, daß sowohl die Negation der Aussage als auch die Aussage selbst Folgerung ist. Inkonsistent ist eine Aussagenklasse genau dann, wenn sie nicht konsistent ist, wenn es mithin eine Aussage gibt, die gemeinsam mit ihrer Negation aus der Klasse folgt. Formeller: X ist konsistent bzw. widerspruchsfrei genau dann, wenn es keine Aussage Δ gibt, so daß $X \vdash \Delta$ und $X \vdash \neg\Delta$. X ist inkonsistent bzw. widersprüchlich genau dann, wenn es eine Aussage Δ gibt, so daß $X \vdash \Delta$ und $X \vdash \neg\Delta$.

Eine Aussagenklasse X ist demnach genau dann inkonsistent, wenn jede beliebige Aussage Γ aus ihr folgt. X ist inkonsistent genau dann, wenn für alle Aussagen Δ gilt: $X \vdash \Delta$. – Sei X inkonsistent. Nach der Definition der Inkonsistenz gibt es dann eine Aussage Δ, so daß

sowohl Δ wie auch $\neg\Delta$ aus X folgern. Sei $\Delta°$ eine solche. Damit folgt die Konjunktion aus $\Delta°$ und $\neg\Delta°$, also $\Delta°\wedge\neg\Delta°$ aus X. Wegen $\{\Delta°\wedge\neg\Delta°\}\vdash\Gamma$ für beliebiges Γ und der Transitivität der Konsequenzschaft folgt dann beliebiges Γ aus X. Folge umgekehrt beliebiges Γ aus X; dann $\Delta\wedge\neg\Delta$, dann gibt es auch ein Δ, so daß sowohl Δ wie auch die Negation von Δ aus X folgt.

Kontradiktionen sind erinnerlich Konjunktionen aus einer Aussage und ihrer Negation (↑1.1.1). Alle Kontradiktionen sind logisch-falsch, da ihre Negationen logisch-wahr sind. Eine Aussagenklasse ist, wie der vorangehenden Beweisskizze zu entnehmen, genau dann inkonsistent, wenn eine Kontradiktion aus ihr folgt. Obgleich jede inkonsistente Aussagenklasse trivialerweise Kontradiktionen zur Konsequenz hat, muß sie keineswegs solche Aussagen zum Element haben. Ebensowenig muß eine inkonsistente Klasse eine Aussage und ihre Negation zum Mitglied haben. Inkonsistente Aussagenklassen, die eine Kontradiktion oder eine Aussage und ihre Negation zum Element haben, sind oberflächeninkonsistent. Besitzen solche Klassen endlich wenige Elemente, dann wird der Inkonsistenznachweis trivialisiert.

Ü5 a) Weisen Sie mit Hilfe der Definition nach, daß die Aussagen aus Zeile 1 bis 3 und Zeile 7 unter [1] eine inkonsistente Menge darstellen. Handelt es sich um eine oberflächeninkonsistente Klasse?

b) Bilden Sie eine inkonsistente, aber nicht oberflächeninkonsistente Menge aus dem Bereich der Philosophie, die wenigstens eine quantifizierte Aussage enthält.

Eine Aussagenklasse ist genau dann konsistent, wenn sie wenigstens eine Aussage nicht zur Konsequenz hat: *X* ist konsistent genau dann, wenn es eine Aussage Δ gibt, so daß nicht $X\vdash\Delta$. Damit ist eine hinreichende und notwendige Bedingung für Konsistenz genannt: Man braucht nur von einer beliebig wählbaren Aussage zu zeigen, daß sie nicht Konsequenz aus der betrachteten Klasse ist. Dieser Nachweisweg wird dann besonders aussichtsreich, wenn ein einfaches Verfahren zur Non-sequitur-Diagnose bereitsteht (↑5.2.1).

Man könnte Konsistenz auch mit Hilfe dieses Lemmas definieren und erhielte dann umgekehrt die obige Definition als beweisbare Aussage. Während die hier gewählte Definition – Ausschluß einer Aussage, die mit ihrer Negation aus der betrachteten Klasse folgt, – an die redepragmatischen Ursprünge der Begrifflichkeit erinnert, ist das Lemma allgemeiner gehalten; analog liegen die Verhältnisse bei der Inkonsistenz. – Gelegentlich spricht man den Ausschluß der Folgerbarkeit einer Aussage und ihrer Negation auch als 'Negationskonsistenz' an, während die Existenz einer nicht-folgerbaren Aussage als

’Konsistenz’ geführt wird. Eine Aussagenklasse ist (in den hier betrachteten Sprachen) genau dann konsistent, wenn sie auch negationskonsistent ist.

Folgt jedes Element einer Aussagenklasse X aus einer Aussagenklasse Y, dann ist X im Falle der Konsistenz von Y konsistent und Y im Falle der Inkonsistenz von X seinerseits inkonsistent: Für alle Aussagenklassen X, Y gilt: Wenn für alle Aussagen $\mathrm{A}\in X$ gilt, daß $Y\vdash\mathrm{A}$, dann: Wenn Y konsistent ist, dann ist X konsistent; wenn X inkonsistent ist, dann ist auch Y inkonsistent. – Ferner sind die Teilklassen konsistenter Mengen konsistent und die Oberklassen inkonsistenter Klassen inkonsistent: Unter $X\subseteq Y$ gilt: Wenn Y konsistent ist, dann ist X konsistent. Wenn X inkonsistent ist, dann auch Y. Inkonsistenz vererbt sich >nach oben<, Konsistenz vererbt sich >nach unten< weiter.

Folgt eine Aussage aus einer Klasse, dann ist die Vereinigung dieser Klasse mit der Negation dieser Aussage inkonsistent: $X\vdash\Delta$ gdw $X\cup\{\neg\Delta\}$ ist inkonsistent. So folgt aus Aussagenklassen der Art $\{\mathrm{A}\wedge\mathrm{B}\}$ B mit (auf Regelebene gesprochen) KB. Damit ist $\{\mathrm{A}\wedge\mathrm{B}\}\cup\{\neg\mathrm{B}\}$, also $\{\mathrm{A}\wedge\mathrm{B},\neg\mathrm{B}\}$ ersichtlich inkonsistent: Sowohl B als auch die Negation von B sind Konsequenz dieser Klasse.

Eine Aussagenklasse X <u>ist verträglich mit</u> resp. <u>kompatibel mit</u> resp. <u>harmoniert mit</u> resp. <u>stimmt überein mit</u> einer Aussagenklasse Y genau dann, wenn $X\cup Y$ konsistent ist. Inkonsistente Aussagenklassen harmonieren demzufolge mit keiner Aussagenklasse. Stehen umgekehrt Aussagenklassen in Harmonie, so sind beide konsistent. – Es ist hingegen X <u>unverträglich mit</u> resp. <u>inkompatibel mit</u> resp. <u>in Disharmonie mit</u> Y, falls $X\cup Y$ inkonsistent ist. Bei Beteiligung schon einer inkonsistenten Aussagenmenge resultiert Disharmonie. Umgekehrt darf jedoch aus der Inkompatibilität zweier Klassen nicht auf deren (jeweilige) Inkonsistenz geschlossen werden; diese kann gerade durch die Zusammenfügung von X und Y entstehen. <u>(Un)Verträglichkeit</u> <u>von</u> Aussagen A, B <u>unter</u> einer Aussagenklasse X ist genau dann gegeben, wenn die Vereinigung beider Aussagen mit der Klasse inkonsistent ist: A <u>ist unter</u> X <u>mit</u> B <u>unverträglich</u> genau dann, wenn $\{\mathrm{A}\}\cup\{\mathrm{B}\}\cup X$ inkonsistent ist. Man vergleiche die Diskussion an Beispiel [2]: Die Aussagen [4] und [5] sind unter {[6]} unverträglich.

Maximalkonsistente Mengen sind die konsistenten Mengen, die durch Hinzufügung einer beliebigen Aussage, die ihnen nicht als Element angehört, in Inkonsistenz fallen. Genauer: X <u>ist maximalkonsistent</u> genau dann, wenn X konsistent ist und für alle Aussagen A mit $\mathrm{A}\notin X$ gilt: $X\cup\{\mathrm{A}\}$ ist inkonsistent. – Die maximalkonsistenten Klassen haben alle logisch-wahren Aussagen und keine logisch-falsche Aussage zum Element. Sie haben ferner die und nur die Aussagen zum Element, die aus ihnen folgen: Wenn X maximalkonsistent ist, dann ist eine

beliebige Aussage $\Gamma \in X$, genau dann, wenn $X \vdash \Gamma$. Maximalkonsistente Klassen sind überdies deduktiv vollständig: Sei X maximalkonsistent. Nun ist $A° \in X$ oder $A° \notin X$. Im ersten Fall ist $X \vdash A°$, also $X \vdash A°$ oder $X \vdash \neg A°$, also ist X deduktiv vollständig. Im zweiten Fall ist $A° \notin X$, also $X \cup \{A°\}$ ist inkonsistent, also $X \vdash \neg A°$, also $X \vdash A$ oder $X \vdash \neg A°$, also ist X deduktiv vollständig.

Für die Umkehrung gelten Zusatzforderungen: Wenn *X* konsistent, deduktiv geschlossen und deduktiv vollständig ist, dann ist *X* maximalkonsistent. Schließlich sei noch der Satz von LINDENBAUM erwähnt: Zu jeder konsistenten Aussagenklasse *X* gibt es eine maximalkonsistente Oberklasse *Y*.

Eine Aussagenklasse ist maximalkonsistente Unterklasse einer Aussagenklasse genau dann, wenn die erstgenannte Klasse konsistent ist, Teilklasse der Zweitgenannten und nicht leer und wenn die Hinzufügung einer Formel, die der zweitgenannten, aber nicht der erstgenannten Klasse angehört, die Menge inkonsistent macht. Genauer: *X* <u>ist maximalkonsistente Unterklasse von</u> *Y* genau dann, wenn (1) $X \subseteq Y$ und $X \neq 0$, (2) X ist konsistent und (3) für alle Aussagen Δ: Wenn $\Delta \in Y \setminus X$, dann $X \cup \{\Delta\}$ ist inkonsistent. – Während maximalkonsistente Mengen mit Blick auf beliebige Formeln definiert werden, ist hier der Rahmen durch die Oberklasse *Y* eingeschränkt, der die zur Inkonsistenz führende Aussage entnommen sein muß.

Wenn eine Aussagenmenge nicht leer und konsistent ist, dann hat sie sich selbst, aber auch nur sich selbst zur maximalkonsistenten Untermenge. Dieser Sachverhalt zeigt an, daß der neue Begriff mit Blick auf inkonsistente Oberklassen angelegt ist. Wenn *X* maximalkonsistente Untermenge von *Y* ist, dann gilt für jede *Y*-Aussage A: $A \in X$ gdw $X \vdash A$. Die Bildung maximalkonsistenter Untermengen hat nicht nur vornehmlich inkonsistente Oberklassen als intendierten Anwendungsbereich, sondern zielt zusätzlich auf Klassen mit endlich wenigen, fast überschaubar wenigen Mitgliedern: Die Vorgehensweise zur Bildung maximalkonsistenter Untermengen ist diese: (i) Bilde alle Teilklassen der inkonsistenten Ausgangsmenge Y, also die Potenzklasse von Y! (ii) Streiche die Menge selbst und die leere Klasse! (iii) Sortiere aus den so gewonnenen Teilklassen die konsistenten aus! (iv) Zeichne die maximalkonsistenten Teilklassen aus!

Die Bildung maximalkonsistenter Untermengen ist für die inkonsistente Klasse aus dem Links-Rechts-Beispiel vorzuführen. Dabei wird die Aussage aus Zeile 1 unter [1] mit 'I', diejenige aus Zeile 2 mit 'II', diejenige aus Zeile 3 mit 'III' und diejenige aus Zeile 7 mit 'IV' abgekürzt. Die Unterklassen von {I, II, III, IV} sind die Mengen 0, {I, II, III, IV}, {II, III, IV}, {I, III,

IV}, {I, II, IV}, {I, II, III}, {I, II}, {I, III}, {I, IV}, {II, III}, {II, IV}, {III, IV}, {I}, {II}, {III}, {IV}. Durch Streichung der beiden ersten werden die relevanten Unterklassen verfügbar.

Die verbleibenden Mengen sind auf Konsistenz zu untersuchen. Um diese Aufgabe abzukürzen, wird gezeigt, daß die vier dreielementigen Klassen konsistent sind. Alle übrigen Klassen lassen sich als Teilklassen derselben darstellen. Erweisen sich die betrachteten Gebilde als konsistent, dann auch ihre Teilklassen.

{II, III, IV} ist konsistent, wenn es wenigstens eine Aussage gibt, die nicht folgt. Ein Beispiel für eine solche Aussage wäre etwa gerade I, also ’A liegt links von B’, oder auch ’A=B’. Um etwa zu zeigen, daß I keine Konsequenz von {II, III, IV} ist, legt man eine Interpretation vor, die die Klasse erfüllt, aber etwa I falsch macht. Seien die natürlichen Zahlen das Universum der Interpretation und gelte folgende Deutung:

[9]	A	2
	B	1
	..liegt rechts von..	..>..
	..liegt links von..	..<..

[9] macht II, III, IV arithmetisch wahr; es gilt nämlich in der arithmetischen Sprache:

[10] $2 > 1$

$\bigwedge x \bigwedge y\ (x > y \rightarrow \neg\, y > x)$

$\bigwedge x \bigwedge y\ (x > y \leftrightarrow y < x)$

Insoweit ist die Aussagenklasse erfüllbar, d.h. sie besitzt eine wahre Interpretation. Die Interpretation macht andererseits die Konsequenz, nämlich ’2<1’ oder auch ’2=1’ falsch. Diese ist also keine Konsequenz (↑5.2.1). – Analog wird gezeigt, daß die übrigen Dreierklassen konsistent sind.

Zum Nachweis der Maximalkonsistenz sei wiederum {II, III, IV} betrachtet. Gefordert ist, daß jede Aussage, die {I, II, III, IV} angehört, nicht aber {II, III, IV}, die letztgenannte Klasse inkonsistent macht. Da lediglich I der betrachteten Menge nicht angehört, kann sich die Untersuchung beschränken: Aus dem Inkonsistenznachweis ist bekannt, daß die Viererklasse inkonsistent ist. Analog kann für die übrigen Dreierklassen Maximalität gezeigt werden. Es sind damit {II, III, IV}, {I, III, IV}, {I, II, IV} und {I, II, III} die maximalkonsistenten Untermengen der Links-Rechts-Aussagenmenge.

Eine Aussage A <u>ist unschuldiger Zuschauer von</u> *X*, falls A *X*-Mitglied ist und jeder maximalkonsistenten Untermenge von *X* angehört: $A \in X$ und für alle *Z* gilt: Wenn *Z* maximalkonsistente Untermenge von *X* ist, dann ist $A \in Z$. Hingegen <u>ist</u> A <u>Verdächtiger von</u> *X,* falls A wenigstens einer maximalkonsistenten Untermenge nicht angehört: $A \in X$ und es gibt eine maximalkonsistente Untermenge *Z* von *X* mit $A \notin Z$.

Die beispielhaft betrachtete Menge enthält keine unschuldigen Zuschauer, sondern nur Verdächtige. Ein unschuldiger Zuschauer wäre etwa durch Hinzufügung der Aussagen 'A ist viereckig', 'B ist eckig' gegeben.

Ü6 a) Zeigen Sie, daß die folgende Aussagenklasse inkonsistent ist:

I $\bigwedge x$ (MentalesPhänomen(x) $\rightarrow \neg$ PhysischesPhänomen(x))

II $\bigvee y \bigvee z$ (MentalesPhänomen(y) $\wedge$ PhysischesPhänomen(z) $\wedge$ Bewirkt(y,z))

III $\bigwedge u \bigwedge w$ (Bewirkt(u,w) $\wedge$ PhysischesPhänomen(w) $\rightarrow$ PhysischesPhänomen(u))

b) Bilden Sie die maximalkonsistenten Untermengen! Verwenden Sie zum Konsistenznachweis das oben benutzte Kriterium!

c) Identifizieren Sie die unschuldigen Zuschauer und die Verdächtigen von {I, II, III}!

5.1.4 (In)Konsistenz – Umgebende Unterscheidungen

Widerspruch, Kontroverse, Streit, Disput, Meinungsverschiedenheit, Dissens, usf. sind lebens- und sonderweltlich wohlvertraute Erscheinungen. Die Logik wird u.a. deshalb ausgebildet, um mit diesen Gegebenheiten (besser) umgehen zu können. So dienen die Konzepte von Konsistenz und Inkonsistenz gerade dazu, in allgemeiner und verlässlicher Weise eine Verständigung über diese Turbulenzen im Erkenntnisgeschäft zu garantieren.

Das (Sich)Widersprechen, „Contradicere", kann durch Vollzug ganz verschiedener Redehandlungen erfolgen: So mag eine (dann als Proponent geführte) Partei eine Aussage Δ behaupten, während eine andere (dann als Opponent auftretende) Partei Δ bestreitet oder aber die Negation von Δ behauptet. Weitere Formen ergeben sich dann, wenn man in Annahme einer alternativen Prädikationslehre (↑3.3.5) auch positive, negative und neutrative Prädikationsoperatoren zuläßt.

Das <u>Sich</u>-Widersprechen kommt gewöhnlich nicht in der Weise vor, daß ein kognitiver Agent zugleich Δ behauptet und bestreitet bzw. daß er Δ und die Negation von Δ behauptet. Vielmehr äußert man eine ganze Reihe von Aussagen, z.B. als Antworten auf

Konzessionsfragen, die gemeinsam eine Aussage und ihre Negation als Element oder Konsequenz enthalten. Gelegentlich – man vergleiche [2] – gleitet man allmählich und unbemerkt auf einer Welle von Plausibilitäten in den Abgrund des Widerspruchs. Es gibt jedoch eine Reihe weiterer inkonsistenter Diskurssituationen: (i) Inkonsistente Aussagenklassen ergeben sich häufig, wenn ein Historiker, ein Detektiv, ein Rechercheur die aus verschiedenen Quellen stammenden Informationen zu einem *x* (Person, Tathergang, Zeitraum, Ereignis usf.) zusammenträgt. Es ist die bei solchen Untersuchungen leitende Maxime der Umfassenheit, die oft Inkonsistenz herbeiführt und behandlungsbedürftig macht. – (ii) Auch schwache, affirmative Akte, die auf Indizien beruhen, führen (gegebenenfalls unter Zusatzprämissen) auf Inkonsistenz. Man betrachte etwa Prognosen zum Ausgang eines Sportereignisses. (iii) Vermutungen, die auf gleichen Indizien beruhen, aber durch verschiedenen Interpretationsverfahren und -hypothesen zustande kommen, führen oft zur Inkonsistenz; diese Form ist typisch für interpretatorische Arbeit in Kunst, Medizin, Psychologie usf. (iv) Inkonsistenzgefährdet ist das kognitive Geschäft, vor allem wenn es von Aussageschemata geleitet ist. Paradigmatisch ist etwa der mathematische Vollzug unter dem Komprehensionsschema. (↑12.). – Der langen Beispielkette kurzer Sinn: Widerspruch und Inkonsistenz sind keineswegs pittoreske Zaungäste, sondern unwillkommene Dauerbegleiter des Erkenntnisgeschäfts.

’Kontradiktion’, ’Konsistenz’ und ’Inkonsistenz’ sind (innerhalb der voraussetzbaren Artikulationsmöglichkeiten) wohldefinierte Begriffe. Für weitere, in ihrer Umgebung angesiedelte Redeteile können sie als (Mit)Definiens hilfreich sein. So wird man etwa Antinomien, Paradoxien, Anomalien, Aporien usf. in der Regel als Widersprüche einer bestimmten Art charakterisieren; auf Basis derartiger Erklärungen sind dann z.B. alle Antinomien, also beweisbare Widersprüche, auch Kontradiktionen, aber nicht umgekehrt.

’(In)Konsistenz’ wird bei der Explikation von’(In)Kohärenz’ einschlägig. Wie immer man die in Wissens- und Wahrheitskonzeption beliebte Kohärenzbegrifflichkeit charakterisiert: In jedem Fall wird gelten, daß inkonsistente Aussagenklassen inkohärent und – kontraponiert – kohärente Mengen auch konsistent sind.

Das Konsistenzvokabular i.b. und die gesamte (meta)logische Ausdrucksmannschaft i.a. beziehen sich auf Aussagen resp. Aussagenklassen. Die genannten Begriffe finden jedoch bildungssprachlich auch Anwendung auf andere Gebilde: So soll etwa eine Überzeugung aus einem Überzeugungssystem folgen, eine Ideologie soll mit einer anderen unverträglich sein und eine Weltanschauung soll sich als inkonsistent herausstellen. Diese Übertragung auf Theorien, Ansätze, Ansichten, Auffassungen, Horizonte, (Welt)Anschauungen, Entwürfe,

Positionen, Standpunkte, Sichtweisen, Ideologien, Paradigmata, Verständnisse, Vorverständnisse, Hintergrundverständnisse, Begleitverständnisse, Informationen und Informationssysteme, Überzeugungen und Überzeugungssysteme, Disziplinen, Disziplinenteile, Texte, Vorträge usf. ist insofern erlaubt, als alle diese – und viele hier ungenannte – Gebilde sich als Aussagenklassen und Aussagen darstellen lassen, ganz unerachtet ihrer sonstigen sehr heterogenen Eigentümlichkeiten.

Eine Kontradiktion war als Konjunktion einer beliebigen Aussage und ihrer Negation erklärt. Speziell im Blick auf universalquantifizierte Bisubjunktionen, Aussagen, die durch '$\bigwedge x$(Mensch(x)$\rightarrow$Sterblich(x))' exemplifiziert und durch $\bigwedge\xi(\Delta\rightarrow\Gamma)$ schematisch darstellbar sind, verwendet man eine Gegensatzterminologie, die durch das folgende sogenannte <u>Logische Quadrat</u> erläutert ist:

[11] $\bigwedge\xi\,(\Delta \rightarrow \Gamma)$ $\qquad$ $\bigwedge\xi\,(\Delta \rightarrow \neg\,\Gamma)$

$\bigwedge x$ (Mensch(x) $\rightarrow$ Sterblich(x)) $\leftarrow$ KONTRÄR $\rightarrow$ $\bigwedge x$ (Mensch(x) $\rightarrow\neg$ Sterblich(x))

```
                K
                 O                          H
                  N                       C
                   T                    S
S                   R                 I                S
U                     A            R                   U
B                       D       O                      B
A                         I   T                        A
L                           K                          L
T                         I   T                        T
E                       D       O                      E
R                     A            R                   R
N                   R                 I                N
                     T                S
                      N             C
                       O          H
                        K
```

$\neg\bigwedge x$ (Mensch(x) $\rightarrow\neg$ Sterblich(x)) $\leftarrow$ SUBKONTRÄR $\rightarrow$ $\neg\bigwedge x$ (Mensch(x) $\rightarrow$ Sterblich(x))

$\neg\bigwedge\xi\,(\Delta \rightarrow \neg\,\Gamma)$ $\qquad$ $\neg\bigwedge\xi\,(\Delta \rightarrow \Gamma)$

In der Folge sind die Aussagen nach ihren Standort mit L(inks) O(ben), R(echts) U(nten) usf. abgekürzt. {LO, RU} und {RO, LU} sind inkonsistent im Sinne der Oberflächeninkonsistenz. Konträre Aussagen bilden genau dann eine inkonsistente Menge, wenn das Antezedens

erfüllt ist, wenn also $\bigvee\xi\Delta$ beweisbar ist. Es ist also {LO, RO, $\bigvee\xi\Delta$} inkonsistent, während {$\neg\bigvee\xi\Delta$, LO, RO} konsistent ist. – Bei der überkommenen Darstellung im Rahmen einer aristotelischen Grammatik und Logik ist die Existenzforderung zur Erzwingung von Inkonsistenz überflüssig.

Das LU- und RU-Glied läßt sich mit komplexer Quantorumformung als '$\bigvee x$(Mensch(x)$\wedge$Sterblich(x))' bzw. '$\bigvee x$(Mensch(x)$\wedge\neg$Sterblich(x))' darstellen. Es ist LU resp. RU eine Konsequenz aus LO resp. RO falls das Antezedens nicht leer ist: {LO, $\bigvee\xi\Delta$} $\vdash$ LU und {RO, $\bigvee\xi\Delta$} $\vdash$ RU. Die subkonträren Gegensätze sind miteinander verträglich.

Das logische Quadrat ist ein Lehrstück aus der traditionellen Logik. Sein Klärungswert für diskursive Konfusionen besteht insbesondere in der Unterscheidung zwischen kontradiktorischen und konträren Gegensätzen: Viele Thesen sind ihrer Form nach universalquantifizierte Subjunktionen; und es macht einen erheblichen Unterschied, ob man gegen eine Aussage der Art $\bigwedge\xi(\Delta\rightarrow\Gamma)$ ihren konträren oder ihren kontradiktorischen Gegensatz verteidigt.

Ü7 Bilden Sie das logische Quadrat mit

Δ: *u* ist Problem

Γ: $\bigvee w$ *w* ist Lösung für *u*

Wählen Sie für LU und RU die partikularquantifizierte Form!

Anbei: <u>Kontradiktorische Begriffe</u> sind von Kontradiktionen zu unterscheiden. Ein Begriff bzw. – hier einfachheitshalber (↑6.3) – ein einstelliger kontradiktorischer Prädikator Φ ist so charakterisiert, daß es aus analytischen Gründen (↑) keinen Gegenstand gibt, dem er zukommt: Gäbe es einen viereckigen Kreis: sei x ein solcher. Dann ist x viereckig, also ist x kein Kreis. Ferner ist x aber Kreis. Damit fällt die Annahme: Es gibt keinen viereckigen Kreis. Erweitert man eine konsistente Sprache ordnungsgemäß um einen kontradiktorischen Prädikator Φ, so führt das nicht zur Inkonsistenz, sondern nur zur Beweisbarkeit der negierten Partikularaussage $\neg\bigvee\xi\Phi(\xi)$. Kontradiktorische Prädikatoren sind exempelfrei, obwohl nicht alle exempelfreien Prädikatoren kontradiktorisch sind; man betrachte etwa '..Hörer-der-Logik-II-Vorlesung-im-SS 2000-über-2m' oder '..seriöser-Greifswalder-Philosophie-Professor-im Jahr 2000'.

Die überlieferte Logik und Argumentationslehre kennt weitere Phänomene, die als Widersprüche geführt werden. Von diesen wird im Kontext der philosophischen

Methodenlehre insbesondere die contradictio exercita bzw. die contradictio in actu exercito interessieren, die durch [2] exemplifiziert wird (↑16.).

Es ist für viele Zwecke hilfreich, bezüglich (In)Konsistenz vier resp. fünf Fragen zu unterscheiden: die Explikationsfrage, die Nachweisfrage, die Entstehungs- und Behebungsfrage und die Rechtfertigungsfrage. – Die Explikationsfrage zielt auf die Natur der (In)Konsistenz. Sie wird durch Definitionen wie die oben vorgelegten (↑5.1.3) beantwortet. – Erweitert man die Gesamtperspektive dergestalt, daß man alternative Folgerungsreglements und damit alternative Folgerungsrelationen berücksichtigt, dann ergeben sich auch alternative Konsistenzbegriffe (↑ZUSATZ).

Auf Basis der Beantwortung der Explikationsfrage läßt sich die Nachweisfrage aufwerfen: Ist die Aussagenklasse *X* (in)konsistent. Dabei ist die Teilfrage nach der Inkonsistenz der einfachere Part: Man hat aus *X* lediglich eine Aussage und ihre Negation herzuleiten. Historische Beispiele, insbesondere die Entdeckung der Antinomien der Klassensprache, zeigen indes, daß die Aufdeckung der Inkonsistenz besonders dann eine nichtriviale Aufgabe ist, wenn die betrachtete Klasse über Aussagenschemata gegeben ist.

Die Teilfrage nach dem Konsistenznachweis hat zwei Antworten: Konsistenz wird – wie in der Diskussion des Links-Rechts-Beispiels (↑5.1.3) – relativ nachgewiesen: Wenn das Modell für die betrachtete Aussagenklasse konsistent ist, also die Klasse der interpretierenden arithmetischen Aussagen, dann auch diese. Der absolute Nachweis zielt darauf, ohne Rückgriff auf ein Modell, d.h. ohne Rückgriff auf eine andere Sprache, zu zeigen, daß wenigstens eine Aussage nicht aus *X* folgt. – In beiden Fällen ergeben sich jedoch Folgefragen bezüglich der (In)Konsistenz der zum Nachweis benutzten Sprache.

Die Entstehungs- und Behebungsfrage sind naturgemäß miteinander verknüpft: Wie entstehen Inkonsistenzen und wie läßt sich Konsistenz (wieder)herstellen. Da das Inkonsistenzphänomen alle Bereiche des Erkenntnisgeschäfts überdeckt, sind ganz verschiedene, oft bereichsvariante Antworten erwartbar. Gleichwohl gibt es übergreifende Diagnosen und Therapien. Exemplarisch erinnert sei an die Stelligkeitserhöhung (↑1.1.1). Diese Strategien bereitzustellen und fortlaufend zu verbessern, ist eine zentrale Aufgabe der Philosophie als konzeptiv-diskursiver Grunddisziplin.

Die Rechtfertigungsfrage lautet: Warum – besser: Wozu – soll man im Erkenntnisgeschäft Inkonsistenz meiden und Konsistenz herstellen? Diese Frage wird häufig unter Rückgriff auf den Titel ’das (Nicht)Widerspruchsprinzip’ formuliert: Warum gilt das (Nicht)Widerspruchsprinzip bzw. das principium (non-)contradictionis? In Klärung dieser Fragestellung ist

zunächst festzuhalten, daß die Ausdrucksverbindung ’das (Nicht)Widerspruchsprinzip’ in wenigstens fünffacher Weise gedeutet werden kann.

Erstens: Zufolge der <u>empirisch-psychologischen</u> Lesart besagt das (Nicht)Widerspruchsprinzip: Es ist empirisch ausgeschlossen, daß ein (normalsinniger) Mensch zugleich von einer Aussage A und der Negation von A überzeugt ist. Diese Aussage ist nach empirischen Kriterien zu bewähren, zu bestätigen bzw. zu falsifizieren. Dabei wird die Bedeutung von ’es ist empirisch ausgeschlossen___’ bzw. von ’..ist überzeugt von..’ eine wesentliche Rolle spielen. Für diese Lesart ist die Rechtfertigungsfrage nicht einschlägig.

Zweitens: Die <u>(junktoren)logische</u> Lesart des Widerspruchsprinzip lautet, wie gesehen (↑4.2.4), einfach $\neg(A\wedge\neg A)$. <u>Quantorenlogische</u> Deutungen sind z.B. $\neg\bigvee\xi(\Delta\wedge\neg\Delta)$, $\bigwedge\xi\neg(\Delta\wedge\neg\Delta)$, $\neg(\bigwedge\xi\Delta\wedge\bigvee\xi\neg\Delta)$ usf. Für diese Aussagen(schemata) gibt es Beweise: Sie sind logisch-wahr und bedürfen insofern keiner Rechtfertigung.

Drittens: <u>Ontologische</u> Lesarten machen von genuin ontologischem Vokabular Gebrauch. Beispiele: Es ist nicht der Fall, daß ein Sachverhalt eine Tatsache ist und keine Tatsache ist. Unmöglich kommt dasselbe demselben unter derselben Rücksicht zu und nicht zu. Was ist, kann nicht unter derselben Rücksicht nicht sein. Auf Basis einer Formatierung muß sich zeigen, ob solche Aussagen logisch-wahr sind oder logisch-indeterminiert. Im ersten Fall existiert ein logischer Beweis. Im zweiten Fall hat man im Rückgriff auf die ontologischen Eigenausdrücke über Wahrheit/Falschheit zu befinden. In beiden Fällen ist jedoch die Rechtfertigungsfrage uneinschlägig.

Viertens: <u>Alethiologische</u> Lesarten machen vom Wahrheitsvokabular Gebrauch. Beispiele: (i) Nicht: Γ ist wahr und Γ ist nicht wahr. (ii) Nicht: Γ ist wahr und Γ ist falsch. (iii) Nicht: Γ ist wahr und die Negation von Γ ist wahr. (i) ist logisch wahr. (ii) ist wahr, falls z.B. ’..ist falsch’ über ’..ist nicht wahr’ definiert wird. (iii) muß auf nichtlogischem Wege, also im Rückgriff auf die Bedeutung der alethiologischen Vokabel, entschieden werden. In keinem Fall wird aber die oben angedeutete Rechtfertigungsfrage bedeutsam.

Fünftens: Die <u>methodologischen</u> Lesarten lauten etwa: (Re)Konstruiere Sprachen so, daß die entstehende Klasse wahrer Aussagen konsistent ist. Stelle im Inkonsistenzfall Konsistenz her. Kurz: Sei im Erkenntnisvollzug konsistent! – Es ist diese das Erkenntnisgeschäft gestaltende Norm, für die die Rechtfertigungsfrage einschlägig wird.

Wäre, so der Kerngedanke der Rechtfertigung, eine Sprache so gestaltet, daß sie inkonsistente wahre Aussagenklassen zuließe, dann gäbe es eine Aussage Δ, die gemeinsam mit ihrer Negation Konsequenz wäre. Mit dem Ex-falso-quodlibet folgte damit

jede beliebige Aussage Γ. Da Konsequenzen wahrer Aussagen ihrerseits wahr sind, wäre jede beliebige Aussage Γ wahr.

Für die Objektebene geredet: Kein Gegenstand ist von einem anderen unterscheidbar: Jede Eigenschaft, die einem Gegenstand zukommt, kommt auch allen anderen zu. Jeder Gegenstand ist mit jedem identisch – und auch von ihm verschieden. In einer solchen Sprache wären die Institutionen von Irrtum und Lüge aufgehoben. Man könnte keinerlei Informationen einholen und alle Antworten auf alle Fragen wären gegenstandslos: Jede beliebige abweichende Antwort wäre gleichermaßen gültig.

Warum aber sollen, so könnte der Konsistenzskeptiker nachsetzen, Sprachen (und ihre Analysesprachen) konsistent sein? Warum soll überhaupt Unterscheidbarkeit gewährleistet sein? Welche Überlegungen lassen sich für die Inkonsistenzintoleranz ins Feld führen? – Faßt man diese deutungsbedürftige Frage als Frage nach den Zwecken, denen das alethische (und auch das übrige) kognitive Geschäft dient, und betrachtet man die Konsequenzen der Inkonsistenz für die Objektsprachen, dann ergibt sich: Inkonsistente Sprachen führen zur Ununterscheidbarkeit und können deshalb das weitere (Rede- und Nichtrede)Handeln nicht orientieren: Wenn, um den locus classicus zu variieren, die Gegenstände nicht mehr unterscheidbar sind, ist der Weg nach Athen auch der Weg nach Megara und der Brunnen vor mir ist zugleich sicher beschreitbarer Grund. Dann kann der Wanderer den Weg nach Athen nehmen, um nach Megara zu kommen, und getrost weitergehen, wenn sich vor ihm ein Brunnenabgrund auftut. Mehr noch: Nicht einmal die Zwecksetzung ist noch realisierbar: Wer das In-den-Brunnen-stürzen für gut hält, hält es zugleich für nicht gut. Damit verfehlt aber das Handeln nicht nur seine Zwecke. Diese sind nicht einmal mehr in unterscheidbarer Weise zu artikulieren, das Zweckkataster wird >blind< und das Wollen verliert seine Ziele. Faßt man auch das Zwecksetzen als zweckdienliches Handeln, dann läßt sich zusammenfassend formulieren: Zweckdienliches Handeln ist nur durch Unterscheidbarkeit garantiert. Nur Konsistenzberücksichtigung sichert Unterscheidbarkeit. Also ist Konsistenz gerechtfertigt als (notwendige) Bedingung für zweckdienliches Handeln >überhaupt<.

Die Verteidigung des (Nicht)Widerspruchsprinzips in seiner methodologischen Lesart ist durch zwei Hinweise zu flankieren: <u>Zum einen</u> ist Konsistenz für die Organisation des Erkenntnisgeschäfts nicht nur unverzichtbar, sondern auch alleine <u>unzureichend</u>: Konsistenz vermag weder die Setzung gerade dieser und jener Prinzipien zu steuern, noch generiert sie etwa Konstatierungsregeln. Konsistenz gewinnt ihre limitierende Kraft nur dann, wenn sie auf einen Input an zu limitierenden Material zugreifen kann. In Isolation stellt sie keinen

kognitiven Wert dar: Konsistent ist auch die leere Aussagenklasse; und der gänzliche Verzicht auf Redehandlungen bewahrt in narrensicherer Weise davor, sich in Widersprüche zu verwickeln. No risk, no fun! Das Widerspruchsprinzip stellt die Leitplanken, aber nicht den Motor für die Erkenntnisfahrt.

Zum andern wird mit Überlegungen zur Sicherung und Wiederherstellung von Konsistenz der rein logische Bereich überschritten. Weitere methodologische und materiale Prinzipien müssen hier greifen. Mit rein logischen Mitteln erfolgt lediglich die Konsistenzdiagnose!

Ü8 a) Lesen Sie THOMAS VON AQUIN SthIq1a6. Thomas verhandelt dort das Vorgehen für den Fall, daß zwei Wissenschaften miteinander in Widerspruch geraten. Welches sind diese Wissenschaften? Nach welchem materialen Prinzip löst Thomas die inkonsistente Situation auf?

b) In NELSON, L.: Geschichte und Kritik der Erkenntnistheorie (= Gesammelte Schriften 2); Hamburg 1973, S.10, heißt es: „..; jedes Philosophem, das den exakten Wissenschaften widerstreitet, muß notwendig falsch sein.“ – Setzen Sie diese Einstellung in ein Inkonsistenzbehebungsprinzip um!

5.2 Verfahren der Diskursvereinfachung

Der vorangehende Punkt entwickelte die (meta)logische Perspektive: Im Rückgriff auf die Regeln für die logischen Operatoren konnte ein Ableitungs- und ein Folgerungsbegriff bestimmt werden, mit deren Hilfe die gebräuchlichen (meta)logischen Konzepte mit Schwerpunkt auf der (In)Konsistenz definiert worden sind. Insgesamt ist man damit imstande, regelgerecht zu folgern sowie Aussagenzusammenhänge unter (meta)logischen Gesichtspunkten zu beurteilen. – Die in der Folge vorgestellten Verfahren vereinfachen die bislang gegebenen Möglichkeiten in verschiedener Hinsicht: Die Non-Sequitur-Diagnose ist eine leicht handhabbare Prozedur um nachzuweisen, daß eine Aussage nicht Konsequenz einer Aussagenklasse ist (5.2.1). Mit Hilfe zulässiger Regeln, der Anziehung logisch wahrer sowie der Substitution logisch äquivalenter Aussagen läßt sich das Schlußgeschäft wirksam abkürzen (5.2.2).

5.2.1 Die Non-Sequitur-Diagnose

Um nachzuweisen, daß eine Aussage Γ Konsequenz einer Aussagenklasse X ist, legt man eine Ableitung von Γ aus X vor. Will man hingegen zeigen, daß Γ nicht Konsequenz aus X

ist, hat man den Beweis dafür anzutreten, daß es eine solche Ableitung nicht gibt. Da derartige Überlegungen mit erheblichem Aufwand verbunden sind, legt es sich nahe, auf Basis einer alternativen, aber gleichwertigen Charakterisierung der Folgerung ein leicht handhabbares Verfahren zur Non-Sequitur-Diagnose bereitzustellen.

Der Rückblick zeigt, daß (nicht nur bei der Bestimmung der maximalkonsistenten Untermengen (↑5.1.3), sondern) schon im Auftaktkapitel eine derartige Prozedur verwendet worden ist (↑1.1.2): Zwischen Prämissen und (angeblicher) Konklusion konnte, so die dort verwendete Metapher, durch Angabe von Gegenbeispielen ein Zaun gezogen werden: Die nunmehr formatiert darstellbare Aussage '$\bigwedge x$(Handlung(x)$\rightarrow\bigvee z$(Zweck(z)$\wedge$Wird-verfolgt-mit(z,x)))' resp. die aus ihr bildbare Einerklasse hat deshalb die Aussage '$\bigvee z$(Zweck(z)$\wedge\bigwedge x$(Handlung(x)$\rightarrow$Wird-verfolgt-mit(z,x)))' nicht zur Konsequenz, weil es eine Interpretation gibt, die die erste Aussage wahr, die zweite jedoch falsch macht: Interpretiert man 'Handlung(..)' durch 'Ganze-Zahl(..)', 'Zweck(..)' durch 'Positive-ganze-Zahl(..)' und 'Wird-verfolgt-mit(..,..)' durch '..>..', dann wird die Prämisse, also die Aussage '$\bigwedge x$(Ganze-Zahl(x)$\rightarrow\bigvee z$(Positive-ganze-Zahl(z)$\wedge z>x$))', wahr, während die (angebliche) Konklusion, also '$\bigvee z$(Positive-ganze-Zahl(z)$\wedge\bigwedge x$(Ganze-Zahl(x)$\rightarrow$ $z>x$))', falsch wird. Da aus Wahrem aber nichts Falsches folgen darf, ist die betrachtete zweite Aussage keine Konsequenz der ersten.

Wie funktioniert dieses Verfahren im Detail? Wie ist insbesondere die Rede von der Interpretation zu verstehen? – Eine Interpretation besteht aus fünf Schritten:

[12] a) Niederschrift der zu interpretierenden Aussagen (=Interpretandum)

b) Spezifikation des Bereichs der Interpretation

c) Niederschrift der Interpretationsbeziehung

d) Niederschrift der interpretierenden Aussagen (=Interpretans)

e) Erhebung des alethischen Status der Interpretantia

Dieses Vorgehen soll umgehend an dem soeben erinnerten Beispiel vorgeführt werden:

[12]° a) $\bigwedge x$ (Handlung(x) $\rightarrow \bigvee z$ (Zweck(z) $\wedge$ Wird-verfolgt-mit(z,x)))

$\bigvee z$ (Zweck(z) $\wedge \bigwedge x$ (Handlung(x) $\rightarrow$ Wird-verfolgt-mit(z,x)))

b) Klasse der natürlichen Zahlen

c) Handlung(..) $\simeq_i$ Ganze-Zahl(..)

Zweck(..) $\simeq_i$ Positive-ganze-Zahl(..)

Wird-verfolgt-mit(..,..) $\simeq_i$ ..>..

d) $\bigwedge x$ (Ganze-Zahl(x) $\rightarrow \bigvee z$ (Positive-ganze-Zahl(z) $\wedge$ $z > x$))

$\bigvee z$ (Positive-ganze-Zahl(z) $\wedge \bigwedge x$ (Ganze-Zahl(x) $\rightarrow$ $z > x$))

e) Das erste Interpretans ist unter der arithmetischen Interpretation wahr. Das zweite Interpretans ist unter der arithmetischen Interpretation falsch.

Die Niederschrift der Interpretanda erfolgt im bekannten grammatischen Format. Dieses läßt die logische Struktur erkennen. Mögliche Interpretationskandidaten sind lediglich die atomaren Eigenausdrücke, die Teilausdruck des Interpretandums sind. Alle logischen Operatoren, also Quantoren, Junktoren und der Identitätsprädikator, sind keine Deutungskandidaten. Sie bilden lediglich das >Gerüst< der Interpretation. Interpretans und Interpretandum unterscheiden sich also nicht in der logischen Struktur, sondern in den Eigenausdrücken: So ist das erste Interpretandum eine universalquantifizierte Subjunktion, deren Sukzedens die Partikularquantifikation einer Konjunktion ist; und eben dies trifft auch auf das erste Interpretans zu.

Bei der unter b) erfolgten Angabe des Diskursbereichs bzw. des Bereichs der Interpretation bzw. des zugrundegelegten Individuenbereichs ist auf die Nichtleerheit dieser Klasse zu achten: Ließe man auch leere Interpretationsbereiche zu, dann könnte u.a. der Übergang von $\bigwedge \xi \Delta$ zu $\bigvee \xi \Delta$ als unzulässig erwiesen werden, weil die Partikularaussage unter einer solchen Interpretation allemal falsch wäre.

Unter c) wird die Interpretationsbeziehung dokumentiert: In der linken Spalte stehen die zu interpretierenden Teilausdrücke, in der rechten die interpretierenden. Das Zeichen '..$\simeq_i$..' wird gelesen als '..wird interpretiert/gedeutet durch bzw. als..'. Die Einträge in den beiden Spalten sind kategorial gleich: Einem k-stelligen Prädikator resp. Funktor in der linken korrespondiert ein k-stelliger Prädikator resp. Funktor in der rechten Spalte; und einer Individuenkonstante resp. einem Individuumparameter in der linken entspricht eine Individuenkonstante in der rechten Spalte.

Die Forderung nach Gleichstelligkeit von zu interpretierendem und interpretierendem Operator ist im folgenden Sinne cum grano salis zu lesen: Als interpretierender Ausdruck für z.B. ’Handlung(..)’ kann etwa auch ’..<1’ oder ’..ist-Vater-von-P.E.Bach’ oder ’$\bigvee y..>y$’ auftreten; und als interpretierender Ausdruck von ’Wird-verfolgt-mit(..,..)’ kann etwa auch ’$\bigvee y$ Ist-Summe-von(y,..,..) benutzt werden. Entscheidend ist dieselbe Anzahl freier Stellen im Interpretandum und Interpretans.

Unter d) erfolgt die Niederschrift des Interpretans. Dieses entsteht dadurch, daß die zu interpretierenden atomaren Eigenausdrücke an allen Stellen ihres Vorkommens durch die interpretierenden Ausdrücke ersetzt werden. Durch diese Operation bleibt die logische Struktur unberührt. Das Interpretationskonzept läßt sich insgesamt so umschreiben: Eine Aussage A (einer Sprache *S*) ist Interpretation einer Aussage B (einer Sprache *S*’) bezüglich eines nichtleeren Individuenbereichs D, wenn man A dadurch erhält, daß man alle Prädikatoren und Funktoren von B durch gleichstellige Prädikatoren bzw. offene Formeln und Funktoren bezüglich D substituiert und indem man Individuenkonstanten und -parameter von B durch Individuenkonstanten für D-Individuen ersetzt.

Eine Aussagenklasse wird interpretiert, indem man jede einzelne Aussage dieser Klasse interpretiert; dabei sind die atomaren Eigenausdrücke in allen Aussagen gleich zu interpretieren: Kommt etwa ’Zweck(..)’ in mehreren Aussagen vor, dann ist ’Zweck(..)’ an allen Stellen seines Vorkommens durch denselben interpretierenden Ausdruck zu ersetzen.

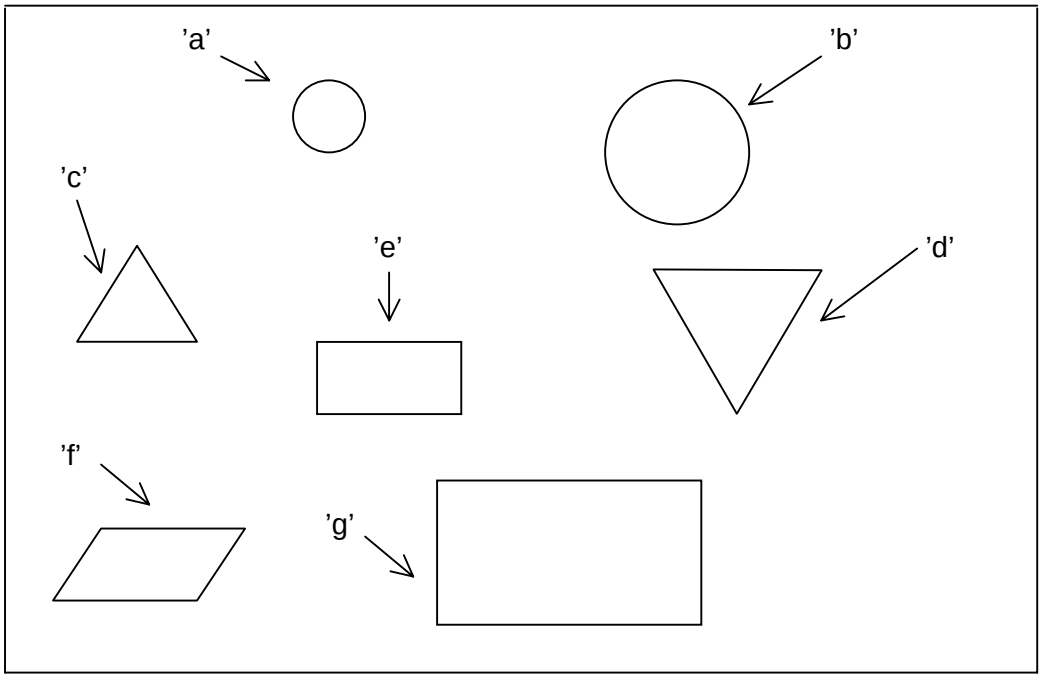
In e) erfolgt die Feststellung des Wahrheitsstatus der Interpretantia. Um diesen Schlußakt zu einer leicht vollziehbaren und anfechtungsfreien Handlung zu machen, wird als interpretierende Sprache eine übersichtliche, häufig benutzte und gut untersuchte Sprache gewählt: Neben Zahlen- und Klassensprachen erstellt man sich auch oft >Baukastensysteme<, in denen die alethischen Verhältnisse zweifelsfrei sind; besonders geeignet zur Illustration sind auch Pfeilfiguren.

Eine Interpretation macht eine Aussagenklasse wahr, wenn sie jede Aussage der Klasse bzw. (im Falle endlicher Klassen) die Konjunktion der Aussagen wahr macht. Stellt man unter e) fest, daß die vorgenommene Interpretation die Aussagenklasse wahr macht, die (vorgebliche) Konsequenz bzw. deren Interpretans jedoch falsch wird, dann kann man das Non-Sequitur diagnostizieren.

Die Beherrschung der Non-Sequitur-Diagnose ist gebunden an die Fertigkeit des Interpretierens; daher soll diese zunächst exemplarisch eingeübt werden. Als erstes Interpretandum diene die Universalaussage ’$\bigwedge x$(Mensch(x)$\rightarrow$Sterblich(x))’ (=i)). Interpretiert man (auf dem Bereich der natürlichen Zahlen) ’Mensch(..)’ durch ’Primzahl(..)’ und

’Sterblich(..)’ durch ’Gerade-Zahl(..)’, dann ergibt sich dies falsche Interpretans ’$\bigwedge x$(Primzahl(x)$\rightarrow$Gerade-Zahl (x))’ (=ii)). Deutet man hingegen ’Mensch(..)’ durch ’..>12’ und ’Sterblich(..)’ durch ’..>10’, dann resultiert mit ’$\bigwedge x(x>12\rightarrow x>10)$’ (=iii)) ein wahres Interpretans. – Man betrachte nun folgenden Baukasten:

[13]



Die Buchstaben benennen die Figuren. Für die folgenden Interpretationen werden die Prädikatoren ’Ist-Kreis(..)’, ’Ist-Dreieck(..)’, ’Ist-Viereck(..)’ und ’Ist-Vieleck(..)’ in ihrer üblichen Bedeutung verwendet; so gelten z.B. in der Baukastensprache die Aussagen ’Ist-Dreieck(d)’, ’Ist-Kreis(b)’ und ’$\neg\bigvee x$(Kreis(x)$\wedge$Ist-Viereck(x))’. – Diese Miniatursprache findet bedarfsweise Erweiterung. Deutet man vor dem Hintergrund des Baukastenuniversums ’Mensch(..)’ durch ’Ist-Viereck(..)’ und ’Sterblich(..)’ durch ’Ist-Vieleck(..)’, dann resultiert mit ’$\bigwedge x$(Ist-Viereck(x)$\rightarrow$Ist-Vieleck(x))’ (=iv)) eine wahre Interpretation. Dagegen ist die Aussage ’$\bigwedge x$(Kreis(x)$\rightarrow$Dreieck(x))’ (=v)) eine falsche Interpretation in der Baukastensprache; sie entsteht durch die Deutung von ’Mensch(..)’ durch ’Ist-Kreis(..)’ und von ’Sterblich(..)’ durch ’Ist-Dreieck(..)’. Die folgende Liste enthält das Interpretandum sowie die vier vorgenommenen Deutungen:

[14] i) $\bigwedge x$ (Mensch(x) $\rightarrow$ Sterblich(x))

ii) $\bigwedge x$ (Primzahl(x) $\rightarrow$ Gerade-Zahl (x))

iii) $\bigwedge x$ ($x > 12 \rightarrow x > 10$)

iv) $\bigwedge x$ (Ist-Viereck(x) $\rightarrow$ Ist-Vieleck(x))

v) $\bigwedge x$ (Kreis(x) $\rightarrow$ Dreieck(x))

Logisch indeterminierte Aussagen sind dadurch ausgezeichnet, daß sie wahre wie auch falsche Interpretation besitzen. Anders als bei logisch determinierten Aussagen entscheidet eben nicht schon die Bedeutung der logischen Operatoren alleine über den alethischen Status. – Die folgende Tabelle enthält ein früheres Beispiel (↑[4]) als Interpretandum und wiederum je eine wahre und eine falsche arithmetische und baukastensprachliche Interpretation; die Deutungszuordnung läßt sich unschwer herstellen:

[15] i) $\neg \bigvee x$ (Duty(x) $\wedge$ Binds-universally(x))

ii) $\neg \bigvee x$ (Gerade-Zahl(x) $\wedge$ Ungerade-Zahl(x))

iii) $\neg \bigvee x$ (Gerade-Zahl(x) $\wedge$ Primzahl(x))

iv) $\neg \bigvee x$ (Dreieck(x) $\wedge$ Kreis(x))

v) $\neg \bigvee x$ (Dreieck(x) $\wedge$ Vieleck(x))

Ü9 Kürzen Sie mit '..G..' den Prädikator '..ist gleichschwer..' und mit 'P(..)' den Prädikator 'Ist-physikalischer-Körper(..)' ab! Liefern Sie eine arithmetisch-wahre und eine arithmetisch-falsche sowie eine baukasten-wahre und eine baukasten-falsche Interpretation der folgenden Aussagenklasse:

{'$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z$ (x G $y \wedge y$ G $z \rightarrow x$ G z)', '$\bigwedge x \bigwedge y$ (P(x) $\wedge$ P(y) $\rightarrow$ (x G $y \vee y$ G x))'}

Für die Baukasteninterpretation ist die Sprache um geeignete zweistellige Prädikatoren zu erweitern wie etwa '..ist eckengleich..', '..ist eckenkleiner..' usf.

Wie die Aussagen von Beispiel [15] und von Ü9 zeigen, müssen Interpretanda, nicht wahr sein; im ersten Fall ist der Wahrheitsstatus offen, im zweiten Fall ist das Interpretandum als Ganzes falsch. – Die folgende Tabelle bietet eine Interpretation einer Aussage mit Individuenkonstanten:

[16] a) Philosoph(Sokrates) $\wedge$ Lehrer-von(Sokrates, Platon)

b) Klasse der natürlichen Zahlen

c) Sokrates $\simeq_i$ 5

Platon $\simeq_i$ 10

Philosoph(..) $\simeq_i$ Primzahl(..)

Ist-Lehrer-von(..,..) $\simeq_i$ ..<..

d) Primzahl(5) $\wedge$ 5 < 10

e) Das Interpretans ist wahr, d.h. das Interpretandum ist unter der angenommenen arithmetischen Interpretation wahr.

Verändert man die Interpretation von ’Sokrates’, indem man ’4’ als Interpretans wählt, dann ergibt sich das falsche Interpretans ’Primzahl(4)$\wedge$4<10’. – Eine wahre Interpretation aus der Baukastensprache wäre ’Rechteck(e)$\wedge$Eckengleich(e,f)’; mit ’Dreieck(e)$\wedge$Eckengleich(e,f)’ ist hingegen eine falsche Interpretation gegeben.

Interpretiert man den Funktor ’der-Vater-von(..)’ durch ’ quer(..)’ (Lies: die-Quersumme-von(..)), den Funktor ’die-Mutter-von(..)’ durch ’..²’ (Lies: das-Quadrat-von(..)), ferner: den Prädikator ’Verheiratet-mit(..,..)’ durch ’..<..’, schließlich die Individuenkonstante ’Hans’ durch ’4’, dann ergibt sich für das Interpretandum ’Verheiratet-mit(der-Vater-von(Hans),die-Mutter-von(Hans))’ (=i)) das wahre Interpretans ’<(quer(4), 4²)’ (=ii)). Interpretiert man hingegen ’Verheiratet-mit(..,..)’ durch ’..>..’, dann erhält man das falsche Interpretans ’>(quer(4), 4²)’ (=iii)).

[17] i) ’Verheiratet-mit(der-Vater-von(Hans), die-Mutter-von(Hans))’

ii) ’<(quer(4), 4²)’

iii) ’>(quer(4), 4²)’

Abschließend sei noch erwähnt, daß es auch in dem Sinne >innere< Interpretationen gibt, als z.B. arithmetische Interpretanda arithmetisch interpretiert werden können. So ist etwa ’$\bigwedge x$Primzahl(x)$\rightarrow x\geq 10$’ eine (falsche) arithmetische Interpretation von ’$\bigwedge x(x>10\rightarrow x\geq 5)$’ und ’$\bigwedge x\bigwedge y(x\circ y=y\circ x)$’ ist eine (wahre) arithmetische Interpretation von ’$\bigwedge x\bigwedge y(x+y=y+x)$’.

Nach dieser Einübung ins Interpretieren soll der Blick nochmals auf den Folgerungsbegriff und seine Charakterisierungen gewendet werden: Die Definition von ’..$\vdash$..’ über den Ableitungsbegriff ist von folgender Idee geleitet: Ob Γ aus X folgt, wird durch die Regeln für

die logischen Operatoren fixiert. Anders: Es hängt von der Bedeutung der logischen Operatoren ab – und nur von dieser –, ob eine Aussage aus einer Aussagenklasse folgt. Umgekehrt spielt also die Bedeutung der Eigenausdrücke der Aussagen für das (Nicht)Bestehen der Konsequenzschaft keine Rolle. Man betrachte dazu die Gebilde:

[18] i) {'$\bigwedge x$ Mensch(x)'} $\vdash$ '$\neg \bigvee x \neg$ Mensch(x)'

ii) $\vdash$ '$\bigwedge x$ Mensch(x) $\rightarrow \neg \bigvee x \neg$ Mensch(x)'

i) und ii) sind nach dem Deduktionstheorem bzw. seiner Umkehrung gleichwertig. Den Umstand, daß die Bedeutung der Eigenausdrücke keine Rolle für den Folgerungszusammenhang bzw. die logische Wahrheit spielt, kann man dadurch ausdrücken, daß die Folgerungsbeziehung, die logische Wahrheit, unter jeder Interpretation von 'Mensch(..)' bestehen bleibt. Nimmt man noch den Gedanken hinzu, daß das Schließen nicht von Wahrem zu Falschem führen darf, dann ergibt sich folgende abschließende Charakterisierung von Konsequenzschaft mit Hilfe der Interpretationsbegrifflichkeit: Γ folgt genau dann aus X - $X \vdash \Gamma$ -, wenn jede Interpretation, die X wahr macht (verifiziert, in X ein Modell hat), auch Γ wahr macht (verifiziert, in Γ ein Modell hat).

Diese zweite Charakterisierung von Konsequenzschaft ist mit der ersten äquivalent (und auch nur insoweit erlaubt (↑11.)): Es gibt genau dann eine Ableitung von Γ aus X, wenn jede Interpretation, die X wahr macht, auch Γ wahr macht. (Der Beweis dieses Lehrsatzes bildet den Abschluß eines jeden Logikkurses (↑ANMERKUNG)).

Der für die Non-Sequitur-Diagnose hilfreiche Aspekt besteht in der Charakterisierung der Nicht-Konsequenz. Γ ist nicht Konsequenz aus X – $X \nvdash \Gamma$ – genau dann, wenn es wenigstens eine Interpretation gibt, die X wahr macht, Γ aber falsch. – Es ist genau dieser begriffliche Zusammenhang, der die Non-Sequitur-Diagnose zu einem leicht handhabbaren und universell einsetzbaren Verfahren macht. Dies sei nochmals an zwei Beispielen vorgeführt. Zunächst wird gezeigt, daß die Aussage '$\bigwedge$y(Naturwissenschaftler(y)$\rightarrow$Wissenschaftler(y))' keine Konsequenz aus der Aussagenklasse {'$\bigwedge$z(Physiker(z)$\rightarrow$Wissenschaftler(z))', '$\bigwedge$w(Physiker(w)$\rightarrow$Naturwissenschaftler(w))'} ist.

[19] a) $\bigwedge z$ (Physiker(z) $\rightarrow$ Wissenschaftler(z))

$\bigwedge w$ (Physiker(w) $\rightarrow$ Naturwissenschaftler(w))

$\bigwedge y$ (Naturwissenschaftler(y) $\rightarrow$ Wissenschaftler(y))

b) Klasse der natürlichen Zahlen

c) Physiker(..) $\simeq_i$ ..> 10

Wissenschaftler(..) $\simeq_i$ ..> 5

Naturwissenschaftler(..) $\simeq_i$ ..> 1

d) $\bigwedge z\ (z > 10 \rightarrow z > 5)$

$\bigwedge w\ (w > 10 \rightarrow w > 1)$

$\bigwedge y\ (y > 1 \rightarrow y > 5)$

e) Die Prämissen sind unter der vorgenommenen arithmetischen Interpretation wahr, die (vorgebliche) Konklusion ist jedoch falsch.

Auf Basis der Feststellung der alethischen Gegebenheiten unter e) kann man schließen, daß die (vorgebliche) Konklusion >in Wirklichkeit< nicht aus der Prämissenklasse folgt. – Anbei: Die Elemente der Prämissenklasse sind wahr und die als Konklusion hingestellte Aussage ist ebenfalls wahr. Dennoch stehen sie nicht in der Folgerungsrelation. Das Corpus der wahren Aussagen ist also bezüglich der Konsequenzschaft nicht so gebildet, daß zwischen jeder Klasse wahrer Aussagen und einer wahren Aussage allemal die Folgerungsbeziehung besteht. – Das zweite Beispiel wird nur in den Schritten a) und d) notiert:

[20] a) Südlich-von(Rom, München)

Südlich-von(München, Hamburg)

Südlich-von(Rom, Hamburg)

d) Vorgänger-von(3, 4)

Vorgänger-von(4, 5)

Vorgänger-von(3, 5)

Unter der vorgenommenen arithmetischen Interpretation sind die beiden ersten Aussagen wahr, während die letzte falsch ist. Diese ist also keine Konsequenz aus der Klasse der beiden ersten.

An dieser Stelle mag die Schlußintuition Widerspruch anmelden: Das hängt nicht nur damit zusammen, daß Prämissen und Konklusion wahr sind, sondern wird vornehmlich durch die Natürlichkeit einer >mitgedachten< Prämisse herbeigeführt: Wegen der unterstellten Transitivität des Südlichliegens – $\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z$(Südlich-von($x$, y) $\wedge$ Südlich-von(y, z) $\rightarrow$ Südlich-von(x, z)) – erscheint der Schluß korrekt. Er erfüllt diese Qualität aber erst, wenn man die

Transitivität tatsächlich hinzufügt. Die Non-Sequitur-Diagnose zwingt also dazu, >stillschweigend unterstellte< bzw. >implizite< Prämissen aufzudecken.

Ü 10 Zeigen Sie, daß

a) {'$\bigvee x$ (Philosoph(x) $\wedge$ Gestört(x))', '$\bigvee x$ (Professor(x) $\wedge$ Gestört(x))'} $\nvdash$ '$\bigvee x$ (Philosoph(x) $\wedge$ Professor(x))'

b) {'$\bigwedge x$ (Mensch(x) $\rightarrow$ Organismus(x))', '$\bigvee x$ (Organismus(x) $\wedge$ Kurzlebig(x))'} $\nvdash$ '$\bigvee x$ (Mensch(x) $\wedge$ Kurzlebig(x))'

Mit Hilfe der Non-Sequitur-Diagnose läßt sich auch feststellen, ob eine Klasse X konsistent ist: Man hat nur von einer Aussage Δ zu zeigen, daß sie nicht aus X folgt; und dazu muß man lediglich eine Interpretation angeben, die die Elemente von X wahr macht, Δ aber falsch. Das Verfahren läßt sich noch vereinfachen: Man braucht zum Konsistenznachweis lediglich zu zeigen, daß es eine Interpretation gibt, die die Elemente von X wahr macht. Würde nämlich Δ und $\neg\Delta$ aus einer derartigen Klasse folgen, also eine falsche Aussage, dann würde aus wahren Aussagen eine falsche folgen – was der Folgerungscharakterisierung zuwiderläuft.

Die Non-Sequitur-Feststellung ist auch das geeignete Instrument zur (Un)Entscheidbarkeitsuntersuchung: Zufolge der Definition der (Un)Entscheidbarkeit einer Aussage durch eine Aussagenklasse ist zu untersuchen, ob die Aussage oder ihre Negation aus der Klasse folgt; und um zu zeigen, daß eine ganze Aussagenklasse (nicht)redundant ist, ist für jedes Element der Klasse das Folgerungsverhältnis zum Rest zu klären. – Die auf der Klasse der physikalischen Körper (mittlere Größe) erklärte Relation des Gleichschwerseins ist ein geläufiges Beispiel für Gleichheiten (↑Ü9). Diese können u.a. durch die folgenden drei Prinzipien der Geschlossenheit (=GE), der Reflexivität (=RE) und der Linkskomparativität (=LK) charakterisiert werden:

[21] $\bigwedge x \bigwedge y\ (x\ \mathrm{G}\ y \rightarrow \mathrm{P}(x) \wedge \mathrm{P}(y))$ [GE]

$\bigwedge x\ (\mathrm{P}(x) \rightarrow x\ \mathrm{G}\ x)$ [RE]

$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z\ (x\ \mathrm{G}\ y \wedge x\ \mathrm{G}\ z \rightarrow y\ \mathrm{G}\ z)$ [LK]

Andere Gleichheitsprinzipien sind aus dieser Dreierklasse unschwer zu gewinnen: Zum Nachweis der Feldeigenschaft – '$\bigwedge x(\mathrm{P}(x) \leftrightarrow \bigvee y(y\mathrm{G}x \vee x\mathrm{G}y))$' – genügt GE und RE. Zum Nachweis der Symmetrie – '$\bigwedge x \bigwedge y(x\mathrm{G}y \rightarrow y\mathrm{G}x)$' – sind alle charakterisierenden Prinzipien nötig. Transitivität – '$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z(x\mathrm{G}y \wedge y\mathrm{G}z \rightarrow x\mathrm{G}z)$' –, Rechtskomparativität –

'$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z(xGz \wedge yGz \rightarrow xGy)$' – und Zirkularität – '$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z(xGy \wedge yGz \rightarrow zGx)$' – ergeben sich dann mit Symmetrie.

Ü11 Zeigen Sie, daß Symmetrie, Transitivität, Rehtskomparativität und Feld Konsequenzen aus {GE, RE, LK} sind.

Die Klasse {GE, RE, LK} wäre nun deduktiv redundant bzw. abhängig, wenn wenigstens eine der drei Aussagen aus den verbleibenden ableitbar wäre. Kann hingegen für jede der drei Aussagen gezeigt werden, daß sie keine Konsequenz aus dem Rest ist, dann ist die Aussagenklasse nicht redundant bzw. unabhängig. Die Problemlösung hat folgenden Verlauf:

[22] i) OB {GE, RE, LK} ist deduktiv redundant

ii) OB {GE, RE} $\vdash$ LK

ii-i) Ja $\dashrightarrow$ {GE, RE, LK} ist deduktiv redundant

ii-ii) Nein $\dashrightarrow$ weiter zu iii)

iii) OB {GE, LK} $\vdash$ RE

iii-i) Ja $\dashrightarrow$ {GE, RE, LK} ist deduktiv redundant

iii-ii) Nein $\dashrightarrow$ weiter zu iv)

iv) OB {LK, RE} $\vdash$ GE

iv-i) Ja $\dashrightarrow$ {GE, RE, LK} ist deduktiv redundant

iv-ii) Nein $\dashrightarrow$ {GE, RE, LK} ist nicht deduktiv redundant

Um zu zeigen, daß {GE, RE}$\nvdash$LK, interpretiere man 'P(..)' durch 'NaZ(..)', '..G..' durch '..$\geq$..'. Es sind nun einerseits '$\bigwedge x \bigwedge y(x \geq y \rightarrow \mathrm{NaZ}(x) \wedge \mathrm{NaZ}(y))$' und '$\bigwedge x(\mathrm{NaZ}(x) \rightarrow x \geq x)$' wahre Aussagen der arithmetischen Sprache; andererseits ist aber '$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z(x \geq y \wedge x \geq z \rightarrow y \geq z)$' eine falsche arithmetische Aussage: Mit '$4 \geq 1 \wedge 4 \geq 3$' ist nicht '$1 \geq 3$' gegeben.

Um zu zeigen, daß {GE, LK}$\nvdash$RE, belasse man es bei der Interpretation von 'P(..)' durch 'NaZ(..)'; für '..G..' resp. 'xGy' wird mit '$x>10 \wedge y>10$' eine konjunktive Formel gewählt. Es sind dann zwar '$\bigwedge x \bigwedge y(x>10 \wedge y>10 \rightarrow \mathrm{NaZ}(x) \wedge \mathrm{NaZ}(y))$' sowie '$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z((x>10 \wedge y>10) \wedge (x>10 \wedge z>10) \rightarrow (y>10 \wedge z>10))$' wahr unter dieser Interpretation; aber die Aussage '$\bigwedge x(\mathrm{NaZ}(x) \rightarrow x>10 \wedge x>10)$' ist arithmetisch falsch.

Ins Anschauliche übersetzt, besagt LK: Trifft ein Pfeil, der von einem Relationsglied ausgeht, auf Relationsziele, dann sind auch diese wechselseitig durch die Relation verbunden. Wegen1*2$\wedge$1*2 gilt für die Relationsziele auch 2*2. Da aber nicht alle Relationsglieder den Rückkehrpfeil aufweisen, ist der *-Prädikator nicht reflexiv.

Um zu zeigen, daß {RE, LK}$\nvdash$GE wird ’P(..)’ durch ’Primzahl(..)’ und ’..G..’ durch den Identitätsprädikator interpretiert. Es sind ’$\bigwedge x$(Primzahl(x)$\rightarrow x=x$)’ sowie ’$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z(x=y \wedge x=z \rightarrow y=z)$’ wahre arithmetische Aussagen; demgegenüber stellt ’$\bigwedge x \bigwedge y(x=y \rightarrow$Primzahl($x$)$\wedge$Primzahl($y$))’ eine falsche Aussage unter dieser Interpretation dar.

Insgesamt stellt damit {RE, GE, LK} eine nicht redundante Klasse dar. Zieht man diese Aussagen gemeinsam zur Charakterisierung der Gleichheitsprädikatoren heran, dann kann man auf keine verzichten (↑6.).

Ü12 a) Ersetzen Sie in [21] die Linkskomparativität durch die Transitivität. Untersuchen Sie, ob die Symmetrie dann noch erreichbar ist. Führen Sie dieselbe Untersuchung durch nach Ersetzung der Linkskomparativität durch Rechtskomparativität und Zirkularität.

b) Zeigen Sie, daß die Aussage ’$\bigwedge x \bigwedge y(xGy \leftrightarrow P(x) \wedge P(y) \wedge \bigwedge z(zGx \leftrightarrow zGy))$’ mit der Konjunktion von RE, GE und LK äquivalent ist!

Die ausführliche Untersuchung der Prädikatoren ’P(..)’ und ’..G..’ resp. – in materialer Redeweise – der auf dem Bereich der physikalischen Körper erklärten Gewichtsgleichheit gilt nicht diesen singulären Verhältnissen als solchen; sie finden vielmehr nur insofern Aufmerksamkeit, als sie Gleichheiten X auf einem Bereich Φ repräsentieren. Die charakterisierenden Prinzipien können als metasprachliche Schemata so ausgedrückt werden:

[21]° $\bigwedge\omega \bigwedge\xi\ (\mathrm{X}(\omega, \xi) \rightarrow \Phi(\omega) \wedge \Phi(\xi))$ [GE]

$\bigwedge\omega\ (\Phi(\omega) \rightarrow \mathrm{X}(\omega, \omega))$ [RE]

$\bigwedge\omega \bigwedge\xi \bigwedge\zeta\ (\mathrm{X}(\omega, \xi) \wedge \mathrm{X}(\omega, \zeta) \rightarrow \mathrm{X}(\xi, \zeta))$ [LK]

Ganz analog lassen sich auch die folgenden Prinzipien wie Symmetrie und Transitivität oder auch das mit der Konjunktion von GE, RE und LK äquivalente Prinzip aus Ü 12 b) metasprachlich darstellen. – Die gesamte Rede von der Interpretation, von wahren und falschen Interpretantia usf. läßt sich auf derartige Schemata übertragen. So ergibt sich durch Interpretation von X durch ’..wertgleich..’ und von Φ durch ’Ware(..)’ eine wahre Interpretation

der unter [21]° gegebenen Prinzipienklasse Demgegenüber liefert '..<..' für X und 'NaZ(..)' für Φ eine falsche Interpretation.

Ü13 Liefern Sie eine weitere wahre und eine weitere falsche Interpretation für die Prinzipien von [21]°.

ANMERKUNG: Die lehrbuchübliche Darstellung der Logik umfaßt vier Teile: Im ersten Teil wird der Begriff der Sprache erster Stufe und der daraus entwickelbaren Begriffe (Terme, Formeln, Teilterme, Teilformeln, Substitution usf.) untersucht. Der zweite Teil bildet die Definition der sogenannten „syntaktischen", „kalkülmäßigen" Konsequenzrelation bzw. der Ableitbarkeitsrelation. Im Zuge dieser Ausführungen wird auch Konsistenz, Maximalkonsistenz usf. dargestellt. Der dritte Teil legt eine Definition des sogenannten „semantischen", „modelltheoretischen" Konsequenzbegriffs dar. Die Begrifflichkeit des zweiten Teils wird im einzelnen nachgezeichnet. Der logischen Beweisbarkeit korrespondiert z.B. die Allgemeingültigkeit und der Konsistenz entspricht die Erfüllbarkeit. Der vierte Teil zeigt schließlich, daß syntaktische und semantische Konsequenzschaft zusammenfallen. Dieser sogenannte Adäquatheitsbeweis sieht den semantischen Konsequenzbegriff als wesentlich an und zeigt dann, daß der syntaktische gegenüber diesem korrekt und vollständig ist. – Der hier vorgelegte Text ist an dieser Aufgabenstellung der Logik nicht interessiert, sondern zieht aus den bekannten logischen Zusammenhängen nur Nutzen für das verfolgte Propädeutikprojekt. Im Grammatikkapitel werden Begriffe des ersten Teils einer Logikdarstellung erörtert. 5.1 umfaßt Vokabel und Theoreme des zweiten Teils und 5.2 übt in die Handhabung der Begriffe des dritten Teils ein. Das Adäquatheitsergebnis wird dankbar übernommen. Außerdem wird die Standardeinstellung nicht geteilt, die sich an der Rede von Adäquatheit des Ableitbarkeitsbegriffs bzgl. des Konsequenzbegriffs ablesen läßt. Diese und verwandte Kontroversen gehören zur Philosophie der Logik.

5.2.2 Diskursabkürzung: Anziehung – Zulässige Regeln

Um nachzuweisen, daß eine Aussage Γ nicht Konsequenz einer Aussagenklasse *X* ist, ist eine Interpretation vorzunehmen, die *X* wahr macht, Γ jedoch falsch. Um nachzuweisen, daß eine Aussage Γ Konsequenz einer Aussagenklasse *X* ist, wird eine Argumentation für Γ aus *X* vorgelegt. Man betrachte nun die Argumentation für das Aussagenschema $(A\rightarrow B)\vee(B\rightarrow A)$ aus der leeren Klasse:

[23]	0	Es gilt	$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$	
	1	Wäre$_1$	$\neg (A \vee \neg A)$	
	2	Wäre$_2$	A	
	3	Also$_2$	$A \vee \neg A$	AE; 2
	4	Also$_1$	$\neg A$	NE; 1,3
	5	Also$_1$	$A \vee \neg A$	AE; 4
	6	Also	$\neg \neg (A \vee \neg A)$	NE; 1, 5
→	7	Also	$A \vee \neg A$	NB; 6
	8	Sei$_3$	A	
	9	Sei$_4$	B	
	10	Also$_{3,4}$	$B \wedge A$	KE; 8,9
	11	Also$_{3,4}$	A	KB; 10
	12	Also$_3$	$B \rightarrow A$	SE; 11
	13	Also$_3$	$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$	AE; 12
	14	Sei$_5$	$\neg A$	
	15	Sei$_6$	A	
	16	Wäre$_7$	$\neg B$	
	17	Also$_{6,7}$	$A \wedge \neg B$	KE; 15,16
	18	Also$_{6,7}$	A	KB; 17
	19	Also$_{5,6}$	$\neg \neg B$	NE; 14,18
	20	Also$_{5,6}$	B	NB; 19
	21	Also$_5$	$A \rightarrow B$	SE; 20
	22	Also$_4$	$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$	AE; 21
	23	Also	$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$	AB; 7,13,22

Der Beweis hat zwei Teile: Im ersten Teil wird mit der Ableitung des Tertium-non-datur aus der leeren Klasse die Basis für eine Fallunterscheidung geschaffen (Zeile 1-7). Die

Fallbetrachtung erfolgt in den Zeilen 8-13 resp. 14-22. Abschließend wird durch AB das Resümee gezogen.

Nun ist für zahlreiche Beweise, auf Basis des Tertium-non-datur zu arbeiten. Es stellt aber keinen kognitiven Gewinn dar, dieses Theorem(schema) immer wieder zu beweisen. Zudem ist die ständig zu wiederholende Schreib- bzw. die Kopierarbeit lästig und bindet unnötig Energien. Abhilfe wäre hier dadurch zu schaffen, daß man die Einspeisung schon bewiesener Aussagen(schemata) erlaubt.

Betrachtet man die Untersuchung des ersten Falls, so legt sich eine Abkürzung nahe, die den Umstand ausnutzt, daß auch das Verum-ex-quolibet, das Aussagenschema $A \rightarrow (B \rightarrow A)$, bereits bewiesen worden ist. Im zweiten Fall könnte man ganz analog auf das Schema $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ rekurrieren. Es ergäbe sich dann folgender Beweis:

[23]°→	1	[7]	Da	$A \vee \neg A$	
	2	[8]	Sei$_1$	A	
	3		Da	$A \rightarrow (B \rightarrow A)$	
	4	[12]	Also$_1$	$B \rightarrow A$	SB; 2,3
	5	[13]	Also$_1$	$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$	AE; 4
	6	[14]	Sei$_2$	$\neg A$	
	7		Da	$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$	
	8	[21]	Also$_2$	$A \rightarrow B$	SB; 6,7
	9	[22]	Also$_2$	$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$	AE; 21
	10	[23]	Also	$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$	AB; 1,5,9

Hinter der Zeilenziffer steht in viereckigen Klammern die Ziffer des „Originalbeweises“. Die Einsparung beträgt mehr als die Hälfte. Die so abgekürzte Argumentation verläßt den durch die Grundregeln gesteckten Rahmen nicht: Statt in Zeile 1 die Zeile [7] anzuziehen, könnte man ja die Zeilen 1 bis 7 des Originalbeweises notieren; Analoges gilt für die Zeilen 3 und 7. Die folgende Regel, die von einer Abhängigkeitenregulierung begleitet ist, macht die in [23]° ausgeführten Anziehungshandlungen >offiziell<, die durch ’Da__’ signalisiert werden.

[24] Man darf eine logisch-wahre Aussage in einer Argumentation anziehen.

[25] Wenn man eine Aussage in einer Argumentation anzieht, dann hat man sie in Abhängigkeit von der leeren Klasse gewonnen.

Die Anziehungsregel [24] ist strukturell formuliert, aber kontingent zu handhaben: Wenn in einem so oder auch anders angelegten Aufbau des Beweises logischer Wahrheiten eine Aussage Δ bereits beweisen worden ist, dann darf man sie anziehen. Wäre z.B. das Tertium-non-datur noch nicht bewiesen worden, hätte man es in [23]° auch nicht anziehen dürfen. – Die Anziehungsregel wird später (↑9.) erweitert.

Ü14 Gehen Sie zurück in Teil 4. Untersuchen Sie die Beweise in Ü8a), c), [47]°°, Ü11g), i) auf Abkürzungsmöglichkeiten durch Anziehung logisch-wahrer Aussagen!

Zurück zum Beispiel: Unter [23] wird bei der Betrachtung des ersten Falls in den Zeilen 8 bis 12 aus A die Subjunktion $(B \rightarrow A)$ gewonnen; dabei bleiben die Abhängigkeiten, genauer: die Abhängigkeit von $\{A\}$, bestehen. Man könnte diesen Weg abkürzen, indem man den indirekten Übergang von A zu $B \rightarrow A$ bei Bestehenbleiben der Abhängigkeiten erlaubt. Analog könnte man die zweite Fallbetrachtung abkürzen, indem man den direkten Übergang von $\neg A$ zu $A \rightarrow B$ erlaubt. Einschlägige Regeln könnten so lauten:

[26] Wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse *X* eine Aussage A resp. $\neg A$ gewonnen hat, dann darf man in Abhängigkeit von *X* eine Aussage $B \rightarrow A$ resp. $A \rightarrow B$ folgern.

Mit diesen beiden Regeln versehen, läßt sich [23]° um zwei weitere Zeilen zu [23]* kürzen; die in eckigen Klammern angesiedelten Zeilennummern stammen weiter aus [23]:

[23]*→	1	[7]	Da	$A \vee \neg A$	
	2	[8]	Sei$_1$	A	
	3	[12]	Also$_1$	$B \rightarrow A$	ZR; 2
	4	[13]	Also$_1$	$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$	AE; 3
	5	[14]	Sei$_2$	$\neg A$	
	6	[21]	Also$_2$	$A \rightarrow B$	ZR; 5
	7	[22]	Also$_2$	$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$	AE; 21
	8	[23]	Also	$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$	AB; 1,4,7

In den Zeilen 3 bzw. 7 wird die neue Regel, die zulässige Regel (=ZR), benutzt. Am rechten Zeilenrand ist die jeweilige Anwendungszeile notiert. – Ein zweites Beispiel: In Beweisen ergibt sich häufig die Situation, daß man eine Adjunktion $A \vee B$ sowie eine Negation $\neg B$ eines

Adjunktionsglieds gewonnen hat. Auf Basis dieser Diskurslage möchte man zu A übergehen; das kann so geschehen:

[27]	**...**	**...**	**...**	
	n	Ξ_X	$A \vee B$	
	n+1	Ξ_Y	$\neg B$	
	n+2	Sei_i	A	
	n+3	Sei_{i+1}	B	
	n+4	$Wäre_{i+2}$	$\neg A$	
	n+5	$Also_{i+1,i+2}$	$B \wedge \neg A$	KE; n+3,n+4
	n+6	$Also_{i+1,i+2}$	B	KB; n+5
	n+7	$Also_{Y,i+1}$	$\neg \neg A$	NE; n+1,n+6
	n+8	$Also_{Y,i+1}$	A	NB; n+7
	n+9	$Also_{X \cup Y}$	A	AB; n,n+2,n+8
	...	**...**	**...**	

Der Folgerungsweg ist nicht durch Eigenarten von A oder B bestimmt, sondern allein durch die Regeln für die Junktoren gebahnt. Man möchte ihn nicht in jeder derartigen Situation neuerlich vollziehen, sondern sogleich von der Adjunktion und der Negation eines Adjunkts zu dem anderen Adjunkt übergehen; als einschlägige Regel bietet sich an:

[28] Wenn man die Adjunktion einer Aussage A und einer Aussage B in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse *X* und die Negation von A resp. die Negation von B in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse *Y* gewonnen hat, dann darf man in Abhängigkeit von $X \cup Y$ die Aussage B resp. A folgern.

Jede Aussage, die mit Hilfe von [28] aus den beiden Prämissen erreichbar ist, ist allein mit den Einführungs- bzw. Beseitigungsregeln erreichbar. Betitelt man die Einführungs- bzw. Beseitigungsregeln in Abhebung von den zulässigen Regeln als Grund- bzw. Basisregeln, dann kann man mit der Weg-Ziel-Metapher formulieren: Mit den zulässigen Regeln lassen sich keine Schlußziele erreichen, die nicht auch mit den Grundregeln erreichbar wären; allerdings werden die Ziele auf kürzerem Wege erreicht. Neu ist also nicht das Schlußziel, sondern allein der Schlußweg. – Ein weiteres Beispiel aus der Quantorenlogik:

[29]	**...**	**...**	**...**	
	n	Ξ_X	$\bigwedge\omega\ \Delta$	
	n+1	Wäre_i	$\bigvee\omega \neg \Delta$	
	n+2	Sei_{i+1}	$[\beta, \omega, \neg \Delta]$	
	n+3	$\text{Also}_{i,i+1}$	$\bigvee\omega \neg \Delta \wedge [\beta, \omega, \neg \Delta]$	| KE; n+1,n+2
	n+4	$\text{Also}_{i,i+1}$	$[\beta, \omega, \neg \Delta]$	| KB; n+3
	n+5	Also_X	$[\beta, \omega, \neg \Delta]$	| NB; n
	n+6	$\text{Also}_{i+1,X}$	$\neg \bigvee\omega \neg \Delta$	| NE; n+4,n+5
	n+7	$\text{Also}_{i,X}$	$\neg \bigvee\omega \neg \Delta$	| PB; n+1,n+6
	n+8	Also_X	$\neg \bigvee\omega \neg \Delta$	| NE; n+1,n+7
	...	**...**	**...**	

Man hat in einem Beweis die Universalquantifikation einer Formel Δ gewonnen und will übergehen zur Negation der Partikularquantifikation der Negation von Δ. Diese rein logischen Schritte will man nicht in jedem Beweis neu vollziehen. Erwünscht ist vielmehr der direkte Übergang von der Aussage der Zeile n zur Aussage der Zeile n+8; dabei hilft folgende zulässige Regel:

[30] Wenn man die Universalquantifikation einer Formel Δ bezüglich ω in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse X gewonnen hat, dann darf man in Abhängigkeit von X die Negation der Partikularquantifikation der Negation von Δ bezüglich ω folgern.

Die bisherigen Beispiel für zulässige Regeln lassen folgende allgemeine Form erkennen:

[31] Wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse X_i eine Aussage der Art Δ_1 und ... und in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse X_n eine Aussage der Art Δ_n gewonnen hat, dann darf man in Abhängigkeit von $X_1 \cup ... \cup X_n$ eine Aussage der Art Γ folgern.

Die Zulässigkeit der Regel besteht gerade darin, daß man eben auch unter ausschließlicher Benutzung der Grundregeln von $\Delta_1,...,\Delta_n$ zu Γ gelangen kann.

Ü15 Untersuchen Sie die in Ü14 genannten Beweise mit Grundregeln auf Abkürzungsmöglichkeiten durch zulässige Regeln!

Eine weitere, hier nicht vorgestellte Abkürzungsstrategie besteht in der Substitution: Ist eine Aussage Γ logisch äquivalent B und hat man eine Aussage Δ gewonnen, die Γ zur Teilformel hat, dann darf man auf [B, Γ, Δ] schließen (↑10.).

Der guten Ordnung halber ist abschließend das Ableitungs- resp. Argumentationskonzept so zu erweitern, daß auch die neu geschaffenen abkürzenden Handlungsmöglichkeiten Berücksichtigung finden: $\mathcal{A}$ ist ein zulässige Ableitung von resp. Argumentation für Γ aus *X* genau dann, wenn $\mathcal{A}$ eine Sequenz ist, so daß für jedes Glied $\mathcal{A}_i$ von $\mathcal{A}$ gilt: $\mathcal{A}_i$ ist ein Annahmesatz gemäß der Annahmeregel AR oder $\mathcal{A}_i$ ist ein Anziehungssatz gemäß der Anziehungsregel [23] oder $\mathcal{A}_i$ ist ein Folgerungssatz gemäß einer Grund- oder einer zulässigen Regel und Γ ist die im letzen Glied von $\mathcal{A}$ in Abhängigkeit von der Aussagenklasse *X* gefolgerte Aussage. Jede zulässige Ableitung läßt sich in eine Ableitung überführen.

5.3 Der Einzigkeitsquantor

Die Exkursion in Begriffe und Verfahren der Metalogik findet ihren Abschluß durch eine ausführliche Behandlung der Einzigkeit. Dadurch wird nicht nur eine zentrale begriffliche Voraussetzung für die Behandlung der Nomination (↑7.) bereitgestellt, sondern auch, damit zusammenhängend, ein Instrument zur Erfassung und Auflösung von Einzigkeitsillusionen aller Art.

Die Vorstellung von Einzigkeitsvarianten bildet den Abschluß des Unterkapitels(5.3.4). Sie wird vorbereitet durch die Behandlung der Mindest- und Höchstzahlquantoren (5.3.3). Diese Art von Quantoren findet zuvor im Spektrum quantitativer Operatoren Situierung (5.3.2). Die Erörterung quantitativer Operatoren macht es nötig, wiederholt Definitionsschemata zu benutzen. Der Umgang mit dieser Sorte von Etablierungsverfahren wird vorbereitend an den logischen Junktoren eingeübt; damit wird zugleich die Darstellung dieser Redeteile ergänzt (↑5.3.1).

5.3.1 Zur Definition von Junktoren

Die früher vorgestellten und seitdem benutzten Junktoren besitzen (jedenfalls näherungsweise) gebrauchssprachliche Äquivalente. Die Gebrauchssprache enthält aber weitere Junktoren bzw. Ausdrücke, die sich als Junktoren darstellen lassen. Einige von diesen Redeteilen lassen sich wiederum mit Hilfe der bekannten Operatoren definieren. So

kann der zweistellige Junktor 'weder__noch__' mit Hilfe von Negator und Konjunktor bestimmt werden und der ebenfalls zweistellige Junktor 'entweder__oder__' kann mit Adjunktor, Konjunktor und Negator bestimmt werden:

[32] Man darf jede Aussage der Art:

a) (weder A noch B) $\leftrightarrow$ ($\neg$ A $\wedge$ $\neg$ B)

b) (entweder A oder B) $\leftrightarrow$ (A $\vee$ B) $\wedge$ $\neg$ (A $\wedge$ B)

als Definition setzen.

Die Sprachrelativierung ist wiederum vernachlässigt. Da man derartige Definitonsschemata bzw. ihre Instanzen selbstredend in Diskursen benutzen will, muß das Benutzungswie geregelt werden. Dies geschieht so, daß man die Anziehung von Definitionen erlaubt:

[33] Man darf Definitionen in Argumentationen anziehen.

Es greift überdies die Festlegung [24]: Wenn man Definitionen in Argumentationen anzieht, dann hat man sie in Abhängigkeit von der leeren Menge gewonnen. Wenn man etwa zeigen will, daß die Klasse aus den Aussagen(schemata) {weder A noch B, entweder A oder B} inkonsistent ist, kann man die Argumentation bzw. das Argumentationsschema mit folgenden Zügen eröffnen:

[34]	Sei$_1$	weder A noch B
	Da	(weder A noch B) $\leftrightarrow$ ($\neg$ A $\wedge$ $\neg$ B)
	Also$_1$	$\neg$ A $\wedge$ $\neg$ B
	Sei$_2$	entweder A oder B
	Da	(entweder A oder B) $\leftrightarrow$ (A $\vee$ B) $\wedge$ $\neg$ (A $\wedge$ B)
	Also$_2$	(A $\vee$ B) $\wedge$ $\neg$ (A $\wedge$ B)

Ü16 Setzen Sie die Argumentation bis zum Nachweis der Inkonsistenz fort! Benutzen Sie nach Belieben zulässige Regeln und logische Theoreme!

Die Zeichenverbindung 'entweder__oder__' wird auch als <u>ausschließendes</u> 'oder' angesprochen; demgegenüber ist der Adjunktor dann das <u>einschließende</u> 'oder'. Die Gebrauchssprache verwendet häufig schlicht 'oder'; es bleibt dann dem Adressaten überlassen, das autorseitig angezielte Verständnis aus der Äußerungsumgebung zu ermitteln.

Die vorgelegten Definitionsschemata besitzen die Form der Bisubjunktion. Bei der Erlernung des Umgangs mit den Junktoren konnte eine Reihe von (nach De Morgan benannten) Theoremen bewiesen werden, deren eines Bisubjunkt jeweils eine Konjunktion, eine Adjunktion oder eine Subjunktion war, während das andere Bisubjunkt von Negator und den jeweils anderen Junktoren gebildet wird:

[35] a) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$

b) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg (A \wedge \neg B)$

c) $(A \wedge B) \leftrightarrow \neg (\neg A \vee \neg B)$

d) $(A \wedge B) \leftrightarrow \neg (A \rightarrow \neg B)$

e) $(A \vee B) \leftrightarrow \neg (\neg A \wedge \neg B)$

f) $(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \rightarrow B)$

Auch diese Schemata hätte man als Definitionen wählen können: Wenn der Negator und der Adjunktor resp. der Konjunktor schon verfügbar sind (z.B. über die bekannten Einführungs- und Beseitigungsregeln), dann läßt sich der Subjunktor mit ihrer Hilfe nach dem Muster von [32] definieren; analog für Konjunktor und Adjunktor.

Denkt man über die damit gegebenen Definitionsmöglichkeiten unter der Frage der Minimierung der Ausdrucksbasis nach, dann resultiert: Mit Hilfe von Negator und Adjunktor resp. Negator und Konjunktor resp. Negator und Subjunktor lassen sich die übrigen Junktoren definieren. Sei etwa Negator mit Subjunktor verfügbar; dann läßt sich mit f) der Adjunktor und mit d) oder c) der Konjunktor definieren; analog für die beiden übrigen Möglichkeiten.

Basiert man die Junktorenlogik auf den Negator und einen der beiden zweistelligen Junktoren, so sind die übrigen Junktoren in dem Sinne überflüssig, als sie stets durch die basierenden Redeteile ersetzbar sind. Wegen dieser Eliminierbarkeit fügen sie dem System nichts >Neues< im Sinne einer echten Verstärkung hinzu. Für den Zweck der metasprachlichen Analyse ist es überdies einfacher, sich mit weniger Grundzeichen befassen zu müssen.

Für den Gebrauchszweck liegen die Dinge anders: Hier führt die Beschränkung schon bei einfachen Aussagen zu unerwünschten Schwerfälligkeiten und zu Unübersichtlichkeit. Einfacher für den Gebrauch ist es also, mit einer größeren als der kleinstmöglichen Menge an Operatoren zu arbeiten. – Offenkundig ist hier und auch an späteren Stellen (↑) zwischen

Einfachheit für die metasprachliche Analyse, kurz: Überschaubarkeit, und Einfachheit für den objektsprachlichen Gebrauch, kurz: Handlichkeit, zu unterscheiden.

Der Bisubjunktor spielt bei den vorgestellten Definitionsschemata eine tragende Rolle: Er verbindet Definiendum- und Definiensformel. Andererseits gilt auch: $(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$; und es erhebt sich die Frage nach der Definierbarkeit des Bisubjunktors durch Konjunktor und Subjunktor. Das dabei auftretende Sonderproblem besteht darin, daß eine Etablierung nach dem Vorbild von [31] ausgeschlossen: Das zu definierende Zeichen steht eben noch nicht bereit, um Definiendum- und Definiensformel zu verbinden.

Ein Ausweg besteht in der Formulierung von Folgerungsregeln im Rahmen der Einführungs- und Beseitigungssystematik: Aus einer Bisubjunktion aus A und B darf man auf die Subjunktion aus A und B sowie auf die konverse Subjunktion aus A und B schließen. Hat man umgekehrt die Subjunktion aus A und B sowie die konverse Subjunktion gewonnen, dann darf man auf die Bisubjunktion aus A und B schließen. Anders als bei den bisher betrachteten Einführungs- und Beseitigungsregeln spielt hier ein weiteres logisches Zeichen, der Subjunktor, eine wesentliche Rolle.

Ein weiterer Ausweg ist die Formulierung von Folgerungsregeln unter Rückgriff auf die Substitution: Wenn man eine Aussage Δ mit $A\leftrightarrow B$ als Teilaussage von Δ gewonnen hat, dann darf man das Ergebnis der Substitution von $(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$ für $A\leftrightarrow B$ in Δ folgern, und umgekehrt. – Beide Wege rekurrieren nicht auf den Bisubjunktor als Definitionsmittel. Sie haben jedoch insofern definitorischen Effekt, als die volle Eliminierbarkeit von Bisubjunktionen gewährleistet ist.

Bei den unter [32] gegebenen Definitionen handelt es sich, genauer betrachtet, um metasprachliche Definitionsschemata; das suggeriert schon der Gebrauch der griechischen Buchstaben. Ein (erstes) Beispiel für eine objektsprachliche Definition wird mit der Einführung des Diversitätsprädikators (↑[37]) gegeben.

5.3.2 Die formelquantifizierende Rede im Überblick

Bei den quantifizierenden Redeteilen handelt es sich um Formelquant(ifikat)oren oder um Termquant(ifikat)oren; in diesem Abschnitt stehen nur die erstgenannten zu einer Grobsortierung an. Zunächst ist zwischen materialen und formalen Quant(ifikat)oren zu unterscheiden. Bei der Etablierung der Mitglieder der ersten Gruppe spielen nichtlogische Redeteile eine tragende Rolle; dies trifft für die Angehörigen der zweiten Gruppe nicht zu.

In Kontroversen, die Existenzfragen betreffen, kommen materiale Partikularquant(ifikat)oren zum Einsatz: So läßt sich etwa der Quantor für raumzeitliche Existenz – z.B. das Zeichen 'es-existiert-raumzeitlich-ein-ξ Δ' durch '$\bigvee\xi$(Raum-zeitliches-Gebilde(ξ)$\wedge\Delta$)' definieren. In analoger Weise kann ein Quantor für fiktionale Existenz eingeführt werden. Wählt man zum Ausdruck fiktionaler Universalität das Zeichen 'für-alle-Ficta ξ', dann ist dieses etwa durch '$\bigwedge\xi$(Fiktionales-Gebilde(ξ)$\rightarrow\Delta$)' definierbar. Die (philosophiehistorisch berühmte) Wendung 'es kann ein ξ gedacht werden, das die und die Eigenschaft Δ hat' könnte etwa durch '$\bigvee\xi$ denkbar:Δ' definiert werden.

In den exemplarisch angesprochenen Fällen ist es für das Gelingen ausschlaggebend, daß die materialen Redeteile, als 'Raum-zeitliches-Gebilde(..)', 'Fiktionales-Gebilde(..)', 'denkbar__' ihrerseits einwandfrei mit Bedeutung versorgt worden sind. – Auf dem angedeuteten Weg lassen sich auch quantifizierende gebrauchssprachliche Wendungen wie 'manchmal', 'immer', 'irgendwo', 'überall', 'irgendjemand', 'jedermann' erfassen.

Ü17 Definieren Sie zeit-, raum- und personenbezogene Quantoren, die die soeben erwähnten gebrauchssprachlichen Redeteile erfassen!

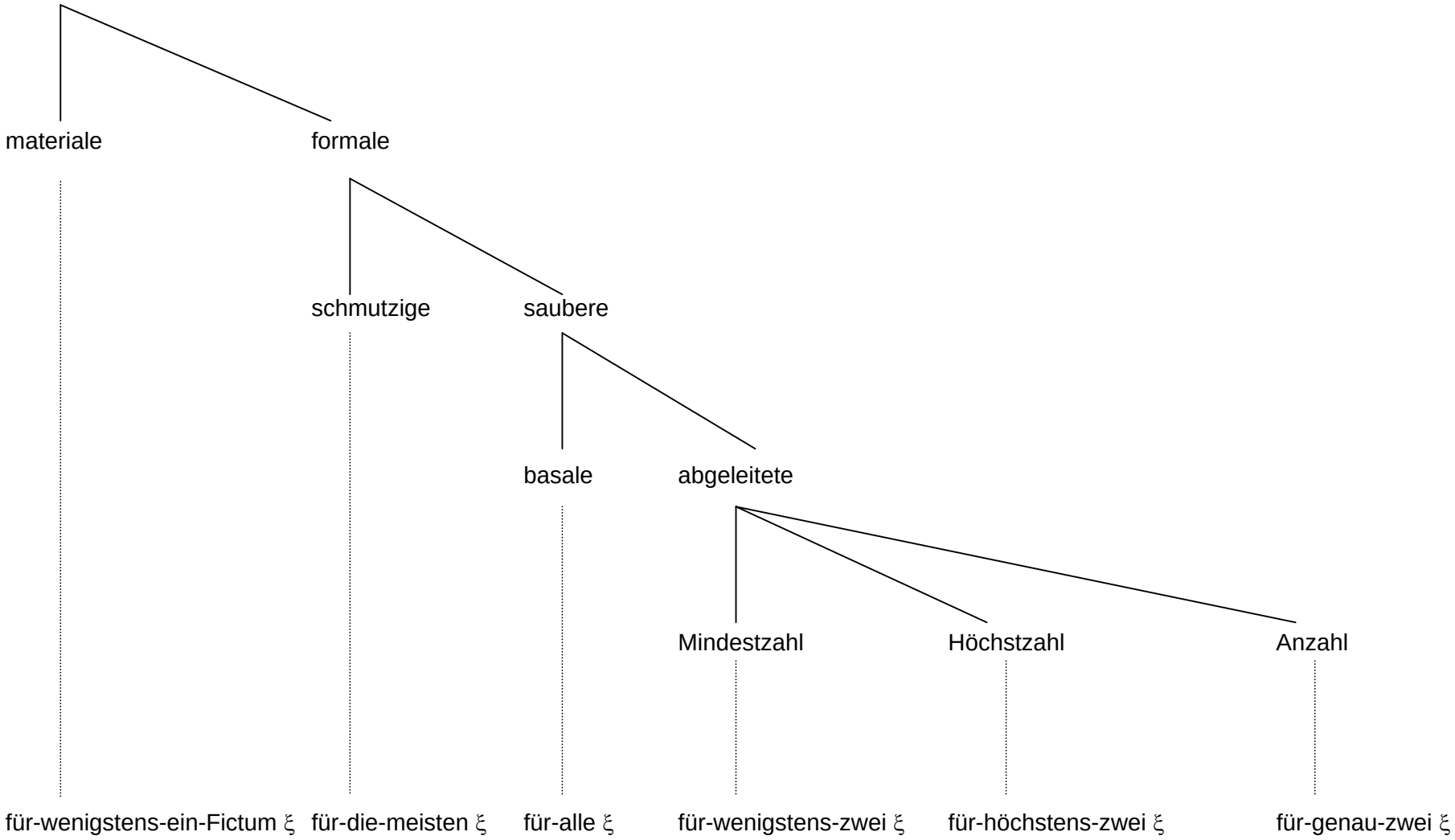
Die formalen Quant(ifikat)oren zerfallen (nach einer etwas unglücklichen Terminologie) in die <u>schmutzigen</u> und die <u>sauberen</u> Redeteile. Zu den ersteren zählen Ausdrücke wie 'Die-meisten ξ', 'Nur-wenige ξ', 'Fast-alle ξ', 'Mehrere ξ'. Diese Redeteile finden insbesondere in den Sozialwissenschaften Verwendung: So soll z.B. eine Regel in einer Population in Kraft sein, wenn fast alle/die meisten/viele Mitglieder dieser Population regelgemäß agieren. – Die Festlegung resp. Rekonstruktion der Bedeutung dieser Operatoren ist mit besonderen Schwierigkeiten verbunden.

Die sauberen Quant(ifikat)oren zerfallen in die <u>basalen</u> und die <u>abgeleiteten</u>. Der Partikular- und der Universalquant(ifikat)or sind die beiden basalen, d.h. die (in dem hier zugrundeliegenden Aufbau) nicht definitorisch etablierten. Auf die Möglichkeit der Definition des Universalquantors durch Negator und Partikularquantor bzw. des Partikularquantors durch Negator und Universalquantor wird deshalb nicht zurückgegriffen, weil diese Interdefinierbarkeit weder in einer minimalen noch in einer intuitionistischen Logik gelten (↑ZUSATZ).

Die abgeleiteten, d.h. die definierten, Quant(ifikat)oren lassen sich gliedern in die <u>Mindestzahlquantoren</u> wie etwa 'für-wenigstens-zwei ξ', die <u>Höchstzahlquantoren</u> wie z.B. 'für-höchstens-zwei ξ' und die <u>Anzahlquantoren</u> wie z.B. 'für-genau-zwei ξ'. Bevor diese

Redeteile näher studiert werden, soll die provisorische Sortierung der einstelligen Formelquantifikatoren durch eine Übersicht repräsentiert werden:

[36] Einstellige Formelquant(ifikat)oren



5.3.3 Mindestzahlquantoren und Höchstzahlquantoren

Der Partikularquant(ifikat)or ist der einfachste Mindestzahlquant(ifikat)or. Seine Bedeutung ist über PE und PB festgelegt (↑4.3.2). Diese Subsumtion zeigt, anbei bemerkt, daß die vorgenommene Klassifikation an dieser Stelle nicht disjunkt ist. – Um zum Mindestens-zwei-Quantor zu gelangen, muß man den Diversitäts- bzw. den Verschiedenheitsprädikator bereitstellen, indem man die Aussage:

[37] $\bigwedge x \bigwedge y\ (x \neq y \leftrightarrow \neg\, x = y)$

definitorisch setzt: Verschieden ist ein Gebilde von einem Gebilde, wenn sie nicht identisch sind. Bei [37] handelt es sich um eine objektsprachliche Definition – und nicht wie bei [32] um ein metasprachliches Definitionsschema. Da der Diversitätsprädikator unter ausschließlichem Rückgriff auf logische Redeteile definiert wird, ist er selbst als logischer Operator anzusehen.

Kein Gebilde ist von sich selbst verschieden: Der Diversitätsprädikator ist also irreflexiv. Besteht zwischen Gebilden die Verschiedenheit, so gilt sie auch in der umgekehrten Richtung: Der Diversitätsprädikator ist also symmetrisch. Sind ferner Gebilde verschieden, dann ist ein beliebiger Gegenstand von wenigstens einem der beiden Gebilde verschieden.

[38] a) $\bigwedge x \neg\, x \neq x$

b) $\bigwedge x \bigwedge y\ (x \neq y \rightarrow y \neq x)$

c) $\bigwedge x \bigwedge y\ (x \neq y \rightarrow \bigwedge z\ (x \neq z \vee y \neq z)$

Das erste Theorem läßt sich so beweisen:

[38]°	1	Wäre$_1$	$x \neq x$
	2	Da	$\bigwedge x \bigwedge y\ (x \neq y \leftrightarrow \neg\, x = y)$
	3	Also	$x \neq x \leftrightarrow \neg\, x = x$
	4	Also$_1$	$\neg\, x = x$
	5	Da	$\bigwedge x\ x = x$
	6	Also	$x = x$
	7	Also	$\neg\, x \neq x$
	8	Also	$\bigwedge x \neg\, x \neq x$

Der Beweis erfolgt indirekt. In Zeile 2 wird die Definition angezogen und passend spezialisiert. Die Annahme führt mit der Definition auf einen Widerspruch zur Totalreflexivität der Identität.

Ü18 Beweisen Sie [38] b) und c)!

Anders als die Identität ist die Diversität nicht transitiv: Es ist $3 \neq 4$ und $4 \neq 3$, ohne daß $3 \neq 3$ wäre. In gleicher Weise läßt sich einsehen, daß auch die Komparativitätseigenschaften und die Zirkularität nicht gilt. – Der Mindestens-zwei-Quantor läßt sich nun durch folgende Partikularquantifikation ausdrücken:

[39] $\bigvee\xi\bigvee\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \wedge \xi \neq \omega)$

Dabei ist Δ eine Formel, in der höchstens ξ frei ist und die ω nicht zum Teilterm hat. Es gibt also genau dann wenigstens zwei Δ-Objekte, wenn es ein Δ-Objekt ξ und ein Δ-Objekt ω gibt, daß von ξ verschieden ist.

Ü19 Verdeutlichen Sie sich die Notwendigkeit der Nicht-Teiltermschaft von ω in Δ, indem Sie z.B.'$\bigvee y$(NaZ($y \wedge x > y$)' für die gesamte Formel Δ und 'x' für ξ wählen.

Mit [39] ist lediglich das Definiens des Mindestens-zwei-Quantor notiert; wegen fehlender Benutzungshäufigkeit wird im vorliegenden Kontext keine eigene Zeichenverbindung etabliert. – Der Mindestens-drei-Quantor könnte durch:

[40] $\bigvee\xi\bigvee\omega\bigvee\zeta\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \wedge [\zeta, \xi, \Delta] \wedge \xi \neq \omega \wedge \omega \neq \zeta \wedge \zeta \neq \xi)$

charakterisiert werden. Dabei ist Δ wie üblich eine Formel, in der allenfalls ξ frei ist; und ferner hat Δ weder ω noch ζ zum Teilterm. Es genügt nicht, nur die Verschiedenheit von ξ und ω und von ω und ζ zu fordern, weil, wie oben bemerkt, die Diversität nicht transitiv ist.

Damit ist prinzipiell der Weg vorgezeichnet, sich die gewünschten Mindestzahlquantoren bereitzustellen. – Betrachtet man das Verhältnis von der Mindestens-ein- resp. Partikularaussage zur Mindestens-zwei-Aussage, dann gilt: Es ist $\bigvee\xi\Delta$ Konsequenz aus $\{\bigvee\xi\bigvee\omega(\Delta\wedge[\omega,\xi,\Delta]\wedge\omega\neq\xi)\}$; und es ist $\{\bigvee\xi\Delta\}$ verträglich mit $\{\neg\bigvee\xi\bigvee\omega(\Delta\wedge[\omega,\xi,\Delta]\wedge\omega\neq\xi)\}$ und mit $\{\bigvee\xi\bigvee\omega(\Delta\wedge[\omega,\xi,\Delta]\wedge\omega\neq\xi)\}$; also ist $\bigvee\omega\bigvee\xi(\Delta\wedge[\omega,\xi,\Delta]\wedge\omega\neq\xi)$ nicht entscheidbar durch $\bigvee\xi\Delta$. Mit Blick auf die Höchstzahlquantoren ist zu beachten, daß $\bigvee\xi\bigvee\omega(\Delta\wedge[\omega,\xi,\Delta]\wedge\omega\neq\xi)$ mit $\neg\bigwedge\xi\bigwedge\omega(\Delta\wedge[\omega,\xi,\Delta]\rightarrow\omega=\xi)$ äquivalent ist.

Ü20 Begründen Sie die folgende Aussage:

a) $\{\bigvee\xi\bigvee\omega\,(\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \wedge \omega \neq \xi)\} \vdash \bigvee\xi\,\Delta$

b) $\bigvee\xi\bigvee\omega\,(\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \wedge \omega \neq \xi)$ ist nicht entscheidbar durch $\{\bigvee\xi\,\Delta\}$

c) $\bigvee\xi\bigvee\omega\,(\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \wedge \omega \neq \xi) \dashv\vdash \neg \bigwedge\omega\bigwedge\xi\,(\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi)$

Der einfachste Höchstzahlquant(ifikat)or ist die Wendung 'für-höchstens-ein..' bzw. 'für-höchstens-ein ξ', gelegentlich auch durch 'es-gibt-höchstens-ein..' bzw. 'es-gibt-höchstens-ein ξ' 'für-nicht-mehr-als-ein ξ' ausgedrückt. Den Sachverhalt, daß es höchstens ein ξ mit der Eigenschaft Δ gibt, kann man so beschreiben: Es ist nicht der Fall, daß ein ξ ein Δ-Ding ist und ein ω ein Δ-Ding ist und ξ verschieden von ω ist. Äquvalent: Falls ξ, ω Δ-Dinge sind, dann sind sie identisch.

[41] $\bigwedge\xi\bigwedge\omega\,(\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega)$

Soll diese Formel als Definiens für den Höchstens-eins-Quantor taugen, dann darf in Δ mit höchstens ξ frei wiederum ω nicht Teilterm sein. – Wegen fehlender Benutzungshäufigkeit wird wiederum kein eigenes Zeichen etabliert. – Den Sachverhalt, daß es höchstens zwei Δ-Dinge gibt, kann man so ausdrücken: Es ist nicht der Fall, daß ξ, ω, ζ gibt, die Δ sind und voneinander allesamt verschieden; es ist also nicht der Fall, daß es wenigstens drei Δ-Dinge gibt. Äquivalent: Sind beliebige ξ, ω, ζ Δ-Dinge, dann ist $\xi=\omega$ oder $\xi=\zeta$ oder $\omega=\zeta$:

[42] $\bigwedge\xi\bigwedge\omega\bigwedge\zeta\,(\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \wedge [\zeta, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi \vee \omega = \zeta \vee \xi = \zeta)$

Es gelten die Teiltermausschlüsse für ω, ζ in Δ. Damit ist prinzipiell der Weg vorgezeichnet, sich die je gewünschten Höchstzahlquantoren bereitzustellen. – Wenn es höchstens ein Δ-Ding gibt, dann gibt es auch höchstens 2 (und 3 und ... n) Δ-Dinge. Gibt es hingegen nicht mehr als 2-Dinge, dann wird dadurch die Aussage nicht entschieden, daß es nicht mehr als ein Δ-Ding gibt; und schließlich ist die Aussage, daß es höchstens ein Δ gibt unverträglich mit der Aussage, daß es wenigstens zwei Δ gibt; analog für die höheren Stufen:

Ü21 Begründen Sie die folgenden Aussagen:

a) $\{\bigwedge\xi\bigwedge\omega\,(\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi)\} \vdash \bigwedge\omega\bigwedge\xi\bigwedge\zeta\,(\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \wedge [\zeta, \xi, \Delta] \rightarrow$

$\omega = \xi \vee \omega = \zeta \vee \xi = \zeta)$

b) $\bigwedge\xi\bigwedge\omega\,(\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi)$ ist nicht entscheidbar durch

$\{\bigwedge\omega\bigwedge\xi\bigwedge\zeta\,(\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \wedge [\zeta, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi \vee \xi = \zeta \vee \omega = \zeta)\}$

c) $\{\bigwedge\xi\bigwedge\omega\,(\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi), \bigvee\omega\bigvee\xi\,(\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \wedge \omega \neq \xi)\}$ ist inkonsistent.

5.3.4 Varianten der Einzigkeit

Die Anzahlquantoren ergeben sich aus dem konjunktiven Zusammenspiel von Mindest- und Höchstzahlquantoren. Es gibt genau ein Δ-Ding ξ genau dann, wenn es wenigstens und höchstens ein Δ-Ding gibt. Es gibt genau zwei Δ-Dinge genau dann, wenn es wenigstens und höchstens zwei Δ-Dinge gibt usf. Für den in der Folge detailliert erörterten Genau-eins- bzw. Eins- bzw. Einzigkeitsquantor sei festgelegt:

[43] Wenn ξ, ω verschiedene Variablen sind und Δ eine Formel ist, in der höchstens ξ frei ist und in der ω nicht Teilterm ist, dann darf man jede Aussage der Form:

$\mathbf{1}\xi\,\Delta \leftrightarrow \bigvee\xi\,\Delta \wedge \bigwedge\xi\bigwedge\omega\,(\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi)$

als Definition setzen.

Das Zeichen '**1**..' ist der <u>Einzigkeits</u>- oder auch <u>Eins</u>- oder auch <u>Genau-eins-Quantifikator</u>; es handelt sich um einen einstelligen, variablenbestimmenden und quantorerzeugenden Operator. Die Zeichenverbindung '**1**ξ__' ist der <u>Einzigkeitsquantor</u> oder der <u>Eins</u>- oder auch <u>Genau-eins-Quantor</u>; es handelt sich um einen einstelligen, formelbestimmenden und formelerzeugenden Operator. Sei Δ eine Formel, in der allenfalls die Variable ξ frei ist; dann ist das Ergebnis der Anwendung von '**1**ξ__' auf Δ, also die Formel **1**$\xi\Delta$, <u>die Einzigkeitsquantifikation</u> bzw. <u>die Eins</u>- bzw. <u>die Genau-eins-Quantifikation von</u> Δ <u>bzgl.</u> ξ.

Mit einer analogen Definition und bei gleichen grammatischen Bestimmungen lassen sich Zwei-, Dreiquantifikator usf. etablieren. Die Definiens für den Genau-zwei-Quantor lautet etwa:

[44] $\bigvee\xi\bigvee\omega\,(\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \wedge \omega \neq \xi) \wedge$

$\bigwedge\omega\bigwedge\xi\bigwedge\zeta\,(\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \wedge [\zeta, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi \vee \omega = \zeta \vee \xi = \zeta)$

In diesem Fall soll auch die Variable ζ nicht Teilterm von Δ sein. Es gibt genau zwei Δ-Dinge ξ dann und nur dann, wenn es nicht weniger und nicht mehr als zwei Δ-Dinge ξ gibt. Während der >Weg nach oben<, also der Weg zur Definition der weiteren Anzahlquantoren vorgezeichnet ist, bleibt die Frage nach der Bestimmung des 'Für-null-Quantifikators' noch zu erledigen. 'Für-null..' bzw. einfacher und sprachnäher 'Kein..' ist durch Negator und Partikularquantifikator unter den üblichen Bedingungen zu definieren.

[45] Kein $\xi\ \Delta \leftrightarrow \neg \bigvee\xi\ \Delta$

In der die Nomination bzw. die Referenz betreffende Literatur ist häufig von der Existenz-, der Eindeutigkeits- und der Einzigkeitsbedingung die Rede. Diese Sprechweisen lassen sich wie folgt nachzeichnen: Sei Δ eine allenfalls in ξ offene Formel; dann die Partikularquantifikation von Δ bzgl. ξ, also $\bigvee\xi\ \Delta\xi$, <u>die Existenzbedingung für</u> Δ; analog ist die Höchstens-ein-Quantifikation, also $\bigwedge\xi\bigwedge\omega(\Delta\wedge[\omega,\xi,\Delta]\rightarrow\omega=\xi)$, <u>die Eindeutigkeitsbedingung für</u> Δ, schließlich ist die Einsquantifikation von Δ bzgl. ξ, also $\mathbf{1}\xi\ \Delta$, <u>die Einzigkeitsbedingung für</u> Δ.. Die Existenz- resp. Eindeutigkeits- resp. Einzigkeitsbedingung für Δ ist (in einer Sprache *S*) <u>erfüllbar</u>, wenn sie (in *S*) beweisbar ist; im Falle der Widerlegbarkeit ist sie unerfüllbar.

Das folgende Theoremschema – der <u>Hauptsatz zur Einzigkeit</u> – formuliert geläufige Varianten der Einzigkeitsbedingung. Die über das Beweisschema herstellbare Einsicht in ihren Zusammenhang ist bei Erörterungen bzgl. der Referenz (insbesondere von Kennzeichnungen) hilfreich:

[46] Wenn ξ, ω verschiedene Variablen sind und Δ eine Formel, in der höchstens ξ frei ist und von der ω nicht Teilterm ist, dann sind alle Instanzen der paarweise bildbaren Bisubjunktionen aus den Formelschemata (a) bis (i) Theoreme:

(a) $\mathbf{1}\xi\ \Delta$

(b) $\bigvee\xi\ \Delta \wedge \bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega)$

(c) $\bigvee\xi\ \Delta \wedge \bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge \omega \neq \xi \rightarrow \neg\ [\omega, \xi, \Delta])$

(d) $\neg \bigwedge\xi \neg\ \Delta \wedge \neg \bigvee\omega\bigvee\xi\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \wedge \omega \neq \xi)$

(e) $\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \bigwedge\omega\ ([\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi))$

(f) $\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \bigwedge\omega\ (\omega \neq \xi \rightarrow \neg\ [\omega, \xi, \Delta]))$

(g) $\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \neg \bigvee\omega\ (\omega \neq \xi \wedge [\omega, \xi, \Delta]))$

(h) $\bigvee\xi\bigwedge\omega\ (\omega = \xi \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta])$

(i) $\bigvee\xi\bigwedge\omega\ (\omega \neq \xi \leftrightarrow \neg\ [\omega, \xi, \Delta])$

Der Beweis berücksichtigt nur (a), (b), (e) und (h). Er wird in der Form eines Ringbeweises geführt und nutzt insoweit die Zirkeltransitivität der Äquivalenz aus (↑5.1.2).

[47]	1	Sei_1	$\mathbf{1}\xi\ \Delta$	
	2	Da	$\mathbf{1}\xi\ \Delta \leftrightarrow \bigvee\xi\ \Delta \wedge \bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega)$	
	3	$Also_1$	$\bigvee\xi\ \Delta \wedge \bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega)$	BB; 1,2
	4	Sei_2	$\bigvee\xi\ \Delta \wedge \bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega)$	
	5	$Also_2$	$\bigvee\xi\ \Delta$	KB; 4
	6	Sei_3	$[\beta_1, \xi, \Delta]$	
	7	Sei_4	$[\beta_2, \xi, \Delta]$	
	8	$Also_{3,4}$	$[\beta_1, \xi, \Delta] \wedge [\beta_2, \xi, \Delta]$	KE; 6,7
	9	$Also_2$	$\bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi)$	KB; 4
	10	$Also_2$	$[\beta_1, \xi, \Delta] \wedge [\beta_2, \xi, \Delta] \rightarrow \beta_1 = \beta_2$	UB; 2x; 9
	11	$Also_{2,3,4}$	$\beta_1 = \beta_2$	SB; 8,10
	12	$Also_{2,3}$	$[\beta_2, \xi, \Delta] \rightarrow \beta_1 = \beta_2$	SE; 11
	13	$Also_{2,3}$	$\bigwedge\omega\ ([\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \beta_1 = \omega)$	UE; 12
	14	$Also_{2,3}$	$[\beta_1, \xi, \Delta] \wedge \bigwedge\omega\ ([\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \beta_1 = \omega)$	KE; 6,13
	15	$Also_{2,3}$	$\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \bigwedge\omega\ ([\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega))$	PE; 10
	16	$Also_2$	$\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \bigwedge\omega\ ([\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega))$	PB; 5,15
	17	Sei_5	$\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \bigwedge\omega\ ([\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega))$	
	18	Sei_6	$[\beta, \xi, \Delta] \wedge \bigwedge\omega\ ([\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \beta = \omega)$	
	19	$Also_6$	$[\beta, \xi, \Delta]$	KB; 18
	20	$Also_6$	$\bigwedge\omega\ ([\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \beta = \omega)$	KB; 18
	21	Sei_7	$\beta_1 = \beta$	
	22	$Also_{6,7}$	$[\beta_1, \xi, \Delta]$	IB; 19,21
	23	Sei_8	$[\beta_1, \xi, \Delta]$	
	24	$Also_6$	$[\beta_1, \xi, \Delta] \rightarrow \beta = \beta_1$	UB; 2
	25	$Also_{6,8}$	$\beta = \beta_1$	SB; 23,24

26	Also$_6$	$\beta = \beta_1 \leftrightarrow [\beta_1, \xi, \Delta]$	BE; 22,25
27	Also$_6$	$\bigwedge\omega\ (\beta = \omega \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta])$	UE; 26
28	Also$_6$	$\bigvee\xi\bigwedge\omega\ (\xi = \omega \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta])$	PE; 27
29	Also$_5$	$\bigvee\xi\bigwedge\omega\ (\xi = \omega \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta])$	PB; 17,28
30	Sei$_9$	$\bigvee\xi\bigwedge\omega\ (\xi = \omega \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta])$	
31	Sei$_{10}$	$\bigwedge\omega\ (\beta = \omega \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta])$	
32	Also$_{10}$	$\beta = \beta \leftrightarrow [\beta, \xi, \Delta]$	UB; 31
33	Also	$\beta = \beta$	IE
34	Also$_{10}$	$[\beta, \xi, \Delta]$	BB; 32;33
35	Also$_{10}$	$\bigvee\xi\ \Delta$	PE; 24
36	Sei$_{11}$	$[\beta_1, \xi, \Delta] \wedge [\beta_2, \xi, \Delta]$	
37	Also$_{11}$	$[\beta_1, \xi, \Delta]$	KB; 36
38	Also$_{11}$	$[\beta_2, \xi, \Delta]$	KB; 36
39	Also$_{10}$	$\beta = \beta_1 \leftrightarrow [\beta_1, \xi, \Delta]$	UB; 31
40	Also$_{10,11}$	$\beta = \beta_1$	BB; 38;39
41	Also$_{10}$	$\beta = \beta_2 \leftrightarrow [\beta_2, \xi, \Delta]$	UB; 31
42	Also$_{10,11}$	$\beta = \beta_2$	BB; 38,41
43	Also$_{10,11}$	$\beta_1 = \beta_2$	IB; 40,42
44	Also$_{10}$	$[\beta_1, \xi, \Delta] \wedge [\beta_2, \xi, \Delta] \rightarrow \beta_1 = \beta_2$	SE; 43
45	Also$_{10}$	$\bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega)$	UE; 44,2x
46	Also$_{10}$	$\bigvee\xi\ \Delta \wedge \bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega)$	KE; 35;45
47	Also$_9$	$\bigvee\xi\ \Delta \wedge \bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega)$	PB; 30,46
48	Da	$\mathbf{1}\xi\ \Delta \leftrightarrow \bigvee\xi\ \Delta \wedge \bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \xi = \omega)$	
49	Also$_9$	$\mathbf{1}\xi\ \Delta$	BB; 47,48

In den Zeilen 1 bis 3 wird {(a)} $\vdash$ (b) nachgewiesen. In den Zeilen 4 bis 16 erfolgt der Aufweis von {(b)} $\vdash$ (e). Die Zeilen 17 bis 29 beweisen {(e)} $\vdash$ (h); und mit den Zeilen 30 bis 49 wird {(h)} $\vdash$ (a) bewiesen und der Zirkel damit geschlossen. Insgesamt gilt dann (a) $\dashv\vdash$ (b) $\dashv\vdash$ (e) $\dashv\vdash$ (h) $\dashv\vdash$ (a).

Zu Einzelheiten: In den Zeilen 1 bis 3 wird lediglich die Definition ausgenutzt. – Der zweite Abschnitt zielt auf eine Partikularquantifikation. Die dafür erforderliche Diskurslage wird in Zeile 14 erreicht. Das linke Glied der Konjunktion steht schon in Zeile 6 bereit und ist schlicht die Ersatzannahme im Blick auf PB in Zeile 16. Dabei ist stillschweigend vorausgesetzt, daß β_1 nicht Teilterm von Δ ist; analoges gilt für die Zeilen 18 und 31. Die Schwierigkeit liegt in diesem Abschnitt in der Gewinnung des rechten Konjunktes. Die Annahme des parametrisierten Antezedens erfolgt in Zeile 7; und die konjunktive Zusammenfassung beider Annahmen in Zeile 8 macht das rechte Konjunkt der Argumentationsbasis aus Zeile 4 benutzbar. Ein entscheidender Punkt der Überlegung ist die doppelte Ausnutzung des parametrisierten linken Konjunkts der Ableitungsbasis.

Im Abschnitt von Zeile 17 bis Zeile 29 wird zunächst die parametrisierte Basis aus Zeile 18 in Zeile 19 und 20 zerlegt. Der Gewinn der für die Quantormanöver erforderlichen Bisubjunktion in Zeile 26 erfolgt in der Links-Rechts-Richtung mit dem ersten angenommenen Konjunkt und in der Rechts-Links-Richtung mit dem universalquantifizierten angenommenen Konjunkt.

In den Zeilen 30 bis 47 wird der Übergang von (h) zu (b), und dann – in den Zeilen 48, 49 – von (b) zu (a) vorgeführt. Um (b) zu gewinnen, müssen zwei Konjunkte gewonnen werden. Das erste, eine Partikularquantifikation, ergibt sich in den Zeilen 31 bis 35 aus der parametrisierten Annahme und der Totalreflexivität der Identität. Die Höchstaussage wird in den Zeilen 36 bis 45 hergeleitet. Der entscheidende Punkt besteht in der Ausnutzung der parametrisierten Annahme.

Informell läßt sich der Beweisgang so darstellen: Gibt es genau ein Δ-Ding ξ, dann besagt das definitionsgemäß, daß es wenigstens und höchstens ein Δ-Ding ξ gibt (Zeile 1-3). – Gebe es wenigstens ein Δ-Ding ξ, z.B. β und auch höchstens ein Δ-Ding. Angenommen ein β_2 sei ebenfalls Δ. Da es nicht mehr als eines gibt sind β_1 und β_2 identisch. Was immer also Δ ist, ist mit β_1 identisch. Es existiert also, repräsentiert durch β_1, ein Δ-Ding, mit dem alle Δ-Dinge identisch sind (Zeile 4-16).

Gebe es ein Δ-Ding, z.B. β, mit dem alle Δ-Gebilde identisch sind, dann ist β mit allen, aber auch nur den Gebilden ω identisch, die ihrerseits Δ sind (Zeile 17-29). – Gebe es schließlich ein Gebilde, z.B. β, das mit allen und nur den Gebilden identisch ist, die Δ sind. Daraus, daß β mit sich identisch ist, folgt, daß es selbst ein Δ-Ding ist; mit β gibt es ein Δ-Ding. Seien nun beliebige β_1, β_2 Δ-Dinge. Nach Annahme müssen sie mit β und damit auch untereinander gleich sein. Es gibt also nicht mehr als ein Δ (Zeile 30-47).

Ü22 Die im Beweis nicht berücksichtigten Formulierungen der Einzigkeit ergeben sich aus den übrigen. Machen Sie sich deutlich, aufgrund welcher Operationen dies geschieht!

Im Sinne der Sensibilisierung für Einzigkeitsunterstellungen und -illusionen ist es angezeigt, sich mit gebrauchssprachlichen Wiedergaben der Einzigkeitsbedingung vertraut zu machen; das geschieht in der folgenden ergänzungsfähigen Liste:

[48] (a) es gibt genau/gerade/präzise/just ein Δ, für genau ein Δ, es gibt genau ein ξ, das Δ ist, für genau ein Δ-Ding ξ

(b) es gibt wenigstens und höchstens/nur/allenfalls/nicht mehr als ein Δ-Ding ξ, für wenigstens und höchstens ein Δ-Ding ξ, es gibt wenigstens ein Δ-Ding ξ und wenn ξ und ω Δ-Dinge sind, sind sie identisch

(c) es gibt wenigstens ein Δ-Ding ξ und alles ,was von einem beliebigen Δ-Ding ω verschieden ist, ist kein Δ-Ding

(d) nicht alles ist nicht Δ und es gibt keine voneinander verschiedenen Δ-Dinge

(e) es gibt wenigstens ein Δ-Ding ξ, mit dem alle Δ-Dinge ω identisch sind

(f) es gibt wenigstens ein Δ derart, daß alle von ihm verschiedenen Gebilde keine Δ-Dinge sind.

(g) es gibt wenigstens ein Δ-Ding, zu dem es keine verschiedenen Δ-Dinge gibt

(h) es gibt wenigstens ein Gebilde, mit dem alle und nur die Δ-Dinge identisch sind

(i) es gibt wenigstens ein Gebilde, von dem alle und nur die Dinge, die nicht Δ sind, verschieden sind

Es ist nützlich, diese Formulierungen an Beispielen durchzuspielen. Einfache Instanzen für Δ wären etwa '*x* ist gerade Primzahl', '*x* ist heutiger König von Frankreich', '*x* ist alles bestimmende Wirklichkeit', '*x* ist Verfasser der „Principia Mathematica"', '*w* ist ein Ungeheuer von Loch Ness'.

Um eine Einzigkeitsunterstellung als Einzigkeitsillusion entlarven zu können, ist die Beherrschung der Negationen der Einzigkeitsbedingung hilfreich. Paarweise äquivalent unter den üblichen Bedingungen sind die Instanzen folgender Formelschemata:

[49] (a) $\neg\, \mathbf{1}\xi\, \Delta$

(b) $\neg \bigvee\xi\, \Delta \vee \neg \bigwedge\xi \bigwedge\omega\, (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi)$

(c) $\neg \bigvee\xi\, \Delta \vee \neg \bigwedge\xi \bigwedge\omega\, (\Delta \wedge \omega \neq \xi \rightarrow \neg\, [\omega, \xi, \Delta])$

(d) $\bigwedge\xi\, \neg\, \Delta \vee \bigvee\xi \bigvee\omega\, (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \wedge \omega \neq \xi)$

(e) $\neg \bigvee\xi\, (\Delta \wedge \bigwedge\omega\, ([\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi))$

(f) $\neg \bigvee\xi\, (\Delta \wedge \bigwedge\omega\, (\omega \neq \xi \rightarrow \neg\, [\omega, \xi, \Delta]))$

(g) $\neg \bigvee\xi\, (\Delta \wedge \neg \bigvee\omega\, (\omega \neq \xi \wedge [\omega, \xi, \Delta]))$

(h) $\neg \bigvee\xi \bigwedge\omega\, (\omega = \xi \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta])$

(i) $\neg \bigvee\xi \bigwedge\omega\, (\omega \neq \xi \leftrightarrow \neg\, [\omega, \xi, \Delta])$

Die Reihenfolge der Negationen von [49] korrespondiert der Reihenfolge der Negate aus [46]. Analog entsprechen sich die gebrauchssprachlichen Lesarten von [48] und [50], wobei unter [50] die Varianten entfallen:

[50] (a) es gibt nicht genau ein Δ-Ding ξ.

(b) es gibt kein Δ-Ding ξ, oder es ist nicht der Fall, daß Δ-Dinge ξ, ω identisch sind.

(c) es gibt kein Δ-Ding ξ, oder es ist nicht der Fall, daß ein von einem Δ-Ding ξ verschiedenes ω ein Δ-Ding ist.

(d) alles und jedes ist nicht Δ oder es gibt verschiedene Δ-Dinge.

(e) kein Δ-Gebilde ξ, ist mit allen Δ-Dingen ω identisch.

(f) es gibt kein Δ-Ding ξ, von dem nur die Nicht-Δ-Dinge ω verschieden sind.

(g) es gibt kein Δ-Ding ξ, für das es kein Δ-Ding ω gibt, das von ihm verschieden ist.

(h) es gibt keine Gebilde ξ, die mit allen und nur den Δ-Dinge identisch sind.

(i) es gibt kein ξ, das von allen und nur den Nicht-Δ-Dingen verschieden ist.

Auch hinsichtlich der negierten Einzigkeitsbedingung ist es hilfreich, die Formulierung mit einfachen Instanzen durchzuspielen. – Aus der Partikularquantifikation der Konjunktion von Δ und B, also aus $\bigvee\xi(\Delta\wedge\mathrm{B})$, folgt nicht die Universalquantifikation von Δ und B, also $\bigwedge\xi(\Delta\rightarrow\mathrm{B})$; während die Aussage '$\bigvee x$($x$ ist männlich $\wedge$ x ist ledig)' wahr ist, trifft die Aussage '$\bigwedge x$(x ist männlich $\rightarrow$ x ist ledig)' nicht zu. Gäbe es hingegen nicht mehr als ein Δ-Ding, dann wäre die

Universalquantifikation Konsequenz. Am Beispiel: Sei x ist männlich und x ist ledig. Sei y männlich. Da es nicht mehr als ein männliches Wesen gibt ist x=y. Also ist y ledig.

Umgekehrt folgt aus $\bigwedge\xi(\Delta\rightarrow B)$ nicht $\bigvee\xi(\Delta\wedge B)$. Es sind z.B. alle geraden Primzahlen größer 5 natürliche Zahlen; demnach gibt es keine gerade Primzahl größer 5, die natürliche Zahl ist. Das Gegenbeispiel gibt die Diskurslage an, die den Übergang lizenzieren würde: Gibt es ein Δ-Ding, dann ist dieses auch B, weil eben alle Δ-Dinge Γ sind.

Faßt man beide Überlegungen zusammen, dann ergibt sich: Unter der Eindeutigkeitsbedingung ist die Universalquantifikation eine Konsequenz der Partikularquantifikation. Unter der Existenzbedingung ist die Partikularquantifikation eine Konsequenz der Universalquantifikation. Damit sind Partikular- und Universalquantifikation unter der Einzigkeitsbedingung logisch äquivalent. Anders formuliert: Die Subjunktion aus der Einzigkeitsbedingung und der Bisubjunktion aus der Partikular- und Universalquantifikation ist logisch wahr. Eine Variante in aristotelischer Terminologie: Gilt Einzigkeit für den Subjektbegriff, dann fallen universell und partikular bejahende Urteile über das Subjekt zusammen. Unter den üblichen Bedingungen gilt:

[51]	0	Es gilt	$\mathbf{1}\xi\,\Delta \rightarrow (\bigvee\xi\,(\Delta \wedge B) \leftrightarrow \bigwedge\xi\,(\Delta \rightarrow B))$	
	1	Sei$_1$	$\mathbf{1}\xi\,\Delta$	
	2	Da	$\mathbf{1}\xi\,\Delta \leftrightarrow \bigvee\xi\,\Delta \wedge \bigwedge\xi\bigwedge\omega\,(\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi)$	
	3	Also$_1$	$\bigvee\xi\,\Delta \wedge \bigwedge\xi\bigwedge\omega\,(\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi)$	BB; 1,2
	4	Also$_1$	$\bigwedge\xi\bigwedge\omega\,(\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi)$	KB; 3
	5	Sei$_2$	$\bigvee\xi\,(\Delta \wedge B)$	
	6	Sei$_3$	$[\beta, \xi, \Delta] \wedge [\beta, \xi, B]$	Ers.-an.
	7	Also$_3$	$[\beta, \xi, \Delta]$	KB; 6
	8	Also$_3$	$[\beta, \xi, B]$	KB; 6
	9	Sei$_4$	$[\beta_1, \xi, \Delta]$	
	10	Also$_{3,4}$	$[\beta, \xi, \Delta] \wedge [\beta_1, \xi, \Delta]$	KE; 7,9
	11	Also$_1$	$\bigwedge\omega\,([\beta, \xi, \Delta] \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \beta)$	UB; 4
	12	Also$_1$	$[\beta, \xi, \Delta] \wedge [\beta_1, \xi, \Delta] \rightarrow \beta_1 = \beta$	UB; 11
	13	Also$_{1,3,4}$	$\beta_1 = \beta$	SB; 10,12
	14	Also$_{1,3,4}$	$[\beta_1, \xi, B]$	IB; 8,13

15	Also$_{1,3}$	$\bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow \mathrm{B})$	ZR; 14
16	Also$_{1,2}$	$\bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow \mathrm{B})$	PB; 5,15
17	Sei$_5$	$\bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow \mathrm{B})$	
18	Also$_1$	$\bigvee\xi\ \Delta$	KB; 3
19	Sei$_6$	$[\beta, \xi, \Delta]$	Ers.-an.
20	Also$_{5,6}$	$[\beta, \xi, \mathrm{B}]$	ZR; 17,19
21	Also$_{5,6}$	$[\beta, \xi, \Delta] \wedge [\beta, \xi, \mathrm{B}]$	KE; 19,20
22	Also$_{5,6}$	$\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \mathrm{B})$	PE; 21
23	Also$_{1,5}$	$\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \mathrm{B})$	PB; 18,22
24	Also$_1$	$\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \mathrm{B}) \leftrightarrow \bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow \mathrm{B})$	BE; 16,23

In den Zeilen 1 bis 4 wird die Voraussetzung einsatzfähig gemacht. In den Zeilen 5-16 wird der Übergang von der Partikularquantifikation zur Universalquantifikation vollzogen; dabei wird in Zeile 6 vorausgesetzt, daß β nicht Teilterm von Δ und B ist. In den Zeilen 17 bis 23 wird unter Ausnutzung der Existenzbedingung der Übergang von der Universalquantifikation zur Partikularquantifikation vorgeführt.

Ü23 a) Ordnen Sie die folgenden Aussagen der theistischen, atheistischen, monotheistischen und polytheistischen Position zu:

(i) $\bigvee x\ \mathrm{Gott}(x)$

(ii) $\bigwedge x \bigwedge y\ (\mathrm{Gott}(x) \wedge \mathrm{Gott}(y) \rightarrow x = y)$

(iii) $\neg \bigvee x\ \mathrm{Gott}(x)$

(iv) $\neg \bigwedge x \bigwedge y\ (\mathrm{Gott}(x) \wedge \mathrm{Gott}(y) \rightarrow x = y)$

(v) $\bigvee x\ (\mathrm{Gott}(x) \wedge \neg \bigvee y\ (\mathrm{Gott}(y) \wedge x \neq y))$

(vi) $\bigvee x\ (\mathrm{Gott}(x) \wedge \bigvee y\ (\mathrm{Gott}(y) \wedge x \neq y))$

(vii) $\mathbf{1}x\ (\mathrm{Gott}(x)$

b) Bilden Sie das Logische Quadrat zu der Aussage ’Alle Probleme haben genau eine Lösung’.

c) Beweisen Sie das Theoremschema:

$(\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \Gamma) \leftrightarrow \bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow \Gamma)) \rightarrow \bigvee\xi\ \Delta$

d) Widerlegen Sie (z.B. im Rückgriff auf die Baukastenelemente von [13]):

$(\bigvee\xi\ (\Delta \wedge \Gamma) \leftrightarrow \bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow \Gamma)) \rightarrow \bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Delta \wedge [\omega, \xi, \Delta] \rightarrow \omega = \xi)$

Mit Blick auf die Kennzeichnungsterme (↑7.) ist festzuhalten: Es gibt genau ein Δ-Ding, welches B ist, wenn es genau ein Δ-Ding gibt, und wenn wenigstens ein Δ-Ding B ist bzw. wenn alle Δ-Dinge B sind. Paarweise äquivalent (unter den üblichen Bedingungen) sind mithin die Instanzen folgender Schemata:

[52] (a) $\bigvee\xi\ (\bigwedge\omega\ (\omega = \xi \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta]) \wedge B)$

(b) $\mathbf{1}\xi\ \Delta \wedge \bigvee\xi\ (\Delta \wedge B)$

(c) $\mathbf{1}\xi\ \Delta \wedge \bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow B)$

Der Nachweis erfolgt wiederum im Ring. Dabei ergibt sich der mittlere Abschnitt, also Zeile 14 bis 20, unmittelbar aus Theoremschema [51]:

[53]	1	Sei$_1$	$\bigvee\xi\ (\bigwedge\omega\ (\omega = \xi \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta]) \wedge B)$
	2	Sei$_2$	$\bigwedge\omega\ (\omega = \beta \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta]) \wedge [\beta, \xi, B]$
	3	Also$_2$	$\bigwedge\omega\ (\omega = \beta \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta])$
	4	Also$_2$	$\bigvee\xi\bigwedge\omega\ (\omega = \xi \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta])$
	5	Da	$\mathbf{1}\xi\ \Delta \leftrightarrow \bigvee\xi\bigwedge\omega\ (\omega = \xi \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta])$
	6	Also$_2$	$\mathbf{1}\xi\ \Delta$
	7	Also$_2$	$\beta = \beta \leftrightarrow [\beta, \xi, \Delta]$
	8	Da	$\beta = \beta$
	9	Also$_2$	$[\beta, \xi, \Delta]$
	10	Also$_2$	$[\beta, \xi, \Delta] \wedge [\beta, \xi, B]$
	11	Also$_2$	$\bigvee\xi\ (\Delta \wedge B)$
	12	Also$_2$	$\mathbf{1}\xi\ \Delta \wedge \bigvee\xi\ (\Delta \wedge B)$
	13	Also$_1$	$\mathbf{1}\xi\ \Delta \wedge \bigvee\xi\ (\Delta \wedge B)$
	14	Sei$_3$	$\mathbf{1}\xi\ \Delta \wedge \bigvee\xi\ (\Delta \wedge B)$
	15	Also$_3$	$\mathbf{1}\xi\ \Delta$
	16	Da	$\mathbf{1}\xi\ \Delta \rightarrow (\bigvee\xi\ (\Delta \wedge B) \leftrightarrow \bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow B))$

17	Also$_3$	$\bigvee\xi\ (\Delta \wedge B) \leftrightarrow \bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow B)$
18	Also$_3$	$\bigvee\xi\ (\Delta \wedge B)$
19	Also$_3$	$\bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow B)$
20	Also$_3$	$\mathbf{1}\xi\ \Delta \wedge \bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow B)$
21	Sei$_4$	$\mathbf{1}\xi\ \Delta \wedge \bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow B)$
22	Also$_4$	$\mathbf{1}\xi\ \Delta$
23	Also$_4$	$\bigvee\xi\bigwedge\omega\ (\omega = \xi \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta])$
24	Sei$_5$	$\bigwedge\omega\ (\omega = \beta \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta])$
25	Also$_5$	$[\beta, \xi, \Delta]$
26	Also$_4$	$\bigwedge\xi\ (\Delta \rightarrow B)$
27	Also$_4$	$[\beta, \xi, \Delta] \rightarrow [\beta, \xi, B]$
28	Also$_{4,5}$	$[\beta, \xi, B]$
29	Also$_{4,5}$	$\bigwedge\omega\ (\omega = \beta \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta]) \wedge [\beta, \xi, B]$
30	Also$_{4,5}$	$\bigvee\xi\ (\bigwedge\omega\ (\omega = \xi \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta]) \wedge B)$
31	Also$_4$	$\bigvee\xi\ (\bigwedge\omega\ (\omega = \xi \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta]) \wedge B)$

Zuletzt ist das Verhältnis zwischen zwei Sachverhalten zu betrachten, die nur in eine Richtung in der Folgerungsbeziehung stehen: Gibt es genau ein Δ-Ding, das ferner B ist, dann gibt es genau ein Ding, das Δ und B ist. Die Umkehrung gilt nicht: Gibt es genau ein Ding, das Δ und B ist, dann folgt nicht, daß es genau ein Δ-Ding gibt, das auch noch B ist: Daraus, daß es genau eine Gegebenheit gibt, die Primzahl und gerade ist, folgt nicht, daß es genau eine Primzahl gibt, die überdies gerade ist.

Ü24 a) Ergänzen Sie im Beweis [53] die Kommentarspalte.

b) Beweisen Sie: $\bigvee\xi\ (\bigwedge\omega\ (\omega = \xi \leftrightarrow [\omega, \xi, \Delta]) \wedge B) \rightarrow \mathbf{1}\xi\ (\Delta \wedge B)$

Die Einzigkeit hängt eng mit dem (bzw. den) bestimmten Artikel(n) zusammen. Wenn die Rede ist von dem-Soundso, dann setzen wir voraus, daß es genau ein Soundso gibt. Ist die Einzigkeitsbedingung nicht erfüllt, gerät man sofort in Schwierigkeiten (↑7.).

Gerade in philosophischen Kontexten signalisiert man durch die Verwendung des bestimmten Artikels häufig die Einzigkeitsunterstellung: ’der Sinn des Lebens’, ’das Ziel der Geschichte’, ’der Anfang der Welt’, ’das höchste Wesen’, ’die alles bestimmende Wirklichkeit’

’der letzte Einheitspunkt des Strebens’ usf. Bei allen diesen Wendungen ist nach (dem Nachweis) der Erfüllbarkeit der Einzigkeitsbedingung zu fragen.

Ü25 a) Formulieren Sie für die Wendungen mit dem bestimmten Artikel die Einzigkeitsbedingung!

b) Geben Sie aus dem philosophischen und den nichtphilosophischen Bereichen weitere Wendungen mit dem bestimmten Artikel und formulieren Sie die dazugehörige Einzigkeitsbedingung!

Zusatz: Logischer Pluralismus

A. Die in den beiden vorstehenden Kapiteln eingeübte Logik ist die klassische Logik. Schon die Auszeichnung als klassisch weist darauf hin, daß es alternative Vorschläge zur Reglementierung der logischen Operatoren gibt. Faktisch herrscht ein Pluralismus der Logiken. In der Folge sind zwei abweichende Optionen vorzustellen. Die Ausführungen sind nur für Interessenten an Logik und Philosophie der Logik gedacht; ihre Kenntnis ist für den Fortgang nicht nötig.

Die positive Junktorenlogik (= PJL) bildet den Ausgangspunkt: Sie umfaßt die Regeln KB, KE, AB, AE, SB, SE, BB, BE, also alle Junktorenregeln ausnehmlich der Negatorregeln:

[1] PJL = {KB, KE, AB, AE, SB, SE, BB, BE}

Die klassische Kette aus minimaler, intuitionistischer und klassischer Logik ergibt sich durch Hinzufügung verschiedener Negatorregeln: Gibt man PJL die Regel NE bei, dann entsteht die minimale Junktorenlogik (= MJL):

[2] MJL = {NE} $\cup$ PJL

Im Rahmen von MJL kann man auf vorliegenden >Trouble< reagieren, indem man eine >Ursache< beseitigt, also eine Aussage negiert, von der Δ oder die Negation von Δ abhängt; das ist die einzige Verwendungsmöglichkeit für den Negator in MJL. – Die intuitionistische Junktorenlogik (= IJL) fügt der MJL das Ex-falso-quod-libet (= Efq) hinzu, das der Einheitlichkeit halber als Regel formuliert wird:

[3] Wenn man in Abhängigkeit von einer Aussagenklasse *X* die Konjunktion aus einer Aussage B und der Negation von B gewonnen hat, dann darf man eine beliebige Aussage Δ in Abhängigkeit von *X* folgern.

MJL ist durch [3] verstärkt. In MJL läßt sich das Ex-falso-quod-libet-negatum, die Aussage $B \wedge \neg B \rightarrow \neg \Delta$, beweisen, nicht aber das Efq (als Aussage), also $B \wedge \neg B \rightarrow \Delta$. Insgesamt gilt:

[4] IJL = {Efq} ∪ MJL

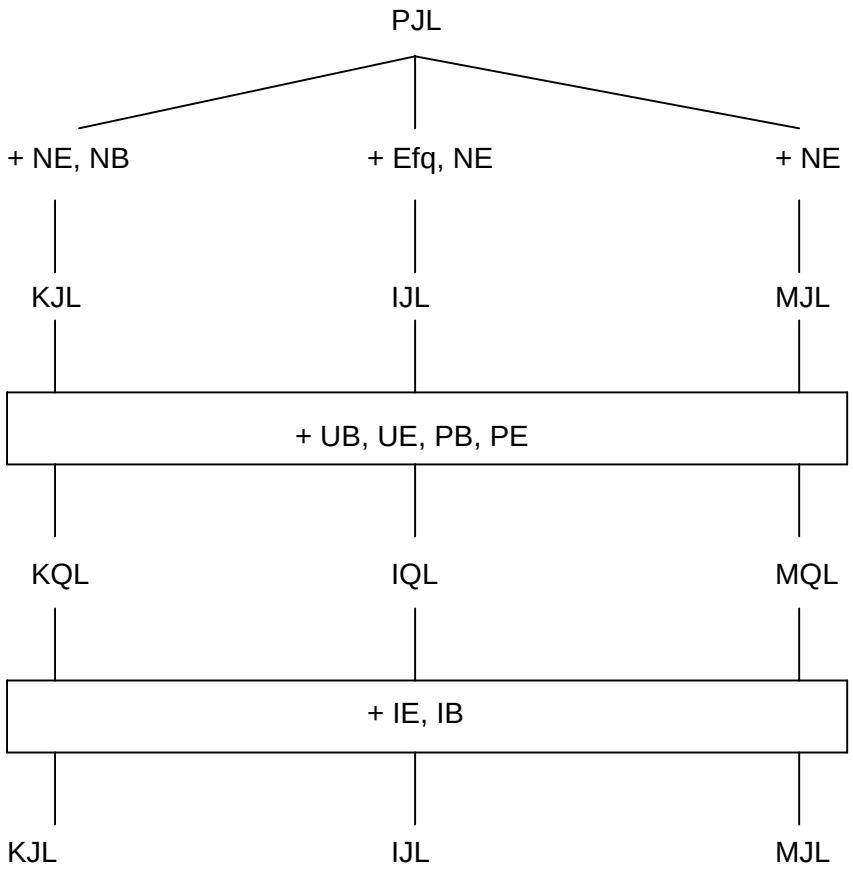
Um die klassische Junktorenlogik (= KJL) zu erhalten, geht man ebenfalls von der MJL aus, fügt aber statt Efq NB, die doppelte Negatorbeseitigung, hinzu:

[5] KJL = MJL ∪ {NB}

Die NB ist stärker als Efq: Mit Efq läßt sich in IJL nicht das NB-Theorem $\neg\neg A \rightarrow A$ und auch kein Tertium-non-datur beweisen; das ist in KJL der Fall.

Die Quantor- und die Identitätsregeln sind in allen Varianten gleich. Minimale, intuitionistische und klassische Logik sind also junktorendifferente Logiken: Der zwischen ihnen auszutragende Streit bezieht sich nicht auf Quantoren oder Identitätsprädikat. Minimale, intuitionistische und klassische Quantoren- und Identitätslogik (= MQL, IQL, KQL) ergeben sich durch Hinzufügung der entsprechenden Quantor- und Identitätsregeln zur junktorenlogischen Basis:

[6]



Die drei vorgestellten Logiken sollen an einigen Punkten verglichen werden. Die Aussage $(A\rightarrow\Gamma)\vee(\Gamma\rightarrow A)$ gilt klassisch, aber weder intuitionistisch noch (a fortiori) minimal. Das Schema enthält Adjunktor und Subjunktor, aber keinen Negator. Durch die Negatorregeln, hier: durch NB, wird also auch die Bedeutung der anderen Operatoren >affiziert<. Das Pincipium Contradictionis gilt in seinen junktoren- und quantorenlogischen Varianten in allen betrachteten Logiken.

Das Tertium-non-datur ist nur klassisch gültig, seine doppelte Negation hat auch minimalen und intuitionistischen Bestand. Das Efq gilt, wie schon gesagt, klassisch und intuitionistisch, nicht aber minimal. Das Contrarium- bzw. Reductio-Gesetz $(A\rightarrow\neg A)\rightarrow\neg A$ gilt durchgehend, die klassische Variante $(\neg A\rightarrow A)\rightarrow A$ jedoch nur klassisch. Während man durchgängig von einer Aussage Δ zu ihrer doppelten Negation übergehen darf, ist die Umkehrung, also $\neg\neg A\rightarrow A$, nur klassisch gültig. Unter der Bedingung des Tertium-non-datur gilt sie auch intuitionistisch. Minimal ist aber selbst $(A\vee\neg A)\rightarrow(\neg\neg A\rightarrow A)$ kein Theorem. Das klassische Dilemma $(A\rightarrow B)\wedge(\neg A\rightarrow B)\rightarrow B$ gilt erwartungsgemäß nur klassisch. Dasselbe gilt für die Kontraposition mit negierten Subjungaten in der Ausgangssubjunktion, also für $(\neg A\rightarrow\neg B)\rightarrow(B\rightarrow A)$. Auch $\neg(A\wedge\neg B)\rightarrow(A\rightarrow B)$ ist intuitionistisch und minimal ungültig. Es ist hingegen $(A\vee B)\rightarrow(\neg A\rightarrow B)$ minimal nicht zu beweisen, wohl aber intuitionistisch und a fortiori klassisch. Gleiches gilt für den disjunktiven Syllogismus, also für $\neg A\wedge(A\vee B)\rightarrow B$. – Die klassisch gegebenen Interdefinierbarkeiten zwischen Negator, Adjunktor, Subjunktor und Konjunktor sind also in den erörterten schwächeren Logiken nicht zu halten.

Die junktorenlogischen Gegebenheiten vererben sich auf die quantorenlogischen Verhältnisse fort. So gilt etwa $\bigwedge\omega(\Delta\vee\neg\Delta)$, eine quantorenlogische Variante des Tertium-non-datur, zwar klassisch, aber sonst nicht: hingegen gilt $\bigwedge\omega\neg\neg(\Delta\vee\neg\Delta)$ in allen drei Logiken. Bei den Quantorumformungen ist $\neg\bigvee\omega\neg\Delta\rightarrow\bigwedge\omega\Delta$ sowie die duale Formel intuitionistisch und minimal ungültig.

B. Die Existenz dreier Logiken weist zunächst darauf hin, daß es nicht angezeigt ist, von <u>der</u> Logik zu sprechen. Es besteht jedoch auch Anlaß, einige Folgefragen aufzuwerfen und wenigstens im Ansatz zu beantworten. Zunächst: Sind die drei vorgestellten Logiken faktisch die einzigen Kandidaten?

Die Antwort ist negativ: Gegenwärtig wird eine Reihe weiterer Logiken, etwa parakonsistente oder relevantistische, diskutiert. Das vorgestellte Trio bildet nur insofern eine klassische Kette, als bereits ein langdauernde Konkurrenz besteht und die interlogischen Verhältnisse gut untersucht sind. Einige cum grano solis zu lesende Ergebnisse: Minimallogische Wahrheiten sind auch intuitionistisch beweisbar; und Wahrheiten der intuitionistischen Logik

sind auch klassisch beweisbar. Negationen folgen aus einer Aussagenklasse genau dann klassisch, wenn dies auch intuitionistisch der Fall ist. Eine beliebige Aussage Δ folgt genau dann klassisch aus einer Aussagenklasse *X*, wenn ihre doppelte Negation $\neg\neg\Delta$ intuitionistisch folgt.

Sodann: Gibt es (andere als nur historische) Gründe, die klassische Logik in der Lehre bevorzugt zu behandeln? Ja: Die klassische Logik ist – erstens – die Bezugslogik für die Präsentation abweichender Logiken, und zwar sowohl der abschwächenden wie auch der modifizierenden (konnexiven) Varianten. Die klassische Logik ist – zweitens – die in der klassischen Mathematik und damit auch in den (zunehmend) mathematischen Wissenschaften verwendete Logik. Was die intuitionistische und minimale Logik angeht, kann ergänzt werden: In der Informatik spielen sie die leitende Rolle; dort ist – so scheint es heute – für den Übergang von $\neg\neg A$ zu A und äquivalente Formulierungen kein Platz.

Drittens: Wie verschafft man sich überhaupt einen Überblick über die de facto konkurrierenden bzw. prinzipiell konkurrenzfähigen Logiken? Die Frage hat eine eher mathematische und eine eher philosophische Seite; nur die zweite soll hier erörtert werden. Ohne Vollständigkeitsanspruch werden vier Rücksichten namhaft gemacht, deren Veranschlagung zur Herstellung von Überschaubarkeit beiträgt: (i) Aus welchem Anlaß wird überhaupt die Präsentation einer neuen Logik ins Auge gefaßt? – Der Intuitionist sieht sich etwa durch die Geltung des Tertium-non-datur für unendliche Bereiche zur Ablehnung der klassischen Logik und zur Errichtung einer eigenen veranlaßt. Der Relevanzlogiker lehnt die sogenannten Paradoxe der Subjunktion, also $\neg A\rightarrow(A\rightarrow B)$ und $A\rightarrow(B\rightarrow A)$, ab. Der parakonsistente Logiker will aus manchen Widersprüchen nicht Beliebiges folgern lassen usf.

(ii) In welchem Feld setzt die Revision an? – Hier wären junktor-, quantor- und identitätsbezügliche Neuvorschläge zu unterscheiden. Besonders dicht ist das Feld im Kernbereich, also im junktorbezüglichen Feld. Die an UB und PE ansetzende freie Logik ist ein Beispiel für die zweite Gruppe. – (iii) Welcher Zweck wird der Logik zugedacht bzw. in welchem Szenario wird der Zweck der Logik entwickelt? Die Stichworte ’Dialog’/’Disput’, ’diskursiver Übergang’/’Folgern’, ’Erwartung’/’Erfüllung’, ’Aufgabe’/’Lösung’, ’Orientierung’, ’Information’ bietet eine Basis fürs weitere Sammeln. – (iv) Welche Prinzipien der Rechtfertigung werden zugrunde gelegt? – Während Konsistenz (schwächer: Nichttrivialisierbarkeit) und Kategorizität allgemein akzeptiert scheinen, sind alle weiteren, z.B. Separiertheit, Harmonie, Stabilität usf., strittig.

Schließlich: Welchen Anforderungen sollte ein neuer Logikvorschlag genügen? – (i) Der Revisionsanlaß sollte namhaft gemacht werden. Zugleich ist gegebenenfalls anzugeben, warum anlassgleiche Vorschläge zielfehlend sind und warum andere Revisionsanlässe keine Berücksichtigung finden. (ii) Zweck und Szenario der Logik sind vorzustellen. Zugleich sind alternative Zwecke/Szenarien als uneinschlägig auszuscheiden bzw. mit dem favorisierten zu vermitteln. (iii) Die Rechtfertigungsprinzipien sind ausdrücklich zu formulieren und als erfüllt nachzuweisen. Abweichende Prinzipien wären als uneinschlägig zurückzuweisen oder mit den eigenen zu vermitteln. (iv) Die Logik ist nach den mathematischen Üblichkeiten metatheoretisch zu untersuchen. (v) Die Logik sollte kalkülinvariant, d.h. in allen bekannten Kalkültypen, präsentiert werden. (vi) Ein geläufiges Theoriestück, z.B. aus der Arithmetik, der Klassentheorie, der elementaren Physik, usf. ist in der neuen Logik zu formulieren.

C. Die in Kapitel 4. vorgelegte Bedeutungsfixierung für die logischen Operatoren berücksichtigt (wie alle akzeptablen Begriffsbildungen (↑5.1.3)) die Konsistenzforderung. Sie ist ferner an der Eindeutigkeits- bzw. Kategorizitätsforderung orientiert: Wird ein logischer Operator κ sowie ein logischer Operator κ^* über dieselben Regeln der Einführung charakterisiert, dann soll Äquivalenz vorliegen. Für jeweilige Junktoren φ muß demzufolge etwa $(A\varphi B)\leftrightarrow(A\varphi^* B)$ gelten. Angenommen, zwei Identitätsprädikatoren '..=..' und'..=*..' seien über dieselben Einführungs- resp. Beseitigungsregeln skizziert, die dann mit '=E', '=B', '=*E', '=*B' bezeichnet werden. Der Kategorizitätsnachweis hat dann folgenden Verlauf:

[7]	1	Sei_1	$x = y$	
	2	Also	$x =^* x$	$=^*$ E
	3	$Also_1$	$x =^* y$	= B ; 1,2
	4	Sei_2	$x =^* y$	
	5	Also	$x = x$	= E
	6	Also	$x = y$	$=^*$ B; 4,5
	7	Also	$x = y \leftrightarrow x =^* y$	BE ; 3,6
	8	Also	$\bigwedge x \bigwedge y\ (x = y \leftrightarrow x =^* y)$	UE ; 7 2x

Eine weitere leitende Forderung ist die Separierbarkeit: Jeder Operator soll frei von Rückgriffen auf andere Operatoren etabliert werden. Gegen diese Forderung verstößt (jedenfalls dem Buchstaben nach) die Regel [3], das Efq in Regelform. Dieses Postulat wird etwa auch von CURRY's Regel der strikten Negation nicht erfüllt: Dieses Schema erlaubt den Übergang von $\neg\Delta\rightarrow\Delta$ zu Δ, ist also die Regelfassung der klassischen Reduction bzw.

Retorsion. Sie stellt in CURRY's Logik eine Art NB dar. – Die Separierbarkeitsforderung läßt sich, jedenfalls so wie sie angedeutet wurde, durch entsprechende konstruktionssprachliche Manöver umgehen.

Die durchgeführte Einführungs-/Beseitigungssystematik ist ferner so angelegt, daß bei der Einführung das jeweilige Zeichen Hauptoperator der Konklusion ist und bei der Beseitigung als Hauptoperator der Hauptprämisse dient. Dieses Vorgehen wird durch NB durchbrochen: Der Negator kommt zweimal vor. Anders: Die negierte Aussage ist nicht beliebig, sondern ihrerseits eine Negation.

Die meisten Autoren gehen (seit und mit GENTZEN) davon aus, daß die Einführungsregeln bedeutungskonstitutiv sind, die Beseitigungsregeln hingegen bedeutungsexplikativ. Beispiel: SE erlaubt den Schluß auf $\Delta \rightarrow \Gamma$, falls Γ in Abhängigkeit von Δ gewonnen worden ist. Hat man nun Δ gewonnen, dann darf man bei Gegebenheit von $\Delta \rightarrow \Gamma$ auf Γ schließen, denn $\Delta \rightarrow \Gamma$ „dokumentiert" (GENTZEN) ja gerade die Erreichbarkeit von Γ auf Basis von Δ.

Das nächste Verhältnis von Einführungs- und Beseitigungsregeln soll durch zwei Prinzipien moderiert werden. Das <u>Harmonieprinzip</u> verlangt, daß die Beseitigungsregel nicht >stärker< sein darf als die Einführungsregel. Umgekehrt fordert das <u>Stabilitätsprinzip</u>, daß die Beseitigungsregel nicht >schwächer< sein darf als die Einführungsregel. Beide Prinzipien liegen in vielen Varianten vor, die aber alle explikationsbedürftige Teilvokabel enthalten. – Allerdings darf vermutet werden, daß unter jeder plausiblen Deutung von 'stärker' die NB das Harmonieprinzip verletzt.

5.4. Literatur

Gensler, H.J.: Formal Ethics; London/New York 1996.

Für die Ausführungen dieses Kapitels ist insbesondere Teil 2, „Logicality“, einschlägig. Gensler zeigt, warum man sich – auch und gerade im Bereich der Ethik – an die Konsistenzmaxime halten sollte. Das ganze Werk demonstriert, wie man mit begrifflichen Verfahren Probleme der praktischen Philosophie angreift.

Hackstaff, L.H.: Systems of Formal Logic; Dordrecht 1966.

Dieses Werk empfiehlt sich für Leser, die sich in das klassische Trio von minimaler, intuitionistischer und klassischer Logik ohne allzu massiven formalen Aufwand einarbeiten wollen.

Hunter, G.: Metalogic. An Introduction to the Metatheory of Standard First Order Logic; Berkley/Los Angeles 1973.

Der Titel charakterisiert den Stoff. Eine gut lesbare Einführung, die sich auch zum Nachschlagen eignet. Im ersten Teil werden auch die klassensprachlichen Begriffe erläutert, die für das metalogische Geschäft unverzichtbar sind. Hilfreich ist im Appendix 2 die Synopsis der metatheoretischen Resultate. Die Literatur listet die meisten klassischen Werke der Logik auf.

Suppes, P.: Introduction to Logic.

Diese Einführung in die Logik ist ein Klassiker. Der Autor ist ein Meister in der knappen informellen Darstellung formaler Zusammenhänge. Für die Non-Sequitur-Methode ist insbesondere Kapitel 4.2, „Interpretation und Validity“, wichtig. Das Kapitel 8 enthält im Übrigen die Standarddarstellung der Definitionstheorie. Für wissenschaftstheoretisch Interessierte empfiehlt sich auch der zweite Teil, der in der mengentheoretischen Formulierung der axiomatischen Methode gipfelt.

Tennant, N.: The Taming of the True; Oxford 1997.

Im Kapitel 10, “Finding the right Logic”, findet der Leser Überlegungen, die in die im Zusatz erwähnten Themen einführen. – Der Autor ist Fachmann für den Logischen Pluralismus.

6. Die Prädikation 264

6.1 Vorbereitung: Situierung und Konvertierung 265

6.1.1 Die Prädikation im Ensemble der Redehandlungen 265

6.1.2 Die Verwandlung von Formeln in Prädikatoren 268

6.2 Prädikatorentypen 271

6.2.1 Grammatische Prädikatorentypen – Erinnerung 271

6.2.2 Exemplarbezogene Prädikatorentypen 272

6.2.3 Systembezogene Prädikatorentypen 275

6.2.4 Strukturbezogene Prädikatorentypen 281

6.2.4.1 Die Reflexivitätsgruppe 282

6.2.4.2 Die Symmetriegruppe 284

6.2.4.3 Die Transitivitätsgruppe 288

6.2.4.4 Die Konnexitätsgruppe 289

6.2.4.5 Die Deutigkeitsgruppe 291

6.2.4.6 Gleichheitsprädikatoren 293

6.2.4.7 Ordnungsprädikatoren 295

6.2.5 Tafel der exemplar-, system- und strukturbezogenen Definitionen 299

6.2.6 Materiale Prädikatorentypen 305

6.2.6.1 Sortale Prädikatoren und Massenprädikatoren 305

6.2.6.2 Dispositionsprädikatoren 306

6.2.6.3 Vage Prädikatoren 308

Zusatz: Zum Darstellungsrahmen 310

6.3 Die elementare Prädikation 312

6.3.1 Elementare Prädikation – Substantielle Prädikation – Zu-/Absprechung 313

6.3.2 Die Wahrheit elementarer Aussagen 321

6.3.3 Universalien: Prädikator – Begriff – Eigenschaft – Klasse 325

6.4 Literatur 332

Immerhin gibt es zu denken, daß wir an keinem Dinge eine Eigenschaft erkennen können, ohne damit zugleich den Gedanken, daß dieses Ding diese Eigenschaft habe, wahr zu finden.
Gottlob Frege

6. Die Prädikation

Die Philosophie stellt eine für den erfolgreichen Erkenntnisvollzug gleich welcher Art und gleich auf welchem Gebiet hilfreiche Grundausrüstung bereit (1.). Wer sich dieses Werkzeug aneignen möchte, sollte sich zunächst im Prinzipiellen über die Natur von Redehandlungen und den Zusammenhang von Wahrheit und Bedeutung Klarheit verschaffen (2.). Die Detailarbeit setzt dann ein mit der Darstellung der Rationalen Grammatik, die für alle weiteren Ausführungen vorausgesetzt bleibt (3.). Danach werden die logischen (Kern)Redeteile mit Bedeutung versorgt, indem ihnen Verwendungsregeln zugewiesen werden; damit stehen Ausdrücke bereit, die auch für alle weiteren Darlegungen ein verläßliches Gerüst bilden (4.). Weiter findet die metalogische Begrifflichkeit im Ansatz Entfaltung. Ferner legt es sich nahe, ergänzende schlußbezügliche Redeteile sowie abkürzende Techniken für das Folgern und Mittel für die Folgerungsbeurteilung bereitzustellen (5.).

Standen in den beiden vorausgegangenen Kapiteln die logischen (Kern)Junktoren und (Kern)Quantoren im Mittelpunkt der Aufmerksamkeit, so sind nun die Prädikatoren und im nächsten Schritt die Nominatoren zu untersuchen. Dabei stehen jedoch nicht einzelne Redeteile wie früher z.B. der Negator oder der Universalquantor zur Regulierung an; vielmehr geht es um Eigenheiten, die allen Prädikatoren und Nominatoren oder doch größeren Gruppen solcher Redeteile bereichsübergreifend zukommen.

Einleitend ist, teilweise in Erinnerung an schon Ausgeführtes, die Prädikation im Felde der Redeteilhandlungen zu plazieren und als unverzichtbar auszuweisen. Ferner ist eine Operation vorzustellen, die Formeln in Prädikatoren umwandelt (6.1). Nach dieser Vorbereitung wird eine detaillierte Typologie von Prädikatoren angeboten, die viele traditionelle und intuitiv geläufige Unterscheidungen aufnimmt und systematisiert (6.2). Der zweite Hauptabschnitt zielt auf die elementare Prädikation, die gegeben ist, wenn als Operand des geäußerten Satzes eine elementare Aussage auftritt; dabei steht die Wahrheit elementarer Aussagen im Mittelpunkt. In diesem Kontext erfährt auch der Zusammenhang von Prädikator, Begriff, Eigenschaft und Klasse, also das (in überkommener Terminologie)

Universalienproblem, eine erste Ordnung (6.3). Kommentierte Literaturhinweise schließen wie üblich das Kapitel ab (6.4).

Dieses Unterkapitel greift häufig auf die Ausführungen über die Nomination (↑7.) vor, ergeben doch erst Nomination und Prädikation zusammen die atomare Prädikation: Autoren beziehen sich mit einem Nominator auf einen Gegenstand, um mit dem Prädikator von ihm auszusagen. Umgekehrt werden somit Passagen aus dem Nominationskapitel als Nachtrag zur Prädikation zu lesen sein.

6.1 Vorbereitung: Situierung und Konvertierung

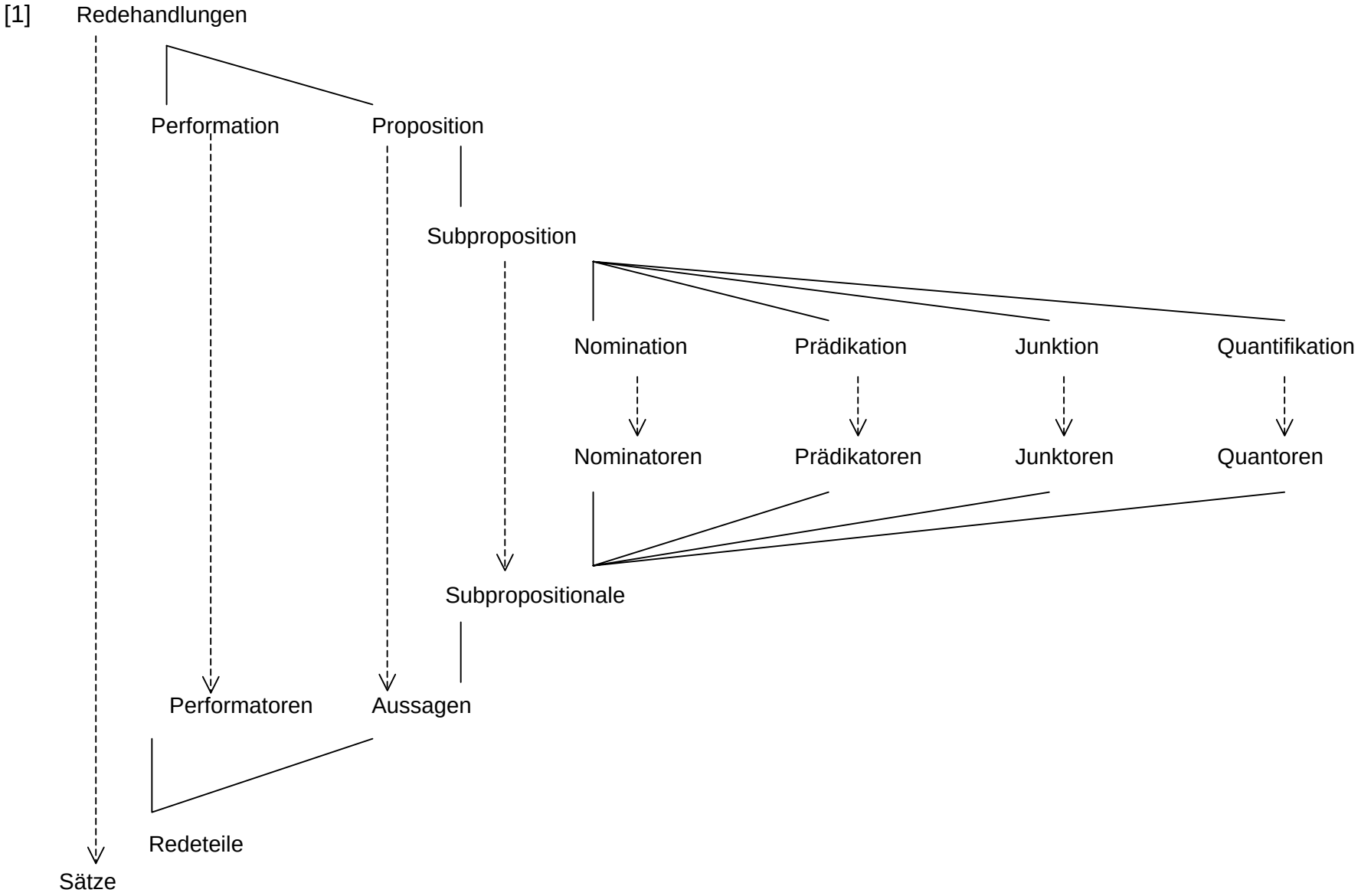
Prädikationen werden vollzogen, indem Prädikatoren in Sätzen Verwendung finden. Es entspricht dem Stellenwert und den Verflechtungen dieser Redehandlung, wenn hinsichtlich des zugeordneten Redemittels eine früher schon erwähnte (↑3.2.1) hohe Synonymendichte herrscht: Die Ausdrücke ‘Prädikat’, ‘Prädikatausdruck’, ‘Prädikatkonstante’, ‘prädikative Zeichenverbindung’, ‘(All)Gemeinname’, ‘genereller/universeller/allgemeiner Term’, ‘Eigenschaftswort’, ‘Begriffsausdruck’, ‘Relationszeichen’, ‘Relator’, ‘Beziehungswort’ usf. dürfen (mit vielen anderen) als zumindest partielle Synonyme gelten. Die vier ersten Titel stellen wie auch ‘Prädikator’ darauf ab, daß in Prädikationen von etwas <u>ausgesagt</u> wird. Die beiden folgenden Varianten erinnern daran, daß Prädikatoren im Normalfall auf <u>viele</u> Gegenstände zutreffen (↑6.2.2). Die Vokabeln ‘Eigenschaftswort’ und ‘Begriffsausdruck’ machen auf Gegebenheiten aufmerksam, auf <u>Eigenschaften</u> und <u>Begriffe</u>, die mit einstelligen Prädikatoren in aufzuklärender Weise zusammenhängen (↑6.3.3); bei mehrstelligen Prädikatoren besteht entsprechend eine wie immer geartete Verknüpfung zu Relationen bzw. relationalen Eigenschaften und relationalen Begriffen.

6.1.1 Die Prädikation im Ensemble der Redehandlungen

Der Vollzug einer Redehandlung umfaßt Performation und Proposition als Teilhandlungen. Die Proposition besteht ihrerseits aus weiteren Teilhandlungen, nämlich aus Prädikation, Nomination, Junktion und Quantifikation. Redehandlungen werden ausgeführt durch Äußerung von Sätzen. Die Performation, Proposition, Nomination, Junktion und Quantifikation erfolgt durch Verwendung von Performatoren, Prädikatoren, Nominatoren, Junktoren und Quantoren. Der Handlungsaufbau spiegelt sich im Satzaufbau. Prädikation,

Nomination, Junktion und Quantifikation bilden gemeinsam die subpropositionalen Redeteilhandlungen. Das folgende Schaubild faßt die beschriebene Sachlage zusammen. Der senkrechte gestrichelte Pfeil ist zu lesen als '.. wird vollzogen durch Verwendung von..'.

[1]


Redehandlungen
Performation
Proposition
Subproposition
Nomination
Prädikation
Junktion
Quantifikation
Nominatoren
Prädikatoren
Junktoren
Quantoren
Subpropositionale
Performatoren
Aussagen
Redeteile
Sätze

Bei der Behandlung der grammatischen Kategorien konnte schon darauf hingewiesen werden, daß Prädikatoren in dem Sinn unverzichtbar sind, als jede Aussage und damit jeder Satz wenigstens einen Prädikator enthält. Das ergibt sich aus dem induktiven Formelaufbau: Jede Formel hat wenigstens eine atomare Formel zur Teilformel und damit wenigstens einen Prädikator zum Teilausdruck. Demgegenüber sind Junktoren und Quantoren keine Teilausdrücke von Atomaussagen; und Nominatoren sind nicht in allen Quantoraussagen erforderlich. Man betrachte z.B. die Aussagen:

[2] a) $2 > 5$

b) $2 > 5 \vee 2 < 5$

c) $\bigwedge x \bigwedge y\ (x > y \vee x < y)$

In a) fehlen Junktoren und Quantoren, in b) nur Quantoren und in c) ist kein Nominator Teilausdruck. Demgegenüber finden sich in allen Aussagen Prädikatoren. In diesem Sinne sind Prädikatoren (im vorausgesetzten Rahmen von Sprachen erster Stufe) unverzichtbare Redemittel; Analoges resultiert bei Sprachen höherer Stufen.

Überträgt man diesen Sachverhalt von der Seite der Redemittel auf die Seite der Redehandlungen, so ergibt sich: Prädikationen sind Teilhandlungen jeder Redehandlung und insofern für diesen Vollzug unverzichtbar. – Wird ein Satz mit der unter a) notierten Aussage, also mit einer atomaren Aussage, als Hauptoperand, geäußert, dann liegt eine atomare bzw. elementare Prädikation vor; diese findet unten gesonderte Behandlung (↑6.3).

6.1.2 Die Verwandlung von Formeln in Prädikatoren

Prädikatoren sind, so eine unstrittige intuitive Vorgabe, jedenfalls solche Redeteile, die von etwas ausgesagt werden können, ganz gleichgültig, ob die entstehende Aussage wahr oder falsch ist. So kann der Prädikator '..ist-ein-sakrales-Bauwerk' vom Kölner Dom oder vom Kölner Hauptbahnhof ausgesagt werden. Im ersten Fall ist die entstehende Aussage, 'Der Kölner Dom ist-ein-sakrales-Bauwerk', wahr; im zweiten Fall ist die entsprechende Aussage, 'Der Kölner Hauptbahnhof ist-ein-sakrales-Bauwerk', falsch. Die herausgestellte Eigenart des Ausgesagtwerdenkönnens kommt intuitiv nicht nur Prädikatoren zu, sondern auch offenen Formeln. Man betrachte etwa folgende Zeichenverbindungen:

[3] a) *x* ist-ein-sakrales-Bauwerk und *x* ist-Bischofskirche

b) $\text{Mann}(x) \wedge \bigvee z\ (\text{Frau}(z) \wedge \text{Zeugte-mit}(x, z, y))$

Unter a) ist eine in 'x' offene Formel notiert, unter b) eine in 'x' und 'y' offene Formel (↑3.2.3). Dabei sollte der Umstand, daß in b) eine stärker normierte Schreibweise benutzt wird, nicht irritieren. Man ist insofern geneigt, auch diese Ausdrucksverbindungen als Prädikatoren aufzufassen, als man auch sie von Gegebenheiten bzw. Gegebenheitspaaren aussagen möchte. Ein Realisierungsweg liegt nahe: Substituiert man in a) '*x*' durch 'der Kölner Dom' und in b) '*x*' durch 'J.S. Bach' und '*y*' durch 'P.E. Bach', dann erhält man mit

[3] a*) der Kölner Dom ist-ein-sakrales-Bauwerk und der Kölner Dom ist-Bischofskirche

b*) Mann(J.S. Bach) $\wedge$ $\bigvee z$ (Frau(z) $\wedge$ Zeugte-mit(J.S. Bach, z, P.E. Bach))

Aussagen, in denen von den jeweiligen Gegebenheiten das Gewünschte ausgesagt wird. Allerdings geschieht das nicht in der gewünschten Form, nämlich nicht so, daß das Ausgesagte als eigener und einheitlicher Prädikator auftritt. Um diese Möglichkeit verfügbar zu machen, soll ein Operator, der **I**-Konvertor, eingeführt werden, der offene Formeln in Prädikatoren konvertiert. So sollen durch Anwendung von '**I**x' auf 'x ist-ein-sakrales-Bauwerk und x ist-Bischofskirche' sowie durch Anwendung von '**I**x,y' auf 'Mann(x) $\wedge$ $\bigvee z$ (Frau(z) $\wedge$ Zeugte-mit(x, z, y))' die Prädikatoren:

[3] a°) **I**x (x ist-ein-sakrales-Bauwerk und x ist-Bischofskirche) (..)

b°) **I**x,y (Mann(x) $\wedge$ $\bigvee z$ (Frau(z) $\wedge$ Zeugte-mit(x, z, y))) (..,..)

generiert werden. Eine genau in einer Variable offene Formel wird durch einen einfachen Variablenbinder '**I**x__' in einen einstelligen Prädikator überführt; analog wird aus einer in genau zwei Variablen offenen Formel durch einen zweifachen Variablenbinder '**I**x,y__' ein zweistelliger Prädikator erzeugt; die Verallgemeinerung zeichnet sich ab: Durch einen k-stelligen Operator '**I**$\xi_1,...,\xi_k$' soll aus einer in $\xi_1,...,\xi_k$ offenen Formel Δ ein k-stelliger Prädikator erzeugt werden.

Der semantische Aspekt, d.h. die Verwendung, ist so zu regeln, wie die hinführenden Überlegungen nahelegen: Der durch Konversion erzeugte Prädikator soll auf einen Gegenstand resp. eine Gegenstandssequenz genau dann zutreffen, wenn das einschlägige Substitutionsresultat gilt. Am Beispiel:

[3] a$^+$) **I**x (x ist-sakrales-Bauwerk und x ist-Bischofskirche) (der Kölner Dom) $\leftrightarrow$ (der Kölner Dom ist-sakrales-Bauwerk und der Kölner Dom ist-Bischofskirche)

b$^+$) **I**x,y (Mann(x) $\wedge$ $\bigvee z$ (Frau(z) $\wedge$ Zeugte-mit(x, z, y))) (J.S. Bach, P.E. Bach) $\leftrightarrow$ (Mann(J.S. Bach) $\wedge$ $\bigvee z$ (Frau(z) $\wedge$ Zeugte-mit(J.S. Bach, z, P.E. Bach)))

Die exemplarisch erläuterten Intuitionen sind nun festzuzurren: Grammatische Festlegung: Es sei '$\mathbf{I}\xi_1,...,\xi_k$' ein k-facher variablenbindender Operator, der genau in $\xi_1,...,\xi_k$ offene Formeln Δ in k-stellige Prädikatoren konvertiert. Für die folgende semantische Festlegung ist ϑ ein geschlossener Term und die Substitutionsschreibweise bezieht sich auf alle i mit $1 \leq i \leq k$.

[3]* Man darf jede Aussage der Form

$(\mathbf{I}\xi_1,...,\xi_k\ \Delta(\vartheta_1,...,\vartheta_k)) \leftrightarrow ([\vartheta_i, \xi_i, \Delta])$

kategorisch setzen.

Man kann '$\mathbf{I}\xi_1,...,\xi_k$' etwa lesen als 'Für solches $\xi_1,...,\xi_k$'. '$\mathbf{I}$' stellt, grammatisch genau genommen, eine neue Form von Quantifikator dar, dessen Hinzufügung zu den Mitteln einer Sprache auch eine Neudefinition des Formel- und Prädikatorenbegriffs erzwingt. In diesem Zusammenhang müßte man dann auch zwischen einfachen und zusammengesetzten bzw. $\mathbf{I}$-Prädikatoren unterscheiden. Diese Feinheiten seien hier vernachlässigt! Die Arbeitsweise des eingeführten Konvertierungsoperators kann an folgender Tabelle nachgehalten werden:

[3]$^+$ a) Däne(x) $\vee$ Schwede(x)

$\mathbf{I}x$ (Däne(x) $\vee$ Schwede(x)) (..)

b) $\bigvee u$ (Stadt(u) $\wedge$ Liegt-zwischen(w, u, z))

$\mathbf{I}w,z$ ($\bigvee u$ (Stadt(u) $\wedge$ Liegt-zwischen(w, u, z))) (..,..)

c) Summe-von(x, y, z)

$\mathbf{I}x,y,z$ (Summe-von(x, y, z)) (..,..,..)

Die Konversion von Formeln in Prädikatoren bietet eine Möglichkeit, jede Aussage, die einen geschlossenen Term enthält, in eine atomare Aussage umzuformen. So wird die Aussage '$\bigwedge x$ (Mensch(x) $\rightarrow$ Fürchtet(x, Dracula))' zu '$\mathbf{I}y$ ($\bigwedge x$ (Mensch(x) $\rightarrow$ Fürchtet(x, y))) (Dracula)'. Informell: Die Aussage 'Alle Menschen fürchten Dracula' wird zu 'Dracula ist ein solcher, daß alle Menschen ihn fürchten'. Dabei wählt man stets eine neue, d.h. eine in der Ausgangsformel nicht vorkommende Variable als Variable für den $\mathbf{I}$-Konvertor. – Mit Hilfe der $\mathbf{I}$-Konversion ist auch eine bequeme Möglichkeit geschaffen, in der Folge Beispiele für so und so beschaffene Prädikatoren anzugeben.

Ü1 Beweisen Sie die Aussage:

$\mathbf{I}u$ ($\bigvee z$ (Natürliche-Zahl(z) $\wedge$ $z > u$)) (3)

unter Benutzung der $\mathbf{I}$-Konversion sowie durch Anziehung der Aussagen:

Natürliche-Zahl(3), $\bigwedge w$ (Natürliche-Zahl(u) $\rightarrow$ $\bigvee z$ (Natürliche-Zahl(z) $\wedge$ $z > u$))

6.2 Prädikatorentypen

Prädikatorentypen ergeben sich unter ganz verschiedenen Einteilungsrücksichten. In der Folge ist zunächst an grammatische zu erinnern (6.2.1). Diesen stehen verschiedene semantische gegenüber: Die exemplarbezogene Einteilung fragt danach, ob der Prädikator auf Exemplare zutrifft bzw. ob er auf Exemplare nicht zutrifft (6.2.2). Die systembezogene Gliederung geht auf die Stellung der Prädikatoren im Prädikatorensystem (6.2.3). Die strukturbezogene Typisierung ergibt sich aus strukturellen Eigenschaften der Prädikatoren (6.2.4). Zur besseren Übersicht werden sodann die exemplar-, system- und strukturbezogenen Definitionen zusammengestellt (6.2.5). Abschließend sind einige materiale Prädikatorarten kursorisch vorzustellen (6.2.6).

Wenn man einen Prädikator einer bereits vorliegenden Sprache analysiert, seine >logische Geographie< erstellt, das >Terroir< aufschlüsselt, dann klärt man seine grammatischen, exemplar-, system- und strukturbezogenen, manchmal auch einige seiner materialen Eigenschaften. Führt man einen Prädikator hingegen in eine Sprache ein, dann hat dies zur Folge, daß er Eigenschaften aus den aufgezählten Eigenschaftsgruppen annimmt bzw. mit diesen ausgestattet wird (↑6.2.5).

6.2.1 Grammatische Prädikatorentypen – Erinnerung

Vernachlässigt man die Unterscheidung von einfachen und zusammengesetzten, d.h. **I**-Prädikatoren, dann ergeben aus der Sicht der Rationalen Grammatik zwei Gesichtspunkte für eine Einteilung der Prädikatoren: zum einen die *Stelligkeit*, zum anderen die *Stufigkeit*.

Zufolge des Stelligkeitsgesichtspunktes lassen sich ein-, zwei-, drei-, vier-, ..., n-stellige Prädikatoren unterscheiden, dabei ist n eine positive natürliche Zahl. – Die Feststellung bzw. die Festsetzung der Stelligkeit eines Prädikators ist eine nicht-triviale Angelegenheit; darauf wurde schon im Startkapitel (↑1.1.1) sowie bei der Behandlung der Grammatik (↑3.4.3) hingewiesen.

Ü2 Nehmen Sie an, der >subjektive< Prädikator '..schön-für..' ist durch '$\bigwedge x \bigwedge y$ (x ist schön für $y \leftrightarrow$ (y betrachtet $x \rightarrow x$ gefällt y))' definiert; im Anschluß daran sei '..ist schön' durch '$\bigwedge x$ (x ist schön $\leftrightarrow \bigvee y$ x ist schön für y)' charakterisiert. In derselben Sprache sei der >objektive< Prädikator '..ist schön' durch '$\bigwedge x$ (x ist schön $\leftrightarrow \bigwedge y$ (y betrachtet $x \rightarrow x$ gefällt y))' definiert. Unter welcher naheliegender Bedingung führen diese Charakterisierungen zur Inkonsistenz? Wie könnte die Inkonsistenz vermieden werden? – Vergleichen Sie dazu auch die Neuigkeitsforderung in den Definitionsregeln (↑11.).

Zufolge des Stufigkeitsgesichtspunktes lassen sich Prädikatoren erster, zweiter, dritter, ..., k-ter Stufe unterscheiden; dabei ist k eine positive natürliche Zahl. Diese Unterscheidung ist jedoch nur dann einschlägig, wenn man den (hier in der Regel vorausgesetzten) Rahmen von Sprachen erster Stufe verläßt (↑3.3.3). Die Aussage 'Hans ist mit Fritz verwandt' – formatiert: 'Ist-verwandt-mit(Hans,Fritz)' – entsteht aus der Anwendung des zweistelligen Prädikators erster Stufe 'ist-verwandt-mit(..,..)' auf die Individuenkonstanten/Eigennamen 'Hans' und 'Fritz'. Die Aussage 'Verwandtsein ist symmetrisch' – formatiert: 'Ist-symmetrisch(Ist-verwandt-mit(..,..))' entsteht aus der Anwendung des einstelligen Prädikators zweiter Stufe 'Ist-symmetrisch(—)' auf den zweistelligen Prädikator erster Stufe 'Ist-verwandt-mit(..,..)'. Die Aussage 'Symmetrie ist eine Relationseigenschaft' – formatiert: 'Ist-eine-Relatinseigenschaft(Ist-symmetrisch(—))' entsteht aus der Anwendung des einstelligen Prädikators dritter Stufe 'Ist-eine-Relationseigenschaft(++)' auf den einstelligen Prädikator zweiter Stufe 'Ist-symmetrisch(—)'. Die Zeichenverbindungen 'Ist-symmetrisch(—)' und 'Ist-eine-Relationseigenschaft(++)' sind demnach höherstufige Prädikatoren.

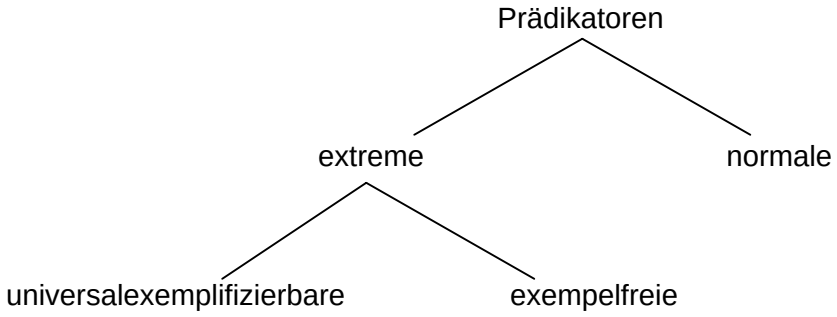
In höherstufigen Sprachen kann man dann auch <u>homogene</u> von <u>inhomogenen</u> Prädikatoren unterscheiden: Die Operanden homogener Prädikatoren gehören derselben Stufe an, die Operanden inhomogener Prädikatoren sind auf verschiedenen Stufen angesiedelt. Ein Beispiel für einen zweistelligen inhomogenen Prädikator, an dessen erster Stelle ein Prädikator und an dessen zweiter Stelle ein Term steht, wäre dann etwa '..wird-exemplifiziert-durch..': Weise wird-exemplifiziert-durch Sokrates. Stärker normiert: Wird-exemplifiziert-durch(Ist-weise(..),Sokrates). Der erste Operand ist ein Prädikator erster Stufe, der zweite Operand zählt zu den Individuenkonstanten (↑3.3.3).

6.2.2 Exemplarbezogene Prädikatorentypen

Prädikatoren, die überhaupt auf Gegenstände zutreffen, sind exemplifizierbar (oder auch erfüllbar); ist dieser Sachverhalt nicht gegeben, so sind sie exempelfrei. Prädikatoren, die auf

einige Gegenstände nicht zutreffen, sind gegenexemplifizierbar; ist dieser Sachverhalt nicht gegeben, so sind sie universalexemplifizierbar. Prädikatoren, die sowohl exemplifizierbar als auch gegenexemplifizierbar sind, gelten als normal; Prädikatoren, die nicht normal sind, sind extrem. Die damit gegebene und aufgezeichnete Einteilungssequenz ist in der Folge im Detail zu erläutern.

[4]



In der Folge steht Φ für einen n-stelligen Prädikator einer geeigneten Sprache *S* erster Stufe; diese Charakterisierungsbedingung wird nicht eigens vorangestellt.

Ein Prädikator Φ <u>ist in</u> einer Sprache *S* <u>exemplifizierbar</u> genau dann, wenn die Partikularaussage $\bigvee\xi_1 \ldots \bigvee\xi_n\ \Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ in *S* gilt. Handelt es sich um einen einstelligen Prädikator, dann ist dieser demzufolge exemplifizierbar, wenn die Aussage $\bigvee\xi\ \Phi(\xi)$ in der Sprache wahr ist. – Die Prädikatoren '..ist-männlich', '..ist-Vater-von..', 'Zeugte-mit(..,..,..)' sind Beispiele für exemplifizierbare ein-, zwei- und dreistellige Prädikatoren in der biologischen Verwandtschaftssprache. Sie stellen damit zugleich Gegenbeispiele für exempelfreie Prädikatoren dar.

Ein Prädikator Φ <u>ist in</u> einer Sprache *S* <u>exempelfrei</u> genau dann, wenn die Negation $\neg\bigvee\xi_1 \ldots \bigvee\xi_n\ \Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ in *S* beweisbar ist. Handelt es sich um einen einstelligen Prädikator, dann ist dieser demzufolge exempelfrei, wenn die Aussage $\neg\bigvee\xi\ \Phi(\xi)$ in der Sprache wahr ist. Die Prädikatoren '..ist-gerade-Primzahl->5', '$\mathbf{l}x,y\ (x > y \wedge y > x)(..,..)$', '$\mathbf{l}x,y,z\ (x = y + z \wedge x \neq y + z)(..,..,..)$' sind Beispiele für exempelfreie ein-, zwei- und dreistellige Prädikatoren der arithmetischen Sprache. Sie sind zugleich Gegenbeispiele für exemplifizierbare Prädikatoren.

Bemerkung: Die kontradiktorischen Prädikatoren – in überkommener lateinischer Terminologie: die contradictiones in adiecto – sind alle exempelfrei, obwohl nicht alle exempelfreien Prädikatoren auch kontradiktorische darstellen: So ist etwa die Ausdrucksverbindung '..ist-im-Jahre-2000-freilebender-Elefant-in-Greifswald' ein exempelfreier, jedoch kein kontradiktorischer Prädikator (↑5.1.4).

Ein Prädikator Φ <u>ist in</u> einer Sprache *S* <u>gegenexemplifizierbar</u> genau dann, wenn die Partikularaussage $\bigvee\xi_1 ... \bigvee\xi_n \neg \Phi(\xi_1, ..., \xi_n)$ in *S* wahr ist. Handelt es sich um einen einstelligen Prädikator, dann ist dieser demzufolge gegenexemplifizierbar, wenn die Aussage $\bigvee\xi \neg \Phi(\xi)$ in der Sprache gilt. – Die Prädikatoren '..ist-männlich', '..ist-Vater-von..', 'Zeugte-mit(..,..,..)' sind Beispiele für ein-, zwei- und dreistellige gegenexemplifizierbare Prädikatoren der biologischen Sprache.

Ein Prädikator Φ <u>ist in</u> einer Sprache *S* <u>universalexemplifizierbar</u> genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\xi_1 ... \bigwedge\xi_n \Phi(\xi_1, ..., \xi_n)$ in *S* wahr ist. Handelt es sich um einen einstelligen Prädikator, dann ist dieser demzufolge universalexemplifizierbar, wenn die Aussage $\bigwedge\xi \Phi(\xi)$ in der Sprache gilt. Die Prädikatoren '$\mathbf{l}y$ (y ist-gerade-Zahl $\vee$ y ist-ungerade-Zahl) (..)', '$\mathbf{l}x,y$ ($x > y \rightarrow \neg y > x$) (..,..)' und '$\mathbf{l}x,y,z$ (x ist-Summe-von y und z $\vee$ $\neg$ x ist-Summe-von y und z)(....,..)' sind Beispiele für universalexemplifizierbare Prädikatoren der arithmetischen Verwandtschaftssprache.

Bemerkung: Prominente Beispiele für universalexemplifizierbare Prädikatoren aus der philosophischen Tradition sind die sogenannten <u>transzendentalen</u> Prädikatoren 'unum', 'bonum', 'verum'. Versucht man die Leitintuition in den hier bestimmenden Rahmen zu übertragen, so ergibt sich: '..est-bonum' ist insofern ein universalexemplifizierbarer Prädikator, als in der unterlegten philosophischen Sprache die Aussage 'Für alle *y*: *y* est-bonum' gilt; dabei bedeutet '..est-bonum' etwa '..kann-Objekt-des-Strebevermögens-werden'. Analog läßt sich '..est-verum' deuten als '..kann-Objekt-des-Erkenntnisvermögens-werden'. Die Vokabel 'unum' könnte man als '..ist-ein-Gegenstand' deuten; dieser Prädikator wäre etwa durch '$x = x$' definierbar; wegen Totalreflexivität der Identität (↑4.4) ergäbe sich dann das Gewünschte.

Φ <u>ist extremer Prädikator in</u> *S* genau dann, wenn Φ universalexemplifizierbarer oder exempelfreier Prädikator in *S* ist; Beispiele für universalexemplifizierbare bzw. exempelfreie Prädikatoren sind demnach auch Beispiele für extreme Prädikatoren. – Φ <u>ist normaler Prädikator in</u> *S* genau dann, wenn Φ sowohl exemplifizierbarer als auch gegenexemplifizierbarer Prädikator in *S* ist. Beispiele für normale Prädikatoren sind also Redeteile, die sowohl Beispiele für exemplifizierbare als auch Beispiele für gegenexemplifizierbare Prädikatoren sind. Sie sind damit zugleich Gegenbeispiele für extreme Prädikatoren.

Φ <u>ist</u> schließlich <u>exklusiv-exemplifizierbarer Prädikator in</u> *S* genau dann, wenn die Einzigkeitsaussage $\mathbf{1}\xi\ \Phi(\xi)$ in *S* beweisbar ist; hierbei ist ausschließlich an einstellige Prädikatoren gedacht, wie etwa '..ist-Verfasser-der-„Die Buddenbrooks"' oder '..ist-gerade-

Primzahl'. Zentraler definierender Ausdruck ist der Einzigkeitsquant(ifikat)or, der seinerseits im Rückgriff auf Partikularquantor, Universalquantor, Konjunktor, Subjunktor und Identitätsprädikator charakterisiert wird (↑5.3.4). – Enthält das durch die Sprache gegebene Diskursuniversum mehr als eine Gegebenheit, gilt also die Aussage $\bigvee\xi\bigvee\omega\ \xi \neq \omega$ in der Sprache, dann sind die exklusiv- exemplifizierbaren Prädikatoren normale Prädikatoren.

Bemerkung: Exklusiv-exemplifizierbare Prädikatoren finden sich (jedenfalls dem Anspruch nach) v.a. in der Gotteslehre. Proponenten einer solchen gehen davon aus, daß die Redeteile '..ist-allmächtig', '..ist-allgültig', '..ist-allwissend', '..ist-unendlich', '..ist-allgegenwärtig' auf genau ein Gebilde, nämlich auf Gott, zutreffen. Ihre Opponenten versuchen demgegenüber zu zeigen, daß es sich dabei um exempelfreie Prädikatoren handelt. Die der Auseinandersetzung zugrundeliegende Schwierigkeit besteht in der/einer für die Parteien einvernehmlichen Explikation der aufgezählten Prädikatoren. – Im Alltag finden sich exklusiv-exemplifizierbare Prädikatoren insbesondere bei einer Sorte superlativischer Redeteile wie etwa '..ist-schnellster-Sprinter-im-Jahre-2000', '..ist-bester-Pfälzer-Riesling-der-letzten-10-Jahre'.

Universale Prädikatoren lassen sich – erläutert für den einstelligen Fall – so bilden, daß man ausgeht von einer wahren Universalaussage, den Universalquantor wegstreicht und den von der Variablen her geeigneten Konversionsquantor voransetzt: So ist etwa 'Für alle *x*: Wenn *x* ein Mensch ist, dann ist *x* sterblich' eine wahre Universalaussage. Wegstreichung des Universalquantors führt zu 'Wenn *x* ein Mensch ist, dann ist *x* sterblich'. Voranstellung des '*x*' bindenden Konversionsquantors hat dann den universalen einstelligen Prädikator '**I***x* (Wenn *x* ein Mensch ist, dann ist *x* sterblich)(..)' zum Ergebnis. In analoger Weise lassen sich exempelfreie und normale Prädikatoren bilden. – Nur normale Prädikatoren können die Prädikationen üblicherweise zugedachten Unterscheidungsaufgaben übernehmen (↑6.3.2).

Ü3 Suchen Sie aus Gebrauchssprache, aus einer fachwissenschaftlichen und aus der philosophischen Sprache je ein Beispiel für einen ein-, zwei-, dreistelligen normalen, leeren und universalen Prädikator!

6.2.3 Systembezogene Prädikatorentypen

Prädikatoren bilden Systeme, Gewebe oder Netze; sie stehen zueinander im Verhältnis von Ein- und Ausschluß, Unter- und Überordnung, Umkehrung usf. Einige dieser Beziehungen sind genauer zu charakterisieren, und zwar in der Reihenfolge Unter- bzw. Überordnung,

Konversität, Negativität, Disjunktheit, Exhaustivität, Klassifikativität. Φ, X, Ψ sind dabei jeweils gleichstellige Prädikatoren der unterlegten Sprache *S*.

Es ist Φ <u>Subprädikator zu</u> Ψ <u>in</u> *S* genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\xi_1 ... \bigwedge\xi_n$ ($\Phi(\xi_1, ..., \xi_n) \rightarrow \Psi(\xi_1, ..., \xi_n)$) in *S* beweisbar ist. Es ist umgekehrt Ψ <u>Superprädikator zu</u> Φ <u>in</u> *S* genau dann, wenn Φ Subprädikator zu Ψ in *S* ist. Wenn also eine Aussage der Art $\bigwedge\xi_1 ... \bigwedge\xi_n$ ($\Phi(\xi_1, ..., \xi_n) \rightarrow \Psi(\xi_1, ..., \xi_n)$) wahr ist, dann ist der Antezedensprädikator Subprädikator des Sukzedensprädikators und der Sukzedensprädikator ist Superprädikator des Antezedensprädikators. – Die folgende Auflistung gibt einige Beispiele für einstellige Sub- bzw. Superprädikatoren aus geeignet gewählten Sprachen:

[5] ↱ ist Subprädikator zu ↴

..hämmert	..handelt
..gerade-Zahl	..natürliche-Zahl
..ist-Fagott	..ist-Musikinstrument
..ist-ein-Fluß	..ist-fließendes-Gewässer
..ist-eine-Großstadt	..ist-eine-Stadt
..ist-ein-Hund	..ist-ein-Lebewesen
..ist-dunkelrot	..ist-rot

↰ ist Superprädikator zu ↵

In der biologischen Verwandtschaftssprache läßt sich z.B. folgende Kette von (von links gelesen) zweistelligen Subprädikatoren bzw. (von rechts gelesen) von Superprädikatoren angeben:

[6] ..ist-Vater-von.., ..ist-Elter-von.., ..ist-Vorfahr-von.., ..ist-verwandt-mit..

Prädikatorenketten können von beträchtlicher Länge sein: '..ist-silberne-ziffernlose-Taschenuhr', '..ist-ziffernlose-Taschenuhr', '..ist-Taschenuhr', '..ist-Uhr', '..ist-Meßgerät', '..ist-Gerät', '..ist-Artefakt', '..ist-sinnenfälliger-Gegenstand'.

Wenn – in einer Sprache *S* – Φ Subprädikator von Ψ ist und Ψ umgekehrt Subprädikator von X, dann ist auch Φ Subprädikator von X. Diese – später als Transitivität betitelte (↑6.2.4) – Eigenschaft beruht darauf, daß eine Aussage der Art $\bigwedge\xi_1 ... \bigwedge\xi_n$ ($\Phi(\xi_1, ..., \xi_n) \rightarrow \mathrm{X}(\xi_1, ..., \xi_n)$) Konsequenz aus der Klasse von Aussagen der Art $\bigwedge\xi_1 ... \bigwedge\xi_n$ ($\Phi(\xi_1, ..., \xi_n) \rightarrow \Psi(\xi_1, ..., \xi_n)$), $\bigwedge\xi_1 ... \bigwedge\xi_n$ ($\Psi(\xi_1, ..., \xi_n) \rightarrow \mathrm{X}(\xi_1, ..., \xi_n)$) ist. Weiß man von einem beliebigen ϑ-Gegenstand, daß er ein Φ ist, dann treffen auf den ϑ-Gegenstand auch alle Superprädikatoren von Φ zu.

Φ <u>ist koextensiver</u> bzw. <u>koextensionaler Prädikator zu</u> Ψ <u>in</u> *S* genau dann, wenn Φ sowohl Sub- als auch Superprädikator von Ψ in *S* ist, wenn also die Universalaussage $\bigwedge\xi_1 ... \bigwedge\xi_n$ $(\Phi(\xi_1, ..., \xi_n) \leftrightarrow \Psi(\xi_1, ..., \xi_n))$ in *S* beweisbar ist. – Es sind z.B. die einstelligen Prädikatoren '..ist-Lebewesen-mit-Herz' und '..ist-Lebewesen-mit-Nieren' oder die zweistelligen Prädikatoren '..ist-Vater-von..' und '**l***uw* (*u* ist-männlich $\wedge$ *u* zeugte *w*) (..,..)' in geeignet gewählten Sprachen zueinander koextensive Prädikatoren. – Ferner: Es ist Φ Subprädikator/Superprädikator von Ψ und außerdem Ψ Subprädikator/Superprädikator von Φ genau dann, wenn Φ und Ψ in der jeweiligen Sprache koextensive Prädikatoren sind.

Ist Φ ein exemplifizierbarer Prädikator, dann ist auch jeder Superprädikator von Φ exemplifizierbar; es ist nämlich eine Aussage der Art $\bigvee\xi_1 ... \bigvee\xi_n\ \Psi(\xi_1, ..., \xi_n)$ Konsequenz aus einer Klasse von Aussagen der Art $\bigvee\xi_1 ... \bigvee\xi_n\ \Phi(\xi_1, ..., \xi_n)$, $\bigwedge\xi_1 ... \bigwedge\xi_n\ (\Phi(\xi_1, ..., \xi_n) \rightarrow \Psi(\xi_1, ..., \xi_n))$. Es ist weiter jeder Prädikator Superprädikator zu exempelfreien Prädikatoren; das beruht darauf, daß eine Aussage der Art $\bigwedge\xi_1 ... \bigwedge\xi_n\ (\Phi(\xi_1, ..., \xi_n) \rightarrow \Psi(\xi_1, ..., \xi_n))$ Konsequenz aus einer Klasse von einer Aussage der Art $\neg\ \bigvee\xi_1 ... \bigvee\xi_n\ \Phi(\xi_1, ..., \xi_n)$ ist. Schließlich ist – wegen $\{\bigwedge\xi_1 ... \bigwedge\xi_n\ \Psi(\xi_1, ..., \xi_n)\} \vdash \bigwedge\xi_1 ... \bigwedge\xi_n\ (\Phi(\xi_1, ..., \xi_n) \rightarrow \Psi(\xi_1, ..., \xi_n))$ – ein universal-exemplifizierbarer Prädikator Superprädikator zu jedem Prädikator.

Ü4 a) Suchen Sie in einer Sprache Ihrer Wahl

aa) eine Prädikatorenkette mit sechs Gliedern für einstellige Prädikatoren

ab) eine Prädikatorenkette mit vier Gliedern für zweistellige Prädikatoren

ac) eine Prädikatorenkette mit drei Gliedern für dreistellige Prädikatoren

b) Bilden Sie eine wenigstens fünfgliedrige Prädikatorenkette, deren mittleres Glied die Zeichenverbindung '..ist-ein-Pudel' ist!

Es <u>ist</u> Φ <u>ein zu</u> Ψ <u>konverser Prädikator in</u> *S* genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\xi\bigwedge\omega$ $(\Phi(\xi, \omega) \leftrightarrow \Psi(\omega, \xi))$ eine in *S* wahre Aussage ist; hierbei ist vorausgesetzt, daß Φ und Ψ zweistellige Prädikatoren sind. So sind beispielsweise '..Elter-von..' und '..Kind-von..', '..<..' und '..>..', '..nördlich-von..' und '..südlich-von..' zueinander konverse Prädikatoren in der jeweiligen Sprache. Bei dieser Formulierung ist durch Verwendung des Wortes 'zueinander' schon die Tatsache benutzt, daß Ψ auch zu Φ konverser Prädikator ist, falls Φ zu Ψ konverser Prädikator ist.

Ist Φ ein zu Ψ konverser Prädikator und ist Φ Subprädikator zu X_1, dann ist Ψ Subprädikator zu jedem zu X_1 konversen Prädikator X_2. Diese Behauptung läßt sich informell so begründen: Sei $\Phi°$ zu $\Psi°$ konverser Prädikator. Sei $\Phi°$ Subprädikator zu $X_1°$. Sei $X_2°$ konverser Prädikator zu $X_1°$. Sei $\beta_1\Psi°\beta_2$. Nach der ersten Voraussetzung ist dann $\beta_2\Phi°\beta_1$.

Zufolge der zweiten Voraussetzung ist $\beta_2 X_1 \circ \beta_1$. Gemäß der dritten Voraussetzung ist dann $\beta_1 X_2 \circ \beta_2$; damit ist $\beta_1 \Psi \circ \beta_2 \rightarrow \beta_1 X_2 \circ \beta_2$; durch UE und mit Hilfe der Konversendefinition folgt das Gewünschte.

Die zunächst auf den hauptsächlichen Anwendungsbereich beschränkte Begriffsbildung kann auf n-stellige Prädikatoren mit $n \geq 2$ erweitert werden: Φ ist zu Ψ an der i-ten und der k-ten Stelle konverser Prädikator in *S* genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\xi_1 \ldots \bigwedge\xi_i \ldots \bigwedge\xi_k \ldots \bigwedge\xi_n\ (\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_k, \ldots, \xi_n) \leftrightarrow \Psi\ (\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_n))$ wahr ist; dabei ist $1 \leq i$ und $k \leq n$. So ist z.B. '..ist-relativ-zu..Fortschritt-im-Blick-auf..' an der ersten und zweiten Stelle konverser Prädikator zu '..ist-relativ-zu..Rückschritt-im-Blick-auf..' z.B. in einer technikhistorischen, einer geschichtsphilosophischen oder einer politischen Sprache.

Es <u>ist</u> Φ <u>Negatprädikator von</u> Ψ <u>in</u> *S* genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\xi_1 \ldots \bigwedge\xi_n\ (\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) \leftrightarrow \neg\Psi\ (\xi_1, \ldots, \xi_n))$ in *S* wahr ist. So sind etwa '..ist-rot' und '**l**y ($\neg$ y ist rot)(..)' zueinander Negatprädikatoren einstelliger Art. Identitäts- und Diversitätsprädikator sind Negatprädikatoren der zweistelligen Art in beliebigen Sprachen, in denen sie vorkommen; wenn Φ Negatprädikator von Ψ ist, dann gilt auch das Umgekehrte. – In überkommener Terminologie spricht man auch davon, daß Φ kontradiktorisches Gegenteil von Ψ ist.

Es <u>ist</u> Φ <u>zu</u> Ψ <u>disjunkter</u> bzw. <u>konträrer Prädikator in</u> *S* genau dann, wenn die Negation $\neg \bigvee\xi_1 \ldots \bigvee\xi_n\ (\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) \wedge \Psi\ (\xi_1, \ldots, \xi_n))$ in *S* wahr ist. Für einstellige Prädikatoren formuliert: Es gibt keine Gegebenheit, auf die beide Prädikatoren zutreffen. Wenn immer Φ zutrifft, fehlt Ψ, und umgekehrt. Was ein Reh ist, ist kein Hase; mithin sind '..ist-Hase' und '..ist-Reh' konträre Prädikatoren der einstelligen Art. Wenn jemand Sohn von jemandem ist, dann stehen die betrachteten Personenfolgen nicht auch im Tochterverhältnis zueinander; '..ist-Sohn-von..' und '..ist-Tochter-von..' sind demnach zueinander konträre Prädikatoren der zweistelligen Art. Ist Φ zu Ψ disjunkter Prädikator, dann gilt auch das Umgekehrte.

Wenn Φ Negatprädikator von Ψ ist, dann ist Φ auch zu Ψ disjunkter Prädikator. Diese Tatsache beruht darauf, daß die die Disjunktheit definierende Formel Konsequenz der die Negativität definierenden Formel ist. Das Umgekehrte ist jedoch nicht der Fall: So sind z.B. '..ist-Reh' und '..ist-Hase' zueinander keine Negatprädikatoren: Was nicht Hase ist, ist nicht schon deshalb ein Reh. Es ist das kontradiktorische Gegenteil also ein Spezialfall des konträren. – Die Darstellung der polarkonträren Prädikatoren macht Gebrauch von den strukturellen Eigenschaften und ist demzufolge erst später einzufügen (↑6.2.3).

Es sind Φ und Ψ X-<u>exhaurierende Prädikatoren in</u> *S*, wenn in *S* die Universalaussage $\bigwedge\xi_1 \ldots \bigwedge\xi_n\ (\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) \vee \Psi(\xi_1, \ldots, \xi_n) \leftrightarrow X(\xi_1, \ldots, \xi_n))$ beweisbar ist. So exhaurieren '..ist-Bayer'

und '..ist-deutscher-Nicht-Bayer' den Prädikator '..ist-Deutscher'. Ebenso exhaurieren etwa '..ist-Vater-von..' und '..ist-Mutter-von..' den Prädikator '..ist-Elter-von..'.

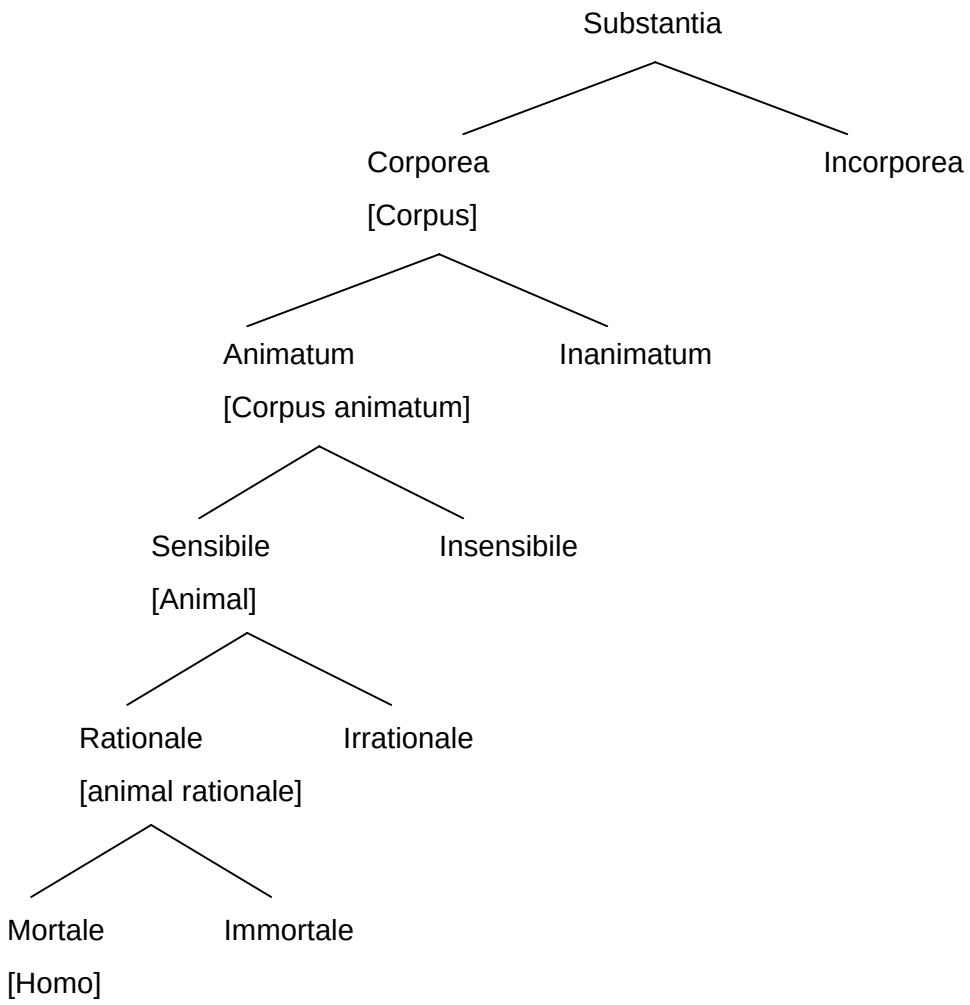
Exhaustivität, Disjunktheit und Exemplifizierbarkeit können zum Gedanken der Klassifikation zusammengeführt werden: Φ und Ψ klassifizieren in S X genau dann, wenn Φ und Ψ in S disjunkte Prädikatoren sind, Φ und Ψ in S X exhaustieren und Φ und Ψ in S exemplifizierbar sind. '..ist-männlich' und '..ist-weiblich' klassifizieren '..ist-Mensch', '..ist-rot' und '$\mathbf{I}z$ ($\neg$ z ist rot)(..)' klassifizieren '..ist-einfarbiger-Körper', '..ist-Bruder-von..' und '..ist-Schwester-von..' klassifizieren '..ist-Geschwister-von..'.

Die Klassifikationsidee läßt sich in dem Sinne verallgemeinern, als n Prädikatoren $\Phi_1,\ldots, \Phi_n$ X klassifizieren, also paarweise disjunkt sind, gemeinsam X exhaurieren und außerdem exemplifizierbar sind. Zerlegen zwei bzw. drei Prädikatoren X, dann spricht man von einer Dichotomie bzw. von einer Trichotomie.

Man kann ferner Klassifikationen hintereinanderschalten; dann entstehen Klassifikationsfolgen bzw. Klassifikationsbäume, im besonderen Fall auch Folgen von Dichotomien. So wird unter [4] der Prädikator '..ist ein Prädikator' durch '..ist ein extremer Prädikator' und '..ist ein normaler Prädikator' klassifiziert. Ferner wird '..ist ein extremer Prädikator' durch '..ist ein universalexemplifizierbarer Prädikator' und '..ist ein exempelfreier Prädikator' klassifiziert. – Es empfiehlt sich, die genauere Charakterisierung von Klassifikation und Klassifikationsfolgen in einem bequemeren, expliziteren und insoweit leistungsfähigeren sprachlichen Rahmen vorzunehmen (↑ZUSATZ).

Bemerkung: Die historisch wohl bekannteste Dichotomisierungsfolge ist die „arbor porphyreana“, die sich (in überkommener Terminologie) so anschreiben läßt:

[7]



Im Kontext der traditionellen Logik dient der Klassifikationsbaum der Erläuterung des Verhältnisses von genus (Gattung) und species (Art). In der hier entwickelten Perspektive liegt eine sechsgliedrige Dichotonisierungssequenz vor: So bilden z.B. '..est-corpus-animatum' und '..est-corpus-inanimatum' eine Klassifikation von '..est-corpus'. Um im letzten Klassifikationsschritt beim rechten Glied die Exemplifizierbarkeitsforderung aufrechterhalten zu können, sind allerdings kühne theologische Spekulationen erforderlich.

Prädikatoren bilden in allen Sprachen >Netze<, >Gewebe<, >Systeme<, >Gefüge<, >Landschaften<, >Territorien< usf.; und die dort herrschenden Verhältnisse lassen sich mit Hilfe der entwickelten Begriffe beschreiben. Dazu abschließend ein Beispiel aus der Gebrauchssprache. Der Prädikator '..ist-eine-Taschenuhr' besitzt konträre Prädikatoren, z.B. '..ist-eine-Turmuhr', '..ist eine Armbanduhr', oder '..ist-eine-Standuhr'. Die genannten Prädikatoren haben alle '..ist-eine-Uhr' zum Superprädikator, der seinerseits unverträglich mit '..ist-eine-Waage' und '..ist-ein-Zollstock' ist. Die letztgenannten Prädikatoren sind, gemeinsam mit '..ist-eine-Uhr', Subprädikatoren von '..ist-ein-Meßgerät'. Dieser Ausdruck schließt wiederum '..ist-ein-Turngerät' und '..ist-ein-Schneidgerät' aus. Weitere Superprädikatoren dazu wären etwa '..ist-ein-Gerät' und sodann '..ist-ein-Artefakt'.

Geht man umgekehrt von '..ist-ein-Schneidgerät' >nach unten<, also zu Subprädikatoren, kommt man etwa zu '..ist-ein-Messer' bzw. '..ist-eine-Schere', die zueinander konträr sind. Subprädikator von '..ist-ein-Messer' wäre etwa '..ist-ein-Küchenmesser'; und dieser Redeteil hätte dann etwa die untereinander paarweise konträren Prädikatoren '..ist-ein-Tomatenmesser', '..ist-ein-Filetiermesser', '..ist-ein-Schinkenmesser' zu Subprädikatoren.

Ü5 a) Suchen Sie einen konversen Prädikator zu '..ist-Sohn-von..', '..ist-Großelter-von..', '..ist-Bruder-von..'!

b) Geben Sie eine wenigstens fünfgliedrige Dichotomisierungssequenz!

c) Beschreiben Sie ein kleineres Gewebe zweistelliger Prädikatoren aus einer Sprache Ihrer Wahl!

6.2.4 Strukturbezogene Prädikatorentypen

Die Darlegung der strukturbezogenen Prädikatorentypen konzentriert sich auf die zweistelligen Prädikatoren und gibt nur gelegentlich einen exemplarischen Hinweis auf Erweiterungen. Zweistellige Prädikatoren stellen Relationen dar; und es ist hilfreich, gelegentlich in materialer Redeweise von Relationen und dem Stehen-in-Relationen usf. zu sprechen. Ebenso fördert die Verwendung von Pfeildiagrammen den verständigen Mitvollzug.

Fragt man danach, ob beliebige Gebilde (einer bestimmten Sorte) zu sich selbst in der betrachteten X-Relation stehen, dann untersucht man X auf Reflexivität (6.2.4.1). Gilt das Interesse der Umkehrbarkeit einer Relation X, dann überprüft man X auf Symmetrie (6.2.4.2). Eigenschaften aus der Gruppe der Transitivität werden betrachtet, wenn – vergröbernd und nicht ganz korrekt ausgedrückt – jeweils drei beliebige Gebilde in ihrem Verhalten bezüglich einer Relation X untersucht werden (6.2.4.3). Wird das Problem aufgeworfen, ob zwischen beliebigen Gebilden die Relation X in wenigstens einer Richtung besteht, dann untersucht man X auf Konnexität (6.2.4.4). Fragt man danach, ob – wiederum vergröbernd – zwischen durch X aufeinander Bezogenen Identitäten vorliegen, dann untersucht man X auf Deutigkeit (6.2.4.5). Diese einfachen strukturellen Eigenschaften lassen sich zu komplexen zusammenfügen. Die Gleichheiten (6.2.4.6) sowie die Ordnungen (6.2.4.7) sind wegen ihres häufigen Vorkommens und wegen der mit ihnen gegebenen begriffsbildnerischen Möglichkeiten von überragender Bedeutung.

6.2.4.1 Die Reflexivitätsgruppe

Besitzt die X-Relation die Eigenschaft, daß ein jedes Gebilde zu sich in X steht? Bei affirmativer Antwort ist X totalreflexiv. Genauer: X <u>ist in</u> *S* <u>totalreflexiv</u> genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\xi\ \xi X\xi$ in *S* wahr ist. Der Identitätsprädikator ist in allen Sprachen so festgelegt, daß die erwähnte Universalaussage gilt; insofern ist er das Musterbeispiel für einen totalreflexiven Prädikator. Ein weiteres Beispiel wäre etwa '..ist-kardinaläquivalent-zu..' in einer reinen Klassensprache. Ist der Redebereich einer Sprache beschränkt auf Menschen, dann wären auch die Prädikatoren '..ist-gleichalt..' oder '..ist-gleichgroß..' totalreflexiv in dieser Sprache.

Bezüglich der Prädikatoren, die nicht totalreflexiv sind, ist die Gruppe auszuzeichnen, die das Zu-sich-in-X-stehen völlig ausschließen: X <u>ist in</u> *S* <u>irreflexiv</u> genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\xi\ \neg\ \xi X\xi$ bzw. die negierte Partikularaussage $\neg\ \bigvee\xi\ \xi X\xi$ in *S* beweisbar ist. Beispiel für irreflexive Prädikatoren sind alle Komparative (wie etwa '..ist-länger/schwerer/früher/wärmer/klüger/freundlicher-als..' usf.), '..ist-Vorfahr-von..', '..ist..vor-zuziehen/nachzusetzen', '..ist-verschieden-von..' bzw. '..≠..', '..ist-Hohlraum-in/durch..', '..ist-geboren-am..'. Diese Prädikatoren stellen zugleich Gegenbeispiele zu totalreflexiven Prädikatoren dar; umgekehrt sind die oben aufgeführten Prädikatoren Gegenbeispiele zur Irreflexivität.

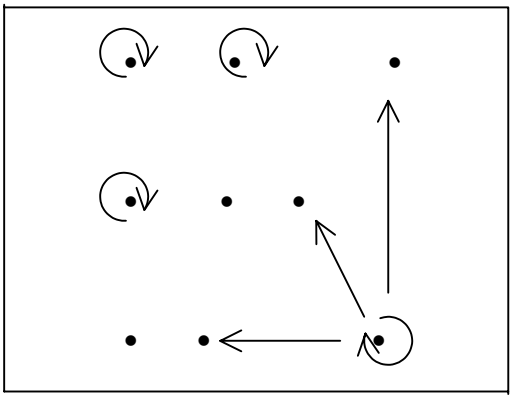
Zahlreiche Prädikatoren sind nur für ein bestimmtes Gebiet (aus dem Gesamtredebereich) interessant. So will man etwa '..ist-gleichzeitig..' ausschließlich auf Ereignisse anwenden; und auf diese Gebilde wird man nicht die Prädikatoren '..ist-intelligenzgleich..' oder '..ist-ebenso-humorvoll-wie..' anwenden. So ist man auch für ein bestimmtes Gebiet daran interessiert, ob jedes Gebilde dieses Gebiets zu sich in der Relation X steht. Das >Gebiet< wird durch einen einstelligen Prädikator Φ ins Spiel gebracht: Es ist X <u>reflexiv auf</u> Φ <u>in</u> *S* genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\xi\ (\Phi(\xi) \rightarrow \xi X\xi)$ in *S* wahr ist.

Die Prädikatoren '..ist-richtungsgleich..', '..ist-gleichlang..', '..liebt..', '..ist-gattungsgleich..', sind reflexiv auf '..ist-Gerade', '..ist-kantentragender-Körper', '..ist-Mensch', '..ist-Lebewesen' in der geometrischen, physikalischen, aristotelischen, biologischen Sprache. – Für alle diese Beispiele gilt auch umgekehrt: Steht ein Gebilde zu einem Gebilde in der Relation, dann zählen sie auch zu dem einschlägigen Bereich. Nur wenn z.B. a und b auch Geraden sind, ist a richtungsgleich b. Allgemein kann man definieren: X <u>ist geschlossen auf</u> Φ <u>in</u> *S* genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\omega X\xi \rightarrow \Phi(\omega) \wedge \Phi(\xi))$ in *S* wahr ist. Wenn eine Gleichheit – allgemeiner: eine Relation – sich ausschließlich auf einem Bereich Φ abspielt, wenn also alle und nur die durch X aufeinander Bezogenen auch Φ–Gegebenheiten sind,

dann stellt Φ das Feld der X-Relation dar: Φ <u>ist in</u> *S* <u>Feldprädikator bezüglich</u> X genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\xi\ (\Phi(\xi) \leftrightarrow \bigvee\omega\ (\omega X\xi \vee \xi X\omega))$ in *S* beweisbar ist. Φ ist in *S* Feldprädikator bezüglich X , falls X geschlossen und reflexiv auf Φ in *S* ist.

Betrachtet man den zweistelligen Prädikator '..rasiert..' unter der Reflexivitätsfrage – stehen alle/einige/alle (nicht) zu sich in der '..rasiert..'-Relation, dann ergibt sich: Einige rasieren sich selbst, andere nicht. Diejenigen, die sich nicht selbst rasieren, können von anderen rasiert werden, oder werden weder von sich noch von anderen rasiert. Diese Relation ist also auf '..Mensch' nicht reflexiv, aber sie ist auch nicht irreflexiv. Solche Prädikatoren besitzen eine Mittelstellung und werden gelegentlich als partimreflexiv angesprochen. Beschränkt man eine Sprache auf das Diskursuniversum, das durch '..ist-Mensch' fixiert ist, und symbolisiert man das Stehen-zu-sich durch einen Rückkehrpfeil, dann ergibt sich als Pfeildiagramm für die '..rasiert..'-Relation:

[6]



Totalreflexive Relationen werden so dargestellt, daß jedes Relat, d.h. jedes in der Relation stehende Gebilde, einen Rückkehrpfeil besitzt. Das besagt nicht – man denke an den Prädikator '..ist kardinaläquivalent..' –, daß zwischen verschiedenen Relaten kein Pfeil eingetragen werden kann. So sind z.B. die Klasse mit den Elementen 1 und 2 und die Klasse mit dem Kölner Dom und dem Eiffelturm als Elementen kardinaläquvalent, aber verschieden. Für den Identitätsprädikator gilt allerdings stets, daß zwischen den Relata kein Pfeil verläuft. Irreflexive Relationen enthalten keinen Rückkehrpfeil. Auf einem Bereich reflexive Relationen sind am Rückkehrpfeil in ihrem Territorium erkennbar.

Auf Basis der vorgenommenen Bestimmungen und unter Hinzuziehung der in den vorangegangenen Abschnitten zusammengestellten Begriffe ergeben sich Folgefragen, z.B. diese: Sind alle totalreflexiven Prädikatoren reflexiv? Unter welcher Bedingung sind reflexive Prädikatoren totalreflexiv? Sind Subprädikatoren totalreflexiver, reflexiver, irreflexiver Prädikatoren ihrerseits totalreflexiv, reflexiv, irreflexiv? Wie steht es mit den entsprechenden

Superprädikatoren? Bleibt die jeweilige Eigenschaft bei den konversen, den konträren, den kontradiktorischen Prädikatoren erhalten? Sind universale (zweistellige) Prädikatoren totalreflexiv? Sind umgekehrt totalreflexive Prädikatoren universale (zweistellige) Prädikatoren?

Eine umfassende Beantwortung dieser und anderer, hier ungestellter Fragen soll in einem bequemeren Sprachrahmen vorgenommen werden (↑ZUSATZ). Hier sind exemplarisch zwei Probleme aufzunehmen. Die Frage danach, ob Subprädikatoren irreflexiver Prädikatoren ihrerseits irreflexiv sind, läßt sich bejahen. Die ausformulierte Antwort lautet: Wenn Φ ein in *S* irreflexiver Prädikator ist und Ψ in *S* Subprädikator von Φ ist, dann ist Ψ in *S* irreflexiver Prädikator. Begründung: Sei $\Phi°$ ein in S irreflexiver Prädikator; dann ist definitionsgemäß die Aussage $\bigwedge\xi \neg \xi\Phi°\xi$ in S beweisbar. Sei ferner $\Psi°$ in S Subprädikator von $\Phi°$; dann ist die Aussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi (\omega\Psi°\xi \rightarrow \omega\Phi°\xi)$ in S beweisbar. Nun ist aber die Aussage $\bigwedge\xi \neg \xi\Psi°\xi$ in S Konsequenz der beiden erwähnten Universalaussagen; definitionsgemäß ist dann $\Psi°$ ein in S irreflexiver Prädikator.

Subprädikatoren totalreflexiver Prädikatoren oder auch auf einem Prädikator reflexiver Prädikatoren sind nicht notwendig reflexiv. Man denke, um ein schon erwähntes Beispiel zu wiederholen, an die Kardinaläquivalenz. Definiert man etwa einen neuen Prädikator '..ist kardinaläquivalent*..' durch '..ist kardinaläquivalent $y \wedge x \neq y$', verliert der so bestimmte Prädikator, der ersichtlich Subprädikator zu '..ist kardinaläquivalent..' ist, die Reflexivität.

Ü6 a) Zeigen Sie, daß Φ Feldprädikator bezüglich X ist, falls X reflexiv auf Φ ist und X geschlossen auf Φ ist!

b) Zeigen Sie, daß X_1 in *S* totalreflexiver Prädikator ist genau dann, wenn X_2 in *S* totalreflexiver Prädikator ist, falls X_1 konverser Prädikator zu X_2 in *S* ist!

c) Untersuchen Sie, welche Reflexivitätseigenschaften ein exempelfreier zweistelliger Prädikator besitzt!

6.2.4.2 Die Symmetriegruppe

Die Frage, die zu den Unterscheidungen der Symmetriegruppe führt, lautet: Wie steht es um die Umkehrbarkeit der Beziehung? Genauer: Angenommen, eine Gegebenheit steht zu einer Gegebenheit in der X-Relation; gilt dann auch die Umkehrung? Wird diese Frage für beliebige Gegenstände bejaht, dann ist die X-Relation symmetrisch; wird sie hingegen für beliebige Gegenstände verneint, dann ist die X-Relation asymmetrisch.

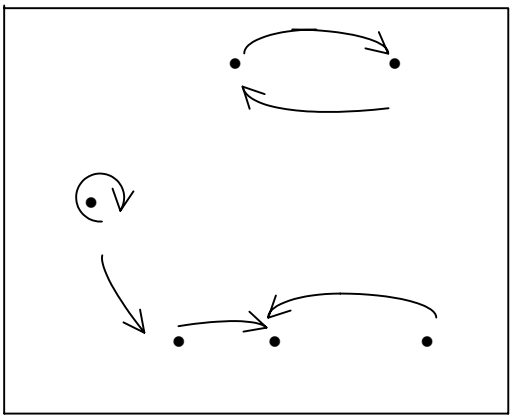
Im einzelnen: Es <u>ist</u> X <u>ein symmetrischer Prädikator in</u> *S* genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\ (\omega X\xi \rightarrow \xi X\omega)$ in *S* beweisbar ist. Der Identitätsprädikator, der Diversitätsprädikator, die Prädikatoren '..ist-gleichalt..', '..ist-Zeitgenosse-von..', '..ist-verwandt-mit..' sind symmetrische Redeteile. Die Intuition kann man sich auch in der anschaulichen Richtungssprechweise verdeutlichen: Besteht die X-Relation zwischen einem Gebilde und einem Gebilde in der einen Richtung, dann gilt sie auch in der Umkehrrichtung.

In Anknüpfung an diese Formulierung läßt sich die Asymmetrie so beschreiben: Besteht die X-Relation zwischen einem Gebilde und einem Gebilde in der einen Richtung, dann besteht sie keinesfalls in der Umkehrrichtung. Genauer: Es <u>ist</u> X <u>ein asymmetrischer Prädikator in</u> *S* genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\ (\omega X\xi \rightarrow \neg\ \xi X\omega)$ in *S* wahr ist. Falls irgendwelche Gebilde überhaupt in der X-Relation stehen, stehen sie nur in der einen Richtung in der Relation. Die bei Exemplifizierung der Irreflexivität aufgezählten Prädikatoren sind, mit Ausnahme des Diversitätsprädikators, zugleich Beispiele für asymmetrische Prädikatoren; die für symmetrische Prädikatoren gegebenen Beispiele sind hingegen Gegenbeispiele für Asymmetrie, und umgekehrt.

Auch diese Begriffsbildungen lassen sich für n-stellige Prädikatoren bezüglich der i-ten und der k-ten Stelle verallgemeinern. So ist etwa die Universalaussage $\bigwedge\xi\bigwedge\omega\bigwedge\zeta\ (X(\xi,\omega,\zeta) \rightarrow \neg\ X(\omega,\xi,\zeta))$ in einer geschichtsbezogenen Sprache für die Prädikatoren '..ist-Fortschritt-gegenüber..bezüglich..' und '..ist-Rückschritt-gegenüber..bezüglich..' beweisbar. Hier liegt Asymmetrie bezüglich der ersten und zweiten Stelle vor. Eben diese Eigenschaft besitzen auch die Prädikatoren '..liegt-links-von..bezüglich..' bzw. '..liegt-rechts-von..bezüglich..'; damit ist eine in den Startüberlegungen beanspruchte Begrifflichkeit geklärt (↑1.1.1).

Stellt man nun bezüglich der Liebesrelation bzw. bezüglich des Prädikators '..liebt..' die Symmetriefrage, dann lautet die (zunächst negative) Antwort: Es ist nicht der Fall, daß die Liebesrelation symmetrisch ist; denn gelegentlich bleibt die Liebe unerwidert. Es liegt aber auch keine Asymmetrie vor: Denn gelegentlich wird zurückgeliebt. Es gibt also – um zur positiven Antwort überzugehen – Gebilde *x,y,* so daß *x y* liebt , aber *y x* nicht liebt*;* aber es gibt auch Gebilde *x,y*, so daß *x y* liebt und auch *y x* liebt. Solche Relationen nennt man partimsymmetrisch. Stellt man das Bestehen einer X-Relation wiederum durch einen Pfeil dar, dann läßt sich die Pfeilfigur für eine partimsymmetrische Relation mit überschaubar wenigen Relata so wiedergeben:

[7]



Die dargestellte Liebesrelation ist zugleich partimreflexiv: Es sind Rück- und Umkehrpfeile vorhanden, aber auch Relata, von denen nur ein Pfeil ausgeht bzw. auf die nur ein Pfeil auftrifft, ohne daß die Umkehrrichtung realisiert ist.

Führt der Umstand, daß eine Relation X zwischen einer Gegebenheit und einer Gegebenheit in beiden Richtungen besteht, dazu, daß die Bezogenen identisch sind, dann ist diese Relation antisymmetrisch. In kontraponierter Formulierung: Ist eine Gegebenheit von einer Gegebenheit verschieden, dann stehen sie in wenigstens einer Richtung nicht in der X-Beziehung. X <u>ist ein in</u> *S* <u>antisymmetrischer Prädikator</u> genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\xi X\omega \wedge \omega X\xi \rightarrow \omega = \xi)$ in *S* beweisbar ist. Der Teilklassenprädikator '..$\subseteq$..' ist ein in den üblichen Klassensprachen antisymmetrischer Prädikator; der Kleinergleich-Prädikator ist ein Beispiel aus der arithmetischen Sprache. Asymmetrische Relationen sind trivialerweise, d.h. wegen unerfülltem Antezedens, antisymmetrisch. Sowohl irreflexive wie auch antisymmetrische Relationen sind asymmetrisch.

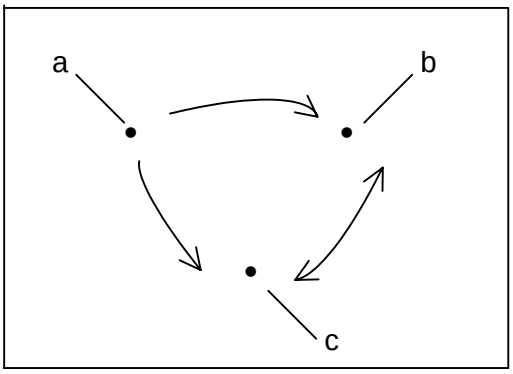
Mit Blick auf die Ordnungsprädikatoren (↑6.2.4.7) ist zu definieren: X_1 <u>ist ein bezüglich</u> X_2 <u>antisymmetrischer Prädikator in</u> *S* genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\ (\xi X_1\omega \wedge \omega X_1\xi \rightarrow \omega X_2\xi)$ in *S* wahr ist. So ist etwa '..ist-nicht-schwerer-als..' bezüglich '..ist-gleich-schwer..' antisymmetrischer Prädikator in der physikalischen Sprache. Wird für X_2 der Identitätsprädikator gewählt, dann fällt die bezügliche Antisymmetrie mit der einfachen Antisymmetrie zusammen: Identitätsantisymmetrische Prädikatoren sind antisymmetrisch schlechthin.

Ebenso wie nach der Darstellung der Reflexivitätsgruppe ergeben sich eine Reihe von Folgefragen: Sind Sub- resp. Superprädikatoren symmetrischer, asymmetrischer, antisymmetrischer Prädikatoren ihrerseits symmetrisch, asymmetrisch, antisymmetrisch? Wie verhalten sich die konversen bzw. die Negatprädikatoren bei Gegebenheit einer Symmetrieeigenschaft. Welche Zusammenhänge bestehen zwischen der Reflexivitäts- und

der Symmetriegruppe? Genauer: Sind Eigenschaften der Symmetriegruppe hinreichende oder notwendige Bedingungen für Eigenschaften aus der Reflexivitätsguppe?

Der wichtigste Zusammenhang ist die Verknüpfung zwischen Asymmetrie und Irreflexivität. Wenn X in *S* asymmetrisch ist, dann ist X in *S* irreflexiv. Sei $X°$ in *S* asymmetrisch; dann ist die Universalaussage $\bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\omega X°\xi \rightarrow \neg\ \xi X°\omega)$ in *S* wahr. Nun ist aber die Aussage $\bigwedge\xi\ \neg\ \xi X°\xi$ eine Konsequenz aus $\{\bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\omega X°\xi \rightarrow \neg\ \xi X°\omega)\}$. Mithin ist $X°$ in *S* auch irreflexiv. Ist die Asymmetrie eines Prädikators erkannt, dann braucht man sie auf Reflexivitätseigenschaften nicht mehr eigens zu untersuchen. Damit sind alle Beispiele für asymmetrische Relationen auch Beispiele für irreflexive Relationen. Natürlicherweise ergibt sich die Umkehrfrage: Erzeugt Irreflexivität auch Asymmetrie? Folgende Pfeilfigur (und auch der oben schon erwähnte Diversitätsprädikator) zeigt, daß die Antwort negativ ist:

[8]



Das Fehlen des Rückkehrpfeils zeigt die Irreflexivität an. Zwischen b und c besteht die Beziehung jedoch in beide Richtungen: Asymmetrie liegt demnach nicht vor. Die Relation kann man z.B. als '..bewundert..' eingeschränkt auf drei Personen a, b und c, deuten. Die vorgenommene Anführung irreflexiver Prädikatoren als Beispiele für Asymmetrie ist also nicht dadurch legitimiert, daß alle irreflexiven Prädikatoren auch asymmetrisch sind.

Ü7 Wenn es kein Gebilde gibt, das zu einer und zu dem eine beliebige Gegebenheit in einer Relation steht, dann ist diese asymmetrisch und irreflexiv.

a) Geben Sie eine korrekte Formulierung dieses intuitiv artikulierten Sachverhalts!

b) Liefern Sie einen Beweis!

c) Suchen Sie drei Beispiele für asymmetrische Prädikatoren, die diese Bedingung erfüllen!

6.2.4.3 Die Transitivitätsgruppe

Das Transitivitätsszenario geht aus von (höchstens) drei beliebigen Gegebenheiten; zwischen diesen besteht die X-Relation so, daß eine Gegebenheit zweimal Relat ist. Gefragt ist dann, ob die beiden anderen Bezogenen ebenfalls in X stehen. Je nach Gestaltung der Ausgangsbezogenheit sind wiederum verschiedene Fälle zu unterscheiden.

Ein Prädikator X <u>ist transitiv in</u> *S* genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\bigwedge\zeta\ (\omega\ X\ \xi \wedge \xi\ X\ \zeta \rightarrow \omega\ X\ \zeta)$ in *S* wahr ist. Geht, metaphorisch gesprochen, die Relation von einem ersten zu einem zweiten, um von dort zu einem dritten weiterzuführen, dann besteht auch eine >Brücke< vom ersten zum dritten; das Pfeildiagramm enthält einen sogenannten Überbrückungspfeil. Fehlt dieser durchgehend, dann liegt Intransitivität vor: Es <u>ist</u> X <u>ein intransitiver Prädikator in</u> *S* genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\bigwedge\zeta\ (\omega\ X\ \xi \wedge \xi\ X\ \zeta \rightarrow \neg\ \omega\ X\ \zeta)$ in *S* wahr ist.

Geht es bei der Transitivität um Überbrückung vom ersten zum dritten Relat, so ist es bei der Zirkularität um den Rücklauf vom dritten zum ersten Bezogenen zu tun, eben um das Sich-Schließen der Beziehungslinie: X <u>ist ein zirkulärer Prädikator in</u> *S* genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\bigwedge\zeta\ (\omega\ X\ \xi \wedge \xi\ X\ \zeta \rightarrow \zeta\ X\ \omega)$ in *S* beweisbar ist.

Bei den komparativen bzw. drittengleichen Prädikatoren ist die Ausgangslage anders: Eine erste Gegebenheit steht zu einer zweiten sowie zu einer dritten in der Relation bzw. eine erste Gegebenheit steht zu einer zweiten und eine dritte steht ebenfalls zu der zweiten in der Relation; sind dann auch die im Antezedens nur über ein >Drittes< Verknüpften durch die Relation im Sukzedens direkt verbunden, dann liegt Komparativität bzw. Drittengleichheit vor. Es <u>ist</u> X <u>rechts</u>- resp. <u>linkskomparativ in</u> *S* genau dann, wenn die Universalaussagen $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\bigwedge\zeta\ (\omega\ X\ \xi \wedge \zeta\ X\ \xi \rightarrow \omega\ X\ \zeta)$ bzw. $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\bigwedge\zeta\ (\xi\ X\ \omega \wedge \xi\ X\ \zeta \rightarrow \omega\ X\ \zeta)$ in *S* beweisbar sind.

Beispiele für Intransitivität sind die Prädikatoren '..ist(-direkter)-Nachfolger-von..' oder '..ist-Elter-von..'. Die Prädikatoren '..ist-kardinaläquivalent..', '..ist-gleichalt..', '..ist-gleichgroß..' sind transitiv, zirkulär, links- und rechtskomparativ. Dahingegen exemplifizieren die Redeteile '..>..', '..ist-schwerer-als..' zwar Transitivität, nicht aber die drei übrigen Eigenschaften. So ist '5 > 3' und '5 > 2', ohne daß damit auch schon '2 > 3' oder '2 > 5' wahr wäre.

Die beiden soeben betrachteten Beispielgruppen legen die Vermutung nahe, daß Transitivität, Zirkularität, Links- und Rechtskomparativität zusammenfallen, falls der betrachtete Prädikator X symmetrisch ist: Wenn X in *S* symmetrisch ist, dann gilt: X ist in *S* transitiv genau dann, wenn X in *S* linkskomparativ ist; genau dann, wenn X in *S*

rechtskomparativ ist, genau dann, wenn X in *S* zirkulär ist. Für den Beweis dieser Behauptung wird neben der Voraussetzung insbesondere die Kommutativität des Konjunktors benötigt.

An dieser Stelle soll auch die Frage neuerlich aufgenommen werden, wie man die Irreflexivität verstärken muß, um die Asymmetrie zu erzwingen: Wenn X sowohl irreflexiver als auch transitiver Prädikator ist, dann ist X auch asymmetrischer Prädikator. Der Kern des Beweises rekurriert auf die Tatsache, daß die Aussage $\bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\xi\ \mathrm{X}\ \omega \rightarrow \neg\ \omega\ \mathrm{X}\ \xi\ )$ eine Konsequenz der Aussagenklasse $\{\bigwedge\xi \neg\ \xi\ \Pi\ \xi,\ \bigwedge\omega\bigwedge\xi\bigwedge\xi\ (\omega\ \mathrm{X}\ \xi \wedge \xi\ \mathrm{X}\ \xi \rightarrow \omega\ \mathrm{X}\ \xi)\}$ ist.

Ü8 a) Zeigen Sie, daß Links- und Rechtskomparativität voneinander unabhängige Eigenschaften sind, d.h. daß die definierenden Formeln sich gegenseitig nicht entscheiden!

b) Beweisen Sie die im Text formulierte Tatsache, daß Transitivität, Zirkularität, Rechtskomparativität und Linkskomparativität bei Gegebenheit von Symmetrie zusammenfallen!

c) In welchem Sinne ist die Frage nach Transitivität, Intransitivität und Zirkularität von Prädikatoren X trivial, für die die Aussage $\neg\ \bigvee\xi\ (\bigvee\omega\ \omega\ \mathrm{X}\ \xi \wedge \bigvee\omega\ \xi\ \mathrm{X}\ \omega)$ gilt?

6.2.4.4 Die Konnexitätsgruppe

Die für die Konnexität einschlägige Frage lautet: Stehen (höchstens) zwei beliebige Gebilde eines Gebietes Φ in wenigstens einer Richtung zueinander in der X-Relation? Es ist ein Prädikator X <u>in</u> *S* <u>strikt konnex auf</u> Φ genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\ (\Phi(\omega) \wedge \Phi(\xi) \rightarrow \omega\ \mathrm{X}\ \xi \vee \xi\ \mathrm{X}\ \omega)$ in *S* wahr ist. Anders formuliert: Wenn eine beliebige Φ-Gegebenheit zu einer beliebigen Φ-Gegebenheit nicht in X steht, dann steht die zweite zur ersten in X. Wenn X streng konnex auf Φ ist, dann ist X auch reflexiv auf Φ. Wie die folgende schematische Ableitung zeigt, ist nämlich die Aussage $\bigwedge\xi\ (\Phi(\xi) \rightarrow \xi\ \mathrm{X}\ \xi)$ eine Konsequenz aus $\{\bigwedge\omega\bigwedge\xi\ (\Phi(\omega) \wedge \Phi(\xi) \rightarrow \omega\ \mathrm{X}\ \xi \vee \xi\ \mathrm{X}\ \omega)\}$.

[9] Sei$_1$ $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\ (\Phi(\omega) \wedge \Phi(\xi) \rightarrow \omega\ \mathrm{X}\ \xi \vee \xi\ \mathrm{X}\ \omega)$

Sei$_2$ $\Phi(\beta)$

Also$_2$ $\Phi(\beta) \wedge \Phi(\beta)$

Also$_{1,2}$ $\beta\ \mathrm{X}\ \beta \vee \beta\ \mathrm{X}\ \beta$

Also$_{1,2}$ $\beta\ \mathrm{X}\ \beta$

Also$_1$ $\Phi(\beta) \rightarrow \beta\ \mathrm{X}\ \beta$

Also$_1$ $\bigwedge\omega\ (\Phi(\omega) \rightarrow \omega\ \mathrm{X}\ \omega)$

Der Kern der Begründung ist dieser: Da beliebig gegriffene Φ-Gebilde in wenigstens einer Richtung in X stehen, steht ein einziges, aber zweimal gegriffenes Gebilde in jedem Fall zu sich in der Beziehung.

Es <u>ist</u> X <u>ein auf</u> Φ <u>konnexer Prädikator</u> in *S* genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi$ $(\Phi(\omega) \wedge \Phi(\xi) \rightarrow \omega\ \mathrm{X}\ \xi \vee \omega = \xi \vee \xi\ \mathrm{X}\ \omega)$ in *S* wahr ist. Die Konnexität ist eine Abschwächung der strikten Konnexität, insoweit das Sukzedens eine dritte Option enthält. Gemeinsam mit der Reflexivität erzwingt sie jedoch die strikte Konnexität.

Die Prädikatoren '..>..' und '..<..' sind konnex auf '..ist-eine-natürliche-Zahl'. Sie sind allerdings nicht strikt konnex: Keine natürliche Zahl steht nämlich zu sich selbst in der '..>..'- resp. '..<..'-Beziehung. Demgegenüber sind '..≥..' und '..≤..' streng konnex auf '..ist-eine-natürliche-Zahl'. – Die Bespiele geben Anlaß zu folgender Konversenvermutung, die auch beweisbar ist: Wenn X_1 ein konverser Prädikator zu X_2 ist, dann gilt: X_1 ist auf Φ konnexer bzw. strikt konnexer Prädikator genau dann, wenn X_2 auf Φ konnexer bzw. strikt konnexer Prädikator ist.

Schließlich ist noch eine Abschwächung der Konnexität zu definieren, die dadurch entsteht, daß der Identitätsprädikator durch einen beliebigen zweistelligen Prädikator ersetzt wird; der definierte Prädikator wird dadurch vierstellig: X_1 <u>ist</u> X_2-<u>konnex auf</u> Φ <u>in</u> *S* genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\ (\Phi(\omega) \wedge \Phi(\xi) \rightarrow \omega\ \mathrm{X}_1\ \xi \vee \omega\ \mathrm{X}_2\ \xi \vee \xi\ \mathrm{X}_1\ \omega)$ in *S* gilt. Es ist z.B. der Prädikator '..älter..' bzgl. des Prädikators '..gleichalt..' konnex auf '..ist-Mensch' in der deutschen Gebrauchssprache.

Mit Blick auf die Ordnungsprädikatoren ist ein letzter Begriff zu charakterisieren: Es <u>ist</u> X_1 <u>in</u> *S* X_2-<u>extensionaler Prädikator</u> genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\omega_1\bigwedge\xi_1\bigwedge\omega_2\bigwedge\xi_2\ (\omega_1\ \mathrm{X}_2\ \xi_1 \wedge \omega_2\ \mathrm{X}_2\ \xi_2 \wedge \omega_1\ \mathrm{X}_1\ \omega_2 \rightarrow \xi_1\ \mathrm{X}_1\ \xi_2)$ in *S* gilt. Es ist z.B. der Kleiner- oder der Größerprädikator ein zum Identitätsprädikator extensionaler Prädikator. Ebenso ist etwa der Schwerer-Prädikator ein zum Gleichschwer-Pädikator extensionaler Prädikator.

Ü9 a) Konnexität und Reflexivität erzwingen strikte Konnexität.

aa) Geben Sie eine korrekte Formulierung dieses intuitiv artikulierten Sachverhalts!

ab) Liefern Sie einen Beweis!

b) Beweisen Sie die oben formulierte Konversenvermutung!

c) Suchen Sie je zwei Beispiele für strikt konnexe, konnexe und X-konnexe Prädikatoren!

6.2.4.5 Die Deutigkeitsgruppe

Im Deutigkeitsszenario betrachtet man, ebenso wie bei den Transitivitätseigenschaften, (höchstens) drei beliebige Gegebenheiten, so aber, daß auf der linken bzw. auf der rechten Seite der X-Relation dasselbe Relatum steht; gefragt wird dann danach, ob die beiden übrigen Relata identisch sind. Bei bejahender Antwort steht zu selbigem Relatum höchstens eine Gegebenheit in der Relation bzw. steht selbiges Relatum zu höchstens einer Gegebenheit in der Relation; im ersten Fall liegt Links-, im zweiten Fall liegt Rechtseindeutigkeit vor.

Genauer (und unter Umsteuerung bei der informellen Erläuterung unvermeidbarer Inkorrektheiten): Ein – auch hier zweistelliger – Prädikator X <u>ist in</u> *S* <u>linkseindeutig</u> genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\bigwedge\zeta\ (\omega\ \mathrm{X}\ \zeta \wedge \xi\ \mathrm{X}\ \zeta \rightarrow \omega = \xi)$ in *S* wahr ist; zu beliebigem ζ steht also allenfalls eine Gegebenheit in X. Es <u>ist</u> X hingegen <u>rechtseindeutig in</u> *S* genau dann, wenn die Universalaussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\bigwedge\zeta\ (\zeta\ \mathrm{X}\ \omega \wedge \zeta\ \mathrm{X}\ \xi \rightarrow \omega = \xi)$ in *S* beweisbar ist; beliebiges ζ steht mithin zu allenfalls einer Gegebenheit in X.

Die Prädikatoren '..ist-Mutter-von..' und '..ist-Vater-von..' sind in der biologischen Verwandtschaftssprache linkseindeutig, aber nicht rechtseindeutig; es kann nämlich eine Mutter bzw. ein Vater mehrere Kinder haben. Ebenso stellt der Prädikator '..ist-Preis-von..' in der ökonomischen Sprache einen links-, aber keinen rechtseindeutigen Prädikator dar; es können nämlich verschiedene Waren mit demselben Preis ausgezeichnet sein. – Die Prädikatoren '..ist-geboren-am..' und '..ist-geboren-in..' sind Beispiele für rechtseindeutige Prädikatoren in der Gebrauchssprache. Sie sind jedoch nicht linkseindeutig; denn es können verschiedene Lebewesen am selben Ort und zur selben Zeit geboren sein.

Manche Prädikatoren sind sowohl links- wie auch rechtseindeutig, z.B. '..ist-Fingerabdruck-von..', '..ist-Geburtsregisternummer-von..', '..ist-Nachfolger-von..', aber auch '..=..'. Es wird

definiert: X <u>ist eineindeutig in</u> *S* genau dann, wenn X in *S* sowohl links- als auch rechtseindeutig ist. X <u>ist in</u> *S* hingegen <u>eindeutig</u> genau dann, wenn X in *S* links- oder rechtseindeutig ist. – Der Vollständigkeit halber sei darauf hingewiesen, daß es auch Prädikatoren gibt, die nicht eindeutig sind, also weder links- noch rechtseindeutig. Beispiele für solche mehrmehrdeutigen Prädikatoren wären etwa aus der Gebrauchssprache '..ist-befreundet-mit..' oder '..ist-sympathischer-als..'. Der Größer- und der Teilklassenprädikator exemplifizieren in der mathematischen Sprache Mehrmehrdeutigkeit.

Wenn X_1 ein in *S* links-, rechts-, einein- resp. eindeutiger Prädikator ist und X_2 in *S* Subprädikator von X_1, dann ist auch X_2 ein in *S* links-, rechts-, einein- resp. eindeutiger Prädikator. Sei zunächst $X_1°$ ein in S linkseindeutiger Prädikator; dann ist definitionsgemäß $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\bigwedge\zeta\ (\omega\ X_1°\ \zeta \wedge \xi\ X_1°\ \zeta \rightarrow \omega = \xi)$ in S wahr. Sei ferner $X_2°$ Subprädikator von $X_1°$ in S; dann ist die Aussage $\bigwedge\xi\bigwedge\zeta\ (\xi\ X_2°\zeta \rightarrow \xi X_1°\zeta)$ in S wahr. Nun ist aber die Definitionsformel für die Linkseindeutigkeit von $X_2°$, also die Aussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\bigwedge\zeta\ (\omega\ X_2°\ \zeta \wedge \xi\ X_2°\ \zeta \rightarrow \omega = \xi)$, eine Konsequenz aus der Klasse der bei der Voraussetzungsauflösung erwähnten Aussagen. Mithin ist $X_2°$ linkseindeutig in S. – Die Rechtseindeutigkeit wird analog begründet; Eindeutigkeit und Eineindeutigkeit ergeben sich aus den Resultaten für Links- und Rechtseindeutigkeit.

Zwei weitere Tatsachen sind festzuhalten: Wenn X_1 ein in *S* links-, rechts-, einein- resp. eindeutiger Prädikator ist und X_2 in *S* ein zu X_1 konverser Prädikator ist, dann ist X_2 ein in *S* rechts-, links-, einein- resp. eindeutiger Prädikator; so ist z.B. '..ist-Mutter-von..' linkseindeutig und der Prädikator '..hat-zum-weiblichen-Elternteil..' ist rechtseindeutig. – Wenn X_1 sowie X_2 in *S* links-, rechts- resp. eineindeutige Prädikatoren sind, dann ist $\mathbf{I}\xi,\omega\ (\bigvee\zeta\ (\omega\ X_1\ \zeta \wedge \zeta\ X_2\xi)\ (..,..)$ ebenfalls links-, rechts- resp. eineindeutiger Prädikator in *S*. Es sind z.B. '..ist-Mutter-von..' und '..ist-Vater-von..' linkseindeutige Prädikatoren der biologischen Verwandtschaftssprache; damit ist auch '$\mathbf{I}x,y\ (\bigvee z$ (*x* ist Mutter von *z* $\wedge$ *z* ist Vater von *y*)) (..,..)', definitorisch abgekürzt durch '..ist-Großmutter-väterlicherseits-von..', ein linkseindeutiger Prädikator.

Ü10 a) Suchen Sie aus einer Sprache Ihrer Wahl je zwei Beispiele für links-, rechts- und eineindeutige Prädikatoren!

b) Beweisen Sie für eine Deutigkeitseigenschaft das Konversenlemma!

6.2.4.6 Gleichheitsprädikatoren

Einzelne Prädikatoren können Eigenschaften der verschiedenen Gruppen auf sich vereinigen. Es wurde schon dargelegt, daß asymmetrische Prädikatoren auch irreflexiv sein müssen und daß Transitivität und Irreflexivität Asymmetrie nach sich zieht. Von besonderem Interesse sind u.a. solche Prädikatoren, die auf Φ geschlossen und reflexiv sind, ferner symmetrisch und transitiv; diese Redeteile nennt man auch Gleichheits- oder Äquivalenzprädikatoren.

Das besondere Interesse beruht auf (wenigstens) zwei Umständen: Zum einen finden sich Gleichheitsprädikatoren in allen Bereichen an ausgezeichneter Stelle. Dies mag repräsentativ und in materialer Sprechweise belegt werden: Die Verwendungsgleichheit resp. Synonymie zwischen Ausdrücken, die Beschreibungsgleichheit zwischen Aussagen, die Bezeichnungsgleichheit zwischen Nominatoren, die Vollzugsgleichheit zwischen Einzelhandlungen, die Typgleichheit unter Zeichentoken sind Beispiele (vornehmlich) aus der (Sprach)Philosophie. Die Zählgleichheit zwischen Ziffern, die Koextensität zwischen Prädikatoren, die Gleichmächtigkeit zwischen Klassen, die Parallelität zwischen Geraden sind Beispiele aus der Mathematik. Die Gewichtsgleichheit zwischen Körpern, die Gleichzeitigkeit zwischen Ereignissen, die Artgleichheit von Lebewesen, die Längengleichheit von kantentragenden Körpern, die Stoffgleichheit von Proben sind Beispiele aus den Naturwissenschaften.

Zum anderen geben derartige Gleichheiten Anlaß zu einem >Übergang< zu (sogenannten) >Abstrakta<: von der Synonymie zur Bedeutung, von der Beschreibungsgleichheit zum Sachverhalt, von der Bezeichnungsgleichheit zum Gegenstand, von der Vollzugsgleichheit zum Handlungsschema, von der Typgleichheit zum Zeichentyp, von der Zählgleichheit zur Zahl, von der Koextensität zur Klasse/Extension, von der Gleichmächtigkeit zur Anzahl, von der Parallelität zur Richtung, von der Gewichtsgleichheit zum Gewicht, von der Gleichzeitigkeit zum Zeitpunkt, von der Artgleichheit zur Art, von der Längengleichheit zu Längen, von der Stoffgleichheit zu Stoffen.

Der Übergang zu den Abstrakta wird hier nicht behandelt, aber im Zusammenhang mit der Behandlung des Universalien (↑6.3.3) exemplarisch vollzogen. An dieser Stelle geht es nur um eine vielseitige Charakterisierung der Gleichheitsprädikatoren. Diese beruht auf folgendem <u>Hauptsatz der Gleichheitslehre</u>:

[10] Wenn *S* eine Sprache erster Stufe ist und X ein zweistelliger Prädikator von *S* und Φ ein einstelliger Prädikator von *S* ist, dann gilt:

Die Aussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\ (\omega\ \mathrm{X}\ \xi \leftrightarrow \Phi(\omega) \wedge \Phi(\xi) \wedge \bigwedge\zeta(\xi\ \mathrm{X}\ \omega \leftrightarrow \zeta\ \mathrm{X}\ \xi))$ ist in *S* wahr

gdw

X ist geschlossen auf Φ in *S* und X ist reflexiv auf Φ in *S* und X ist rechtskomparativ in *S*

gdw

X ist geschlossen auf Φ in *S* und X ist reflexiv auf Φ in *S* und X ist linkskomparativ in *S*

gdw

X ist geschlossen auf Φ in *S* und X ist reflexiv auf Φ in *S* und X ist zirkulär in *S*

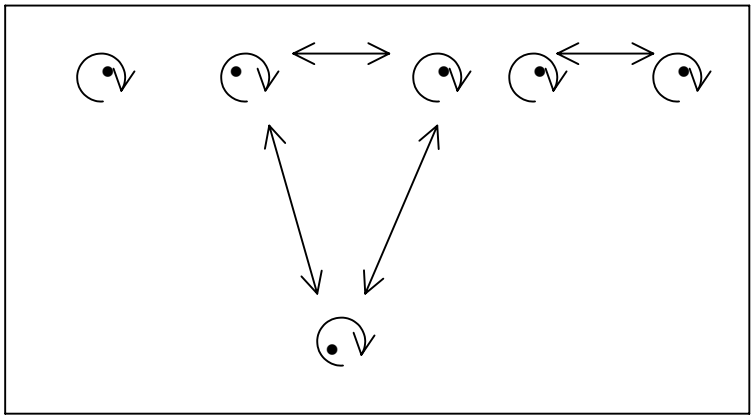
gdw

X ist geschlossen auf Φ in *S* und X ist reflexiv auf Φ in *S* und X ist symmetrisch in *S* und X ist transitiv in *S*

Die geläufigste und oben schon erwähnte Definition der Gleichheitsprädikatoren lautet: X ist in *S* Gleichheitprädikator auf Φ genau dann, wenn X in *S* geschlossener Prädikator auf Φ ist und X ist in *S* reflexiver Prädikator auf Φ und X ist in *S* symmetrischer und transitiver Prädikator. Zufolge des Hauptsatzes könnte man auch eine der vier anderen Bisubjunkte als Definiens wählen. – Wenn X_1 Gleichheitprädikator auf Φ in *S* ist und X_2 zu X_1 konverser Prädikator in *S* ist, dann ist auch X_2 in *S* Gleichheitprädikator auf Φ.

Für Gleichheiten ergibt sich (bei Wahl von überschaubar wenigen Φ-Dingen) folgende Pfeilfigur:

[11]



Gleichheiten neigen ersichtlich zu maximaler Gruppen- bzw. Zellenbildung: Alle Mitglieder der Zelle stehen untereinander in der Gleichheit, jedoch zu keinem Mitglieder einer anderen Zelle. Dieser Aspekt kommt sehr klar in der LR-Lesung der ersten Charakterisierung zum

Ausdruck: Wenn ein ϑ_1-Gegenstand zu einem ϑ_2-Gegenstand in X steht, dann gilt für beliebige Gebilde, daß sie genau dann zu ϑ_1 in X stehen, wenn sie auch zu ϑ_2 in X stehen. Anders: Stehen Gebilde zueinander in X, dann verhalten sie sich zu allen Gegebenheiten auf der X-Schiene gleich.

Der erwähnte Abstraktionsschritt besteht nun darin, daß man den Mitgliedern einer Zelle jeweils das selbe Abstraktum zuordnet, z.B. den jeweils gewichtsgleichen Körpern dasselbe Gewicht und den jeweils synonymen Ausdrücken dieselbe Bedeutung. Die verschiedenen Abstraktionsverfahren unterscheiden sich (u.a.) in der Regulierung dieses Übergangs. Im Zuge der klassensprachlichen Abstraktion wird das Abstraktum z.B. mit der jeweiligen Äquivalenzklasse identifiziert. Die Bedeutung eines Ausdrucks μ ist dann die Klasse der zu μ bedeutungsgleichen Ausdrücke.

Totale Gleichheiten entbehren der Φ-Beschränkung: Es <u>ist</u> X <u>totaler Gleichheitsprädikator in</u> *S* genau dann, wenn X totalreflexiver, symmetrischer und transitiver Prädikator in *S* ist; das ist wiederum genau dann der Fall, wenn X totalreflexiver und linkskomparativer Prädikator in *S* ist bzw. wenn X totalreflexiver und zirkulärer Prädikator in *S* ist; das trifft wiederum genau dann zu, wenn die Aussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\ (\omega\ \mathrm{X}\ \xi \leftrightarrow \bigwedge\zeta\ (\zeta\ \mathrm{X}\ \omega \leftrightarrow \zeta\ \mathrm{X}\ \xi)$ in *S* wahr ist. – Beispiele für totale Gleichheitsprädikatoren sind die Identitätsprädikatoren in jeder Sprache sowie der Prädikator '..ist-gleichmächtig-mit..' in Klassensprachen. Der Identitätsprädikator in einer Sprache ist Subprädikator eines jeden totalreflexiven Prädikators in dieser Sprache.

Ü11 a) Suchen Sie wenigstens vier weitere Gleichheitsprädikatoren!

b) Beweisen Sie den Hauptsatz der Gleichheitslehre!

6.2.4.7 Ordnungsprädikatoren

Ein zweistelliger Prädikator X einer Sprache *S* <u>ist ein partieller Ordnungsprädikator</u> genau dann, wenn X in *S* antisymmetrisch und transitiv ist, wenn also die Aussagen $\bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\omega\ \mathrm{X}\ \xi \wedge \xi\ \mathrm{X}\ \omega \rightarrow \omega = \xi)$ und $\bigwedge\xi\bigwedge\omega\bigwedge\zeta\ (\omega\ \mathrm{X}\ \xi \wedge \xi\ \mathrm{X}\ \zeta \rightarrow \omega\ \mathrm{X}\ \zeta)$ in *S* gelten. X <u>ist in</u> *S* <u>ein totaler Ordnungsprädikator auf</u> Φ genau dann, wenn X in *S* partieller Ordnungsprädikator ist und wenn X zudem auf Φ konnex ist, wenn also $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\ (\Phi(\omega) \wedge \Phi(\xi) \rightarrow \omega\ \mathrm{X}\ \xi \vee \omega = \xi \vee \xi\ \mathrm{X}\ \omega)$ in *S* wahr ist, und wenn X auf Φ in *S* geschlossen ist.

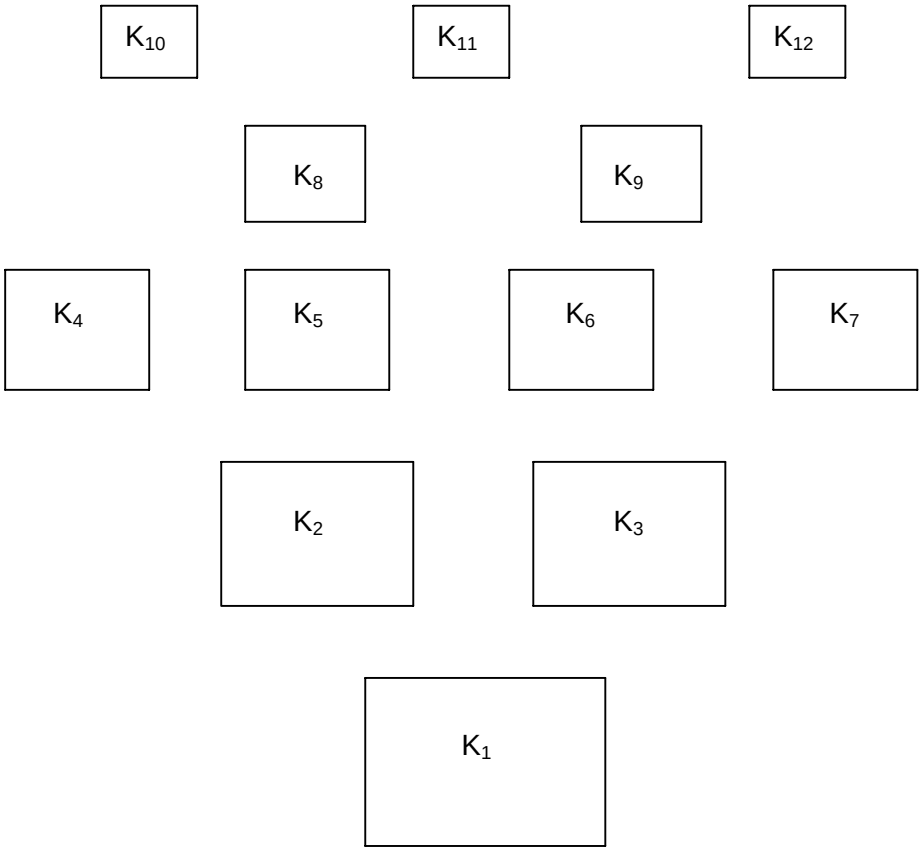
Der Teilklassenprädikator '..⊆..' und der Kleinergleichprädikator '..≤..' exemplifizieren partielle Ordnungsprädikatoren, die zusätzlich totalreflexiv bzw. auf geeignet gewählten Prädikatoren reflexiv sind. '..≤..' ist zudem ein totaler Ordnungsprädikator auf 'Natürliche-Zahl(..)', weil die Aussage '$\bigwedge x\bigwedge y$ (Natürliche-Zahl(x) $\wedge$ Natürliche-Zahl(y) $\rightarrow x \leq y \vee x = y \vee y \leq x$)' in der

arithmetischen Sprache wahr ist und ferner Geschlossenheit auf ‘Natürliche-Zahl(..)’ vorliegt. Eine entsprechende Konnexitätseigenschaft gilt hingegen nicht für den Teilklassenprädikator, weil Klassen z.B. auch kein Element gemeinsam haben können und deshalb weder Identität noch Teilklassenschaft in eine Richtung vorliegt. Der echte Teilklassenprädikator ‘..⊂..’ und der Kleinerprädikator ‘..<..’ stellen ebenfalls partielle Ordnungsprädikatoren dar. ‘..<..’ ist zudem totaler Ordnungsprädikator auf ‘Natürliche-Zahl(..)’; der (echte) Teilklassenprädikator ist hingegen kein totaler Ordnungsprädikator. – Die Elemente der ersten Beispielgruppe sind zusätzlich reflexiv, die der zweiten sind irreflexiv. Reflexivität und Irreflexivität tragen nichts zum Ordnungscharakter eines Prädikators bei; desungeachtet bilden reflexive und irreflexive Prädikatoren die hauptsächlich untersuchten Ordnungsprädikatoren.

Es formt X_1 <u>mit</u> X_2 <u>auf</u> Φ <u>in</u> *S* <u>eine Quasireihe</u> genau dann, wenn X_2 auf Φ ein Gleichheitsprädikator in *S* ist, X_1 in *S* bzgl. Φ geschlossen ist, X_1 transitiv in *S* ist und ferner X_1 in *S* X_2-antisymmetrisch, X_2-konnex und X_2-extensional ist. So bildet etwa ‘Ist-Schwerer-als(..,..)’ mit ‘Ist-Gleichschwer(..,..)’ auf ‘Ist-wägbarer-Gegenstand(..)’ in der physikalischen Sprache eine Quasireihe, denn: ‘Ist-Gleichschwer(..,..)’ ist Gleichheitsprädikator auf ‘Ist-wägbarer-Gegenstand(..)’, ‘Ist-Schwerer-als(..,..)’ ist geschlossen auf ‘Ist-wägbarer-Gegenstand(..)’, d.h. alles, was in der Schwerer-Beziehung steht, ist ein wägbarer Körper, ‘Ist-Schwerer-als(..,..)’ ist transitiv, und ferner gelten in der physikalischen Sprache folgende Aussagen: ‘$\bigwedge x \bigwedge y$ (Ist-Schwerer-als(x, y) $\wedge$ Ist-Schwerer-als(y, x) $\rightarrow$ Ist-Gleichschwer(x, y))’ (=Antisymmetrie), ‘$\bigwedge x \bigwedge y$ (Wägbarer-Körper(x) $\wedge$ Wägbarer-Körper(y) $\rightarrow$ Schwerer-als(x, y) $\vee$ Ist-Gleichschwer(x, y) $\vee$ Schwerer-als(y, x))’ (=Konnexität), ‘$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z \bigwedge u$ (Ist-Gleichschwer(x, y) $\wedge$ Ist-Gleichschwer(z, u) $\wedge$ Schwerer-als(x, z) $\rightarrow$ Schwerer-als(y, u))’ (=Extensionalität). – Auch der Prädikator ‘Nicht-leichter-als(..,..)’ bildet mit ‘Ist-Gleichschwer(..,..)’ eine Quasireihe.

Die begrifflich dargestellten Verhältnisse sollen im (modifizierten) Pfeildiagramm visualisiert werden. Dazu wird das Universum der wägbaren Körper auf zwölf beschränkt; der Gleichheitsprädikator wird durch das Angeordnetsein der jeweils gleichschweren Körper auf einer Ebene signalisiert; Körper auf einer Ebene bilden also die Gleichheitszellen. Der Schwererprädikator wird durch das Angeordnetsein auf einer tieferen Ebene signalisiert: Liegt K_i tiefer K_j, dann ist K_i schwerer als K_j. Dabei ist das Tieferliegen nicht nur das unmittelbare, sondern auch das vermittelte Tieferliegen:

[12]



Der Φ-Prädikator dieser Quasireihe ist so umrissen, daß alle und nur die $K_1,...,K_{12}$ dazugehören. In der Schwererrelation stehen z.B. K_8 zu K_{10} und K_1 zu allen übrigen Körpern. In der Gleichschwerbeziehung stehen z.B. K_4 zu K_7 und K_2 zu sich selbst. Der Schwererprädikator bildet den Reihenteil. Zu den Eigenschaften, die den Reihen- und den Gleichheitsteil verbinden: Die Antisymmetrie gilt trivial: Für kein K_i und K_j gilt, daß K_i schwerer ist als K_j und umgekehrt. Die Konnexität: Für beliebige Körper gilt, daß der eine schwerer, gleichschwer oder leichter ist als der andere; bei K_1 und K_8 tritt der erste, bei K_1 und K_5 der zweite und bei K_6 und K_3 der dritte Fall ein. Die Extensionalität: Es ist K_8 gleichschwer K_9 und K_2 gleichschwer K_3 sowie K_2 schwerer als K_8; damit ist auch K_3 schwerer als K_9.

Die Struktur der Quasireihe findet sich in allen Bereichen: So formen z.B. 'Reicher-als(..,..)', 'Intellegenter-als(..,..)', 'Empfindlicher-als(..,..)', 'Älter-als(..,..)' mit 'Ebenso-reich-wie(..,..)', 'Ebenso-intellegent-wie(..,..)', 'Ebenso-empfindlich-wie(..,..)', 'Ebenso-alt-wie(..,..)' auf 'Ist-Mensch(..)' eine Quasireihe. Es verwundert daher nicht nur nicht, sondern es ist vielmehr ein Gebot der intellektuellen Ökonomie, derartige Strukturen als solche (und nicht als einzelne) zu untersuchen; das geschieht in der (alte Terminologie) metaphysica generalis bzw. in der (neue Sprechweise) (Struktur)Mathematik. Solche Überlegungen schaffen zugleich die (strukturellen) Grundlagen für die Metrisierung, eine spezielle Form der Begriffsbildung, die der Meßpraxis, der Messung, zugrunde liegt.

Früher wurden konträre Prädikatorenpaare Φ, Ψ so charakterisiert, daß sie nicht zusammen auf einen Gegenstand bzw. eine Gegenstandssequenz zutreffen können (↑6.2.3). Ein Spezialfall konträrer Prädikatoren sind die polarkonträren, die an die Quasireihen-prädikatoren rückgebunden sind.

Die Intuition: Sei eine Quasireihe durch die Reihen- und die Gleichheitsrelation gegeben; dann kann man zwei einander gegenüberstehende >polare< Eigenschaften dadurch bestimmen, daß man im unteren resp. oberen Segment der Quasireihe je einen Gegenstand auswählt und die Eigenschaft dann zuschreibt, wenn ein Reihen- oder Gleichheitsverhältnis zu dem ausgewählten Gegenstand besteht. Dabei ist für die Polarität wichtig, daß ein >Abstand< zwischen den Standardgegenständen besteht, daß also wenigstens eine >Schicht< zwischen den Standardgegenständen liegt.

Ein Beispiel: Gelten etwa die Aussagen '$\bigwedge x$ (Schwer(x) $\leftrightarrow$ Gleichschwer(x, K_3) $\vee$ Schwerer(x, K_3))' sowie '$\bigwedge x$ (Leicht(x) $\leftrightarrow$ Gleichschwer(x, K_9) $\vee$ Schwerer(K_9, x))', dann sind 'Schwer(..)' und 'Leicht(..)' polarkonträre Prädikatoren relativ auf die exemplarischen Quasireihenprädikatoren. Die K_4-Schicht sichert in diesem Fall die Polarität: Es gibt Körper, die weder leicht noch schwer sind.

Weitere Beispiele wären etwa (bei Unterstellung einer geeigneten Quasireihe) 'Klein(..)' und 'Groß(..)', 'Kurz(..)' und 'Lang(..)', 'Gut(..)' und 'Schlecht(..)', 'Heiß(..)' und 'Kalt(..)', 'Jung(..)' und 'Alt(..)'. – Eine präzise Charakterisierung polarkonträrer Prädikatorenpaare bedürfte weiterer Redemittel, die in diesem Rahmen nur umständlich bereitzustellen sind (↑ZUSATZ).

Die informelle Charakterisierung polarkonträrer Prädikatoren genügt allerdings schon, um eine weitere Taktik zur Inkonsistenzbeseitigung bereitzustellen: Wird etwa auf 'Schwer(dies-da)' und 'Leicht(dies-da)' erkannt, damit aber wegen '$\bigwedge x$ (Schwer(x) $\rightarrow$ $\neg$ Leicht(x))' 'Leicht(dies-da)' und '$\neg$ Leicht(dies-da)' in Kauf genommen, dann ist zu überprüfen, ob die beteiligten Parteien die maßgeblichen Standardgegenstände übereinstimmend gewählt haben. – Eine weiter Fehlerquelle ist die (unzulässige) Mehrfachbestimmung: 'Schwer(..)' und 'Leicht(..)' werden zunächst vor der Etablierung von 'Schwerer(..,..)' und 'Gleichschwer(..,..)' bestimmt oder in bestimmter Weise verwendet, um später mit Rückgriff auf die Quasireihe charakterisiert zu werden. Ein solches Vorgehen wäre nur zulässig, wenn man im Anschluß an die zweite Charakterisierung einen entsprechenden Verträglichkeitsnachweis führt (↑11.).

Der Kontext gibt Anlaß, auf eine weitere Inkonsistenzgenese hinzuweisen, die sich dem Wechsel und dem anschließenden Ineinanderschieben der durch Φ angegebenen Grundbereiche verdankt: Der Dackel Siggi ist schwer, der Elefant Willi ist leicht. Was schwer

ist, ist schwerer als alles, was leicht ist. Also ist der Dackel Siggi schwerer als der Elefant Willi. Das wiederum trifft nicht zu: Widerspruch! Die Lösung ist klar. Die polarkonträren Prädikatoren sind auf Quasireihen mit verschiedenem, durch 'Dackel(..)' und 'Elefant(..)' charakterisierten, Grundbereich bezogen. Die Weglassung des Grundbereichs bleibt unproblematisch, solange die Redeumgebung erkennen läßt, von welchen Dingen das Schwer- bzw. das Leichtsein ausgesagt wird; das unbemerkte Ineinanderschieben der Grundbereiche zeitigt hingegen Inkonsistenz.

Ü12 a) Suchen Sie fünf weitere Beispiele für Quasireihen!

b) Suchen Sie vier weitere polarkonträre Prädikatorenpaare!

c) Beweisen Sie folgendes Theorem: X ist in *S* genau dann ein totaler Ordnungsprädikator auf Φ, wenn X mit $\mathbf{I}\xi\omega\ (\xi = \omega \wedge \Phi(\xi))\ (..,..)$ auf Φ in *S* eine Quasireihe bildet.

d) Untersuchen Sie die strukturbezogenen Eigenschaften sowie die systembezogenen Zusammenhänge der Längenrede, also der Prädikatoren '..ist-gleichlang-wie..', '..ist-länger-als..', '..ist-höchstens-so-lang-wie..', '..ist-mindestens-so-lang-wie..', '..ist-gleichkurz-wie..', '..ist kürzer-als..', '..ist-höchstens-so-kurz-wie..', '..ist-mindestens-so-kurz-wie..'; dabei fungiere '..ist-kanten-tragender-Körper' als Bereichsprädikator! – Suchen Sie ferner die (zahlreichen) gebrauchssprachlichen Synonyme zu diesen Redeteilen!

6.2.5 Tafel der exemplar-, system- und strukturbezogenen Definitionen

Die nachfolgende Liste präsentiert die Definitionen der Abschnitte 6.2.2 bis 6.2.4 zur besseren Übersicht. Es handelt sich durchweg um bedingte Charakterisierungen. Jede Bedingung gilt bis zur nächsten:

Wenn *S* eine Standardsprache erster Stufe und Φ ein n-stelliger Prädikator von *S* ist, dann:

Φ <u>ist in</u> *S* <u>exemplifizierbarer Prädikator</u>

gdw

die Partikularaussage $\bigvee\xi_1 \ldots \bigvee\xi_n\ \Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ ist in *S* wahr

Φ <u>ist in</u> *S* <u>exempelfreier Prädikator</u>

gdw

die Negation $\neg \bigvee\xi_1 ... \bigvee\xi_n\ \Phi(\xi_1, ..., \xi_n)$ ist in *S* wahr

Φ <u>ist in</u> *S* <u>gegenexemplifizierbarer Prädikator</u>

gdw

die Partikularquantifikation $\bigvee\xi_1 ... \bigvee\xi_n \neg\ \Phi(\xi_1, ..., \xi_n)$ ist in *S* wahr

Φ <u>ist in</u> *S* <u>universalexemplifizierbarer Prädikator</u>

gdw

die Universalaussage $\bigwedge\xi_1 ... \bigwedge\xi_n\ \Phi(\xi_1, ..., \xi_n)$ ist in *S* wahr

Φ <u>ist in</u> *S* <u>extremer Prädikator</u>

gdw

Φ ist universalexemplifizierbarer oder exempelfreier Prädikator in *S*

Φ <u>ist in</u> *S* <u>normaler Prädikator</u>

gdw

Φ ist exemplifizierbarer und gegenexemplifizierbarer Prädikator in *S*

Φ <u>ist in</u> *S* <u>exklusiv-exemplifizierbarer Prädikator</u>

gdw

die Einzigkeitsaussage $\mathbf{1}\xi\ \Phi(\xi)$ ist in *S* beweisbar

Wenn *S* eine Standardsprache erster Stufe ist und Φ sowie Ψ gleichstellige n-stellige Prädikatoren von *S* sind, dann:

Φ ist <u>Subprädikator zu</u> Ψ <u>in</u> *S*

gdw

die Universalaussage $\bigwedge\xi_1 ... \bigwedge\xi_n\ (\Phi(\xi_1, ..., \xi_n) \rightarrow \Psi(\xi_1, ..., \xi_n))$ ist in *S* wahr

Ψ ist <u>Superprädikator zu</u> Φ <u>in</u> *S*

gdw

Φ ist <u>Subprädikator zu</u> Ψ <u>in</u> *S*

Φ <u>ist koextensiver</u> bzw. <u>koextensionaler Prädikator zu</u> Ψ <u>in</u> *S*

gdw

Φ ist sowohl Sub- als auch Superprädikator von Ψ in *S*

Φ <u>ist ein zu</u> Ψ <u>konverser Prädikator in</u> *S*

gdw

die Universalaussage $\bigwedge\xi\bigwedge\omega\ (\Phi(\xi, \omega) \leftrightarrow \Psi(\omega, \xi))$ ist in *S* wahr

Φ <u>ist</u> <u>Negatprädikator von</u> Ψ <u>in</u> *S*

gdw

die Universalaussage $\bigwedge\xi_1...\bigwedge\xi_n\ (\Phi(\xi_1,..., \xi_n) \leftrightarrow \neg\ \Psi\ (\xi_1,..., \xi_n))$ ist in *S* wahr

Φ <u>ist</u> <u>zu</u> Ψ <u>disjunkter</u> bzw. <u>konträrer Prädikator in</u> *S*

gdw

die Negation $\neg\ \bigvee\xi_1...\bigvee\xi_n\ (\Phi(\xi_1,..., \xi_n) \wedge \Psi\ (\xi_1,..., \xi_n))$ ist in *S* wahr

Wenn *S* eine Standardsprache erster Stufe ist und Φ, Ψ und X gleichstellige n-stellige Prädikatoren von *S* sind, dann:

Φ <u>ist mit</u> Ψ <u>ein</u> X-<u>exhaurierender Prädikator in</u> *S*

gdw

die Universalaussage $\bigwedge\xi_1...\bigwedge\xi_n\ (\Phi(\xi_1,..., \xi_n) \vee \Psi(\xi_1,..., \xi_n) \leftrightarrow \mathrm{X}(\xi_1,..., \xi_n))$ ist in *S* wahr

Φ <u>und</u> Ψ <u>klassifizieren</u> X <u>in</u> *S*

gdw

Φ und Ψ sind in *S* disjunkte Prädikatoren, Φ und Ψ exhaurieren in *S* X und Φ und Ψ sind in *S* exemplifizierbar

Wenn *S* eine Standardsprache erster Stufe ist und X zweistelliger Prädikator von *S* ist, dann:

X <u>ist in</u> *S* <u>totalreflexiver Prädikator</u>

gdw

die Universalaussage $\bigwedge\xi\ \xi\mathrm{X}\xi$ ist in *S* wahr

X <u>ist in</u> *S* <u>irreflexiver Prädikator</u>

gdw

die Universalaussage $\bigwedge\xi\ \neg\ \xi\mathrm{X}\xi$ ist in *S* wahr

Wenn *S* eine Standardsprache erster Stufe ist und Φ ein einstelliger und X ein zweistelliger Prädikator von *S* ist, dann:

X ist <u>reflexiver Prädikator auf</u> Φ <u>in</u> *S*

gdw

die Universalaussage $\bigwedge\xi\ (\Phi(\xi) \rightarrow \xi X \xi)$ ist in *S* wahr

X <u>ist geschlossener Prädikator auf</u> Φ <u>in</u> *S*

gdw

die Universalaussage $\bigwedge\xi \bigwedge\omega\ (\omega X \xi \rightarrow \Phi(\omega) \wedge \Phi(\xi))$ ist in *S* wahr

Φ <u>ist in</u> *S* <u>Feldprädikator bezüglich</u> X

gdw

die Universalaussage $\bigwedge\xi\ (\Phi(\xi) \leftrightarrow \bigvee\omega\ (\omega X \xi \vee \xi X \omega))$ ist in *S* wahr

Wenn *S* eine Standardsprache erster Stufe ist und X zweistelliger Prädikator von *S* ist, dann:

X <u>ist symmetrischer Prädikator in</u> *S*

gdw

die Universalaussage $\bigwedge\omega \bigwedge\xi\ (\omega X \xi \rightarrow \xi X \omega)$ ist in *S* wahr

X <u>ist asymmetrischer Prädikator in</u> *S*

gdw

die Universalaussage $\bigwedge\omega \bigwedge\xi\ (\omega X \xi \rightarrow \neg\ \xi X \omega)$ ist in *S* wahr

X <u>ist antisymmetrischer Prädikator in</u> *S*

gdw

die Universalaussage $\bigwedge\xi \bigwedge\omega\ (\xi X \omega \wedge \omega X \xi \rightarrow \omega = \xi)$ ist in *S* wahr

Wenn *S* eine Standardsprache erster Stufe ist und Φ ein einstelliger Prädikator und X, X_1 und X_2 zweistellige Prädikatoren von *S* sind, dann:

X_1 <u>ist bezüglich</u> X_2 <u>antisymmetrischer Prädikator in</u> *S*

gdw

die Universalaussage $\bigwedge\omega \bigwedge\xi\ (\xi X_1 \omega \wedge \omega X_1 \xi \rightarrow \omega X_2 \xi)$ ist in *S* wahr.

X <u>ist strikt konnexer Prädikator auf</u> Φ <u>in</u> *S*

gdw

die Universalaussage $\bigwedge\omega \bigwedge\xi\ (\Phi(\omega) \wedge \Phi(\xi) \rightarrow \omega\ X\ \xi \vee \xi\ X\ \omega)$ ist in *S* wahr

X <u>ist auf</u> Φ <u>konnexer Prädikator in</u> *S*

gdw

die Universalaussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\ (\Phi(\omega) \wedge \Phi(\xi) \rightarrow \omega\ \mathrm{X}\ \xi \vee \omega = \xi \vee \xi\ \mathrm{X}\ \omega)$ ist in *S* wahr

X_1 <u>ist</u> X_2-<u>konnexer Prädikator auf</u> Φ <u>in</u> *S*

gdw

die Universalaussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\ (\Phi(\omega) \wedge \Phi(\xi) \rightarrow \omega\ \mathrm{X}_1\ \xi \vee \omega\ \mathrm{X}_2\ \xi \vee \xi\ \mathrm{X}_1\ \omega)$ ist in *S* wahr

X_1 <u>ist</u> X_2-<u>extensionaler Prädikator in</u> *S*

gdw

die Universalaussage $\bigwedge\omega_1\bigwedge\xi_1\bigwedge\omega_2\bigwedge\xi_2\ (\omega_1\ \mathrm{X}_2\ \xi_1 \wedge \omega_2\ \mathrm{X}_2\ \xi_2 \wedge \omega_1\ \mathrm{X}_1\ \omega_2 \rightarrow \xi_1\ \mathrm{X}_1\ \xi_2)$ ist in *S* wahr

X <u>ist linkseindeutiger Prädikator in</u> *S*

gdw

die Universalaussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\bigwedge\zeta\ (\omega\ \mathrm{X}\ \zeta \wedge \xi\ \mathrm{X}\ \zeta \rightarrow \omega = \xi)$ ist in *S* wahr

X <u>ist rechtseindeutiger Prädikator in</u> *S*

gdw

die Universalaussage $\bigwedge\omega\bigwedge\xi\bigwedge\zeta\ (\zeta\ \mathrm{X}\ \omega \wedge \zeta\ \mathrm{X}\ \xi \rightarrow \omega = \xi)$ ist in *S* wahr

X <u>ist eineindeutiger Prädikator in</u> *S*

gdw

X ist in *S* linkseindeutiger Prädikator und X ist in *S* rechtseindeutiger Prädikator

X <u>ist</u> <u>eindeutiger Prädikator in</u> *S*

gdw

X ist in *S* linkseindeutiger Prädikator oder X ist in *S* rechtseindeutiger Prädikator

X <u>ist in</u> *S* <u>Gleichheitprädikator auf</u> Φ

gdw

X ist in *S* geschlossener Prädikator auf Φ und X ist in *S* reflexiver Prädikator auf Φ und X ist in *S* symmetrischer und transitiver Prädikator

X <u>ist totaler Gleichheitsprädikator in</u> *S*

gdw

X ist in *S* totalreflexiver, symmetrischer und transitiver Prädikator

X <u>ist partieller Ordnungsprädikator in</u> *S*

gdw

X ist in *S* antisymmetrischer und transitiver Prädikator

X_1 <u>bildet mit</u> X_2 <u>auf</u> Φ <u>in</u> *S* <u>ein Quasireihenprädikatorensystem</u>

gdw

X_2 ist auf Φ ein Gleichheitsprädikator in *S* und X_1 ist bzgl. Φ geschlossener Prädikator in *S* und X_1 ist transitiver Prädikator in *S* und X_1 ist in *S* X_2-antisymmetrischer, X_2-konnexer und X_2-extensionaler Prädikator

X <u>ist ein totaler Ordnungsprädikator auf</u> Φ <u>in</u> *S*

gdw

X ist partieller Ordnungsprädikator in *S* und X ist auf Φ konnexer Prädikaor und X ist in *S* auf Φ geschlossener Prädikator

Bei der Analyse und der Einführung eines Prädikators lassen sich, wie früher schon angedeutet, eine Reihe von Routinefragen aufwerfen, die mit den hier zusammengefaßten Definitionen gegeben sind: (i) Global: Wie verhält sich der Prädikator bezüglich Exemplifizierbarkeit? Im einzelnen: Ist er normal oder extrem? Im ersten Fall: Welche Gebilde sind z.B. Exemplare, welche sind Gegenexemplare? Ferner: Ist der Prädikator exklusiv-exemplifizierbar? Im zweiten Fall: Ist der Prädikator leer oder universal? (ii) Global: Welches ist der Ort des Prädikators im jeweiligen Prädikatorensytem? Im einzelnen: Welche Ausdrücke sind z.B. Sub- und Superprädikatoren, welche Zeichen sind z.B. koextensive Prädikatoren? Welche Gebilde sind z.B. konverse Prädikatoren? Welche Ausdrücke sind z.B. Negatprädikatoren oder konträre Prädikatoren? In welchen Klassifikationssystemen spielt der Prädikator z.B. eine Rolle? (iii) Global: Welche strukturellen Eigenschaften besitzt der Prädikator? – Im einzelnen: Wie verhält sich der Prädikator bezüglich der Eigenschaften der Reflexivitäts-, Symmetrie-, Transititvitäts-, Konnexitäts-, Deutigkeitsgruppe? Welche Eigenschaften aus diesen Gruppen vereinigt er auf sich?

6.2.6 Materiale Prädikatorentypen

Die bislang vorgetragenen Unterscheidungen von Prädikatorentypen sind formaler Natur und befinden sich in einem gut bearbeiteten Zustand. Die in der Folge angebotenen Auszeichnungen von Prädikatorensorten sind demgegenüber materialer Art. Zudem sind die ihrer theoretischen Erfassung geltenden Bemühungen noch in vollem Fluß. Der mit den kommenden Hinweisen verbundene Anspruch ist daher ein sehr eingeschränkter: Mit einigen in der gegenwärtigen Literatur intensiv erörterten Prädikatorengruppen, den Sortalen und Massenprädikatoren (6.2.6.1), den Dispositionsprädikatoren (6.2.6.2) und den vagen Prädikatoren (6.2.6.3) soll erste Bekanntschaft hergestellt werden.

6.2.6.1 Sortale Prädikatoren und Massenprädikatoren

Beispiele für sortale Prädikatoren, kurz: Sortale, sind etwa die Ausdrucksverbindungen '..ist-ein-Stuhl', '..ist-eine-Katze', '..ist-ein-Fluß', '..ist-eine-Erdumdrehung'. Gegenbeispiele sind '..ist-Mehl', '..ist-Wasser', '..ist-Geld', '..ist-rot', '..ist-gut'; die drei ersten Gegenbeispiele exemplifizieren zugleich die Massen- oder Stoffprädikatoren.

Mit einer sortalen Prädikation wird auf solche Was-ist-Fragen geantwortet, die auf die Art/Sorte von Gegenständen zielen: Was ist das (für ein Tier)? Das ist eine Katze. Was ist das (für ein Instrument)? Das ist eine Fagott. Mit einer sortalen Prädikation kann man allerdings nicht auf Woraus-Fragen antworten. Das ist hingegen möglich mit einer Stoffprädikation: Woraus ist dieses Fagott? Dieses Fagott ist aus Holz. – Historischer Hinweis: Sortale oder auch Gestaltausdrücke sind den aristotelischen Substanzausdrücken, genauer: den Bezeichnungen für die zweite Substanz, nahe verwandt.

Trifft ein Sortal auf einen Gegenstand zu, dann trifft das Sortal nicht auf einen Teil dieses Gegenstands zu. Objektsprachlich am Beispiel ausgedrückt: Wenn Lisa eine Katze ist, dann sind Katzenteile, z.B. Katzenköpfe, Katzenpfoten, Katzenhaare, ihrerseits keine Katzen. Wenn das da ein Stuhl ist, dann sind Stuhlteile, z.B. die Stuhlbeine, die Sitzfläche, die Rückenlehne, keine Stühle. Massenprädikatoren verhalten sich diesbezüglich anders: Wenn etwas z.B. Mehl ist, dann sind auch die Teile dieser Gegebenheit aus Mehl; und auch wenn man Wasser teilt, ergibt sich allemal (eine neue Portion) Wasser.

Weiter: Fügt man Substanzen zusammen, auf die ein Stoffprädikator zutrifft, dann trifft der Stoffprädikator auch auf das Ergebnis der Zusammenfügung zu. Schüttet man Wasser oder Mehl zusammen, dann ergibt sich wiederum Wasser oder Mehl. Fügt man hingegen Kühe oder Stühle zusammen, dann ergeben sich Kuhherden oder Stuhlansammlungen, jedoch

keine weiteren Kühe oder Stühle. Fügt man also Gebilde zusammen, auf die ein Sortal zutrifft, dann trifft das Sortal nicht wieder auf das Ergebnis der Zusammenfügungen zu. – Insgesamt gilt: Sortale >vererben< sich, anders als Massenprädikatoren, weder nach oben noch nach unten weiter.

Mit Sortalen sind externe und interne Unterscheidungskriterien verbunden: Wer Sortale versteht, ist in der Lage, Pro- und Gegenbeispiele des jeweiligen Sortals zu unterscheiden. Wer die Bedeutung von '..ist-ein-Stuhl' kennt, kann Stühle von Tischen und Tigern unterscheiden. Wer Sortale versteht, ist aber auch imstande, Gegenstände zu unterscheiden, auf die das Sortal zutrifft. Wer die Bedeutung von '..ist-ein-Stuhl' kennt, kann diesen von jenem Stuhl unterscheiden. Damit ist zugleich die Grundlage der Zählbarkeit geschaffen: Externe Unterscheidungskriterien verhindern, daß Kühe mitgezählt werden, wenn Stühle zu zählen sind; und interne Kriterien sorgen dafür, daß auch wirklich alle Stühle, aber kein Stuhl zweimal gezählt wird. Mit Massenprädikatoren ist keine Zählbarkeitsmöglichkeit verbunden: 'drei Wasser' ist keine sinnvolle Ausdrucksverbindung, es sei denn, damit ist dasselbe wie mit 'drei Gläser Wasser' oder 'drei Flaschen Wasser' gemeint. '..ist-ein-Glas-Wasser' oder '..ist-eine-Flasche-Wasser' sind aber wieder Sortale und keine Massenprädikatoren.

Man pflegt <u>räumliche</u> und <u>zeitliche Sortale</u> zu unterscheiden: Zur ersten Gruppe zählt etwa '..ist-ein-Stuhl', '..ist-ein-Fagott', '..ist-ein-Tiger', zur zweiten '..ist-eine-Geburt', '..ist-eine-Blinddarmoperation', '..ist-ein-Welpe', '..ist-ein-Lamm'. Ferner unterscheidet man <u>natürliche Sortale</u> wie '..ist-ein-Tiger' von <u>Artefaktsortalen</u> wie '..ist-ein-Fagott'.

Zuletzt ist auf den Zusammenhang von Eigennamen und Sortal hinzuweisen: Wer die Bedeutung eines Eigennamens kennt, kennt zumindest ein Sortal, das auf den benannten Gegenstand zutrifft. Wer die Bedeutung von 'Themse' kennt, weiß z.B., daß die Themse ein Fluß ist; und wer die Bedeutung von 'London' kennt, weiß z.B., daß London eine europäische Großstadt ist.

6.2.6.2 Dispositionsprädikatoren

'Disposition' ist das dem Lateinischen entstammende Fremdwort für 'Neigung', 'Tendenz', 'Fähigkeit', 'Vermögen' usf. Es ist *x* eine Disposition von *y*, wenn *x* die Fähigkeit, Fertigkeit, Neigung, Tendenz, das Vermögen, die Möglichkeit von *y* darstellt, sich unter bestimmten Umständen in bestimmter Weise zu verhalten bzw. auf eigens hergerichtete Umstände zu reagieren. Derartige Dispositionen sind in aller Regel nicht direkt wahrnehmbar wie etwa

Farben, Geräusche, Gerüche, Geschmäcker, Tastempfindungen. Um Dispositionen zu beobachten, muß man Verhaltensweisen der Dispositionsträger in Situationen beobachten, die oft eigens zu diesem Zweck hergestellt werden. Prädikatoren für derartige Eigenschaften sind Dispositionsprädikatoren.

Einige Beispiele aus Physik und Materialkunde (in Kurznotation): 'wasserlöslich', 'wasserfest', '(un)zerreißbar', '(un)zerbrechlich', '(un)dehnbar', '(un)elastisch' '..hart', 'fest', 'steif', 'rißausbreitungsresistent', '(un)verformbar', 'magnetisch', 'Säure', 'Base'. Exempel aus der Psychologie: 'gutmütig', 'jähzornig', 'scharfsinnig', 'introvertiert', 'intelligent'. Gelegentlich überraschen die Beispiele auch: Erklärt man als schön resp. häßlich solche Gegebenheiten, die bei sinnenhafter Zuwendung ge- resp. mißfallen, dann fallen auch '..ist-schön' und '..ist-häßlich' unter die Dispositionsprädikatoren.

Wie die Beispielsammlung zeigt, enden viele Dispositionsprädikatoren auf 'lich', 'bar', 'isch'; die Endsilbe kann also zur Formulierung einer entsprechenden Faustregel zur Unterscheidung von Dispositionsprädikatoren hergenommen werden. Die Beispielsammlung zeigt indes auch, daß das Kriterium unvollständig und inkorrekt ist: Es gibt einerseits Dispositionsprädikatoren wie etwa '..ist-schön' und '..ist-tapfer', die auf keine der genannten Silben enden; andererseits gibt es auch solche Prädikatoren wie etwa '..ist-beweisbar', '..ist-logisch determinierbar', die die entsprechenden Endungen aufweisen, aber keine Dispositionsprädikatoren sind.

Dispositionsprädikatoren werden in Lebenswelt und Wissenschaft problemlos verwendet; dennoch bereitet die Rekonstruktion ihrer Bedeutung erhebliche Schwierigkeiten. Einen Teil dieser Redemittel kann man mit Verfahren etablieren, die für Grundprädikatoren taugen, also mit Bedeutungspostulaten und Konstatierungsregeln (↑10.). Andere wird man indes definieren wollen; und hier beginnen die Probleme. '..ist-wasserlöslich' definiert man naheliegenderweise so:

[13] $\bigwedge x$ (x ist wasserlöslich $\leftrightarrow$ (x wird in Wasser gegeben $\rightarrow$ x löst sich auf))

Wasserlöslich sind demnach alle und nur die Gebilde, die sich auflösen, falls sie ins Wasser gegeben werden. Die Umstände: ins-Wasser-gegeben-werden, die Reaktion: das-Sich-auflösen. Diese plausible Definition hat die unplausible Konsequenz, daß alles, was nicht ins Wasser gegeben wird, auch schon wasserlöslich ist:

[14] $\bigwedge x$ ($\neg$ x wird in Wasser gegeben $\rightarrow$ x ist wasserlöslich)

Gelegentlich – und auch hier – wird die Implausibilität noch erhöht, indem man die Kontraposition der Universalaussage bildet: All das, was nicht wasserlöslich ist, wird ins Wasser gegeben.

Der wohl naheliegendste Ausweg ist der Übergang zur bedingten Definition (↑11.): Wasserlöslichkeit wird für den Bereich der Dinge erklärt, die ins Wasser gelegt werden, und bleibt ansonsten unerklärt:

[15] $\bigwedge x$ (x wird in Wasser gelegt $\rightarrow$ (x ist wasserlöslich $\leftrightarrow$ x löst sich auf))

Der Vorzug dieser Etablierungsweise liegt auf der Hand: Für den als kritisch erkannten Fall – eine Gegebenheit wird nicht ins Wasser gelegt – bietet [15] keinen Ansatzpunkt. Aber auch der Nachteil ist offenkundig: Man will eben auch von solchen Gegenständen, die nicht ins Wasser gelegt werden, wissen bzw. entscheiden können, ob sie wasserlöslich sind; und auch für Befriedigung dieses Anliegen bietet die bedingte Definition keinen Weg.

Damit ist nur das Ausgangsproblem und der erste Schritt in einer langandauernden, v.a. in der Wissenschaftsphilosophie ausgetragenen, Kontroverse angedeutet. Die beschrittenen Wege zerfallen in zwei Großgruppen: Die logischen Auswege schlagen eine Reglementierung des Wenn-dann vor, die den Schluß von [13] auf [14] blockiert. Die außerlogischen Auswege behalten die klassische oder eine sonstige Logik mit den (sogenannten) Paradoxen der Subjunktion bei und versuchen inhaltliche Auswege.

6.2.6.3 Vage Prädikatoren

Prädikatoren mit durchgehend schlechter Presse sind die <u>vagen</u>, denen die <u>präzisen</u> gegenübergestellt werden. Von vagen Prädikatoren redet man dann, wenn es einen Bereich von Gegebenheiten gibt, für die sich (bedeutungsbedingt) nicht ausmachen läßt, ob der Prädikator auf sie zutrifft oder nicht. – Obwohl die folgenden Beispiele einstellige Prädikatoren sind, ist eine allgemeine Charakterisierung der Vagheit so anzulegen, daß ein n-stelliger Prädikator an der k-ten Stelle vage ist.

Ist dieses Sitzmöbel, um mit dem Standardbeispiel zu starten, noch ein Stuhl – oder eher ein Sessel? '..ist-ein-Stuhl' und '..ist-ein-Sessel' sind vage Prädikatoren; man kann sich >fließende< Übergänge denken Ist dieses Kleid (noch) rot oder (schon) orange; die lebensweltlichen Farbprädikatoren sind vage. Ist dieser Text eine Beweisskizze – oder nur ein Beweishinweis? '..ist-eine-Beweisskizze' und '..ist-ein-Beweishinweis' sind vage Prädikatoren. Ist der Angeklagte zurechnungsfähig – oder doch eher unzurechnungsfähig? '..ist-zurechnungsfähig' und '..ist-unzurechnungsfähig' sind vage Prädikatoren. Ist der Patient

arbeitsunfähig – oder doch eher arbeitsfähig? '..ist arbeitsfähig' und '..ist-arbeitsunfähig' sind vage Prädikatoren. Folgt A intuitiv aus *X* – oder besteht eine intuitive Non-Sequitur-Beziehung? '..folgt-intuitiv-aus..' und '..steht-im-intuitiven-non-sequitur-zu..' sind vage Prädikatoren. Ist ein Embryo schon ein Mensch oder eine Person – oder aber ein Lebewesen in einem vormenschlichen oder vorpersonalem Stadium? '..ist-ein-Mensch' und '..ist-ein-Person' sowie '..ist-vormenschliches-Lebewesen' und '..ist-vorpersonales-Lebewesen' sind vage Prädikatoren.

Vagheit ist hier nicht in einem kontingenten, sondern in einem strukturellen Sinn verstanden. Es geht nicht darum, daß ein Autor die Regeln für einen Prädikator zufälligerweise nicht genügend kennt, um ihn erfolgreich zu- oder absprechen zu können. Es fehlt ihm auch nicht an den nötigen Mitteln usf. Die jeweilige Aussage ist also nicht entscheidungsunzugänglich. Die Regeln sind vielmehr so, daß auch der ideal(st)e Autor unter ideal(st)en Informationsbedingungen nicht erfolgreich zu- oder absprechen vermag; die jeweilige Aussage ist also unentscheidbar.

Bezüglich der vagen Prädikatoren herrschen vornehmlich zwei Vorurteile. Das erste lautet darauf, daß nur empirische Prädikatoren, d.h. Prädikatoren mit synthetisch-operationalen Bedeutungsanteilen, vage sind. Die namhaft gemachten Beispiele zeigen, daß diese Auffassung irrig ist: '..folgt-intuitiv-aus..', aber auch '..ist-konstruktives-Beweisverfahren' sind vage Prädikatoren, die nicht empirisch sind.

Das zweite Vorurteil läuft darauf hinaus, daß vage Redemittel unbrauchbare Redemittel sind. 'Unbrauchbarkeit' kann hier nur besagen, daß man keine Prädikationsentscheidungen mit diesen Ausdrücken treffen kann; und das ist in der Regel nicht der Fall. So kann man von vielen Gegenständen unstrittig sagen, daß sie Stühle sind; und ebenso kann man von vielen Gebilden ohne Kontroverse das Stuhlsein negieren. Die Existenz einer Vagheitszone schließt also nicht aus, daß es zu einem Prädikator einen Positiv- und einen Negativbereich, also einen entscheidbaren Kernbereich, gibt.

Damit soll nicht das Problem geleugnet werden, das durch Vagheitszonen entsteht. Wenn nun darüber zu befinden ist, ob ein einzelnes Exemplar oder Exemplare einer bestimmten Sorte Φ-Dinge sind, dann entsteht die Aufgabe der Nachjustierung, der bedarfsgerechten (nicht: der „absoluten") Verschärfung der Bedeutung des Prädikators. Gelegentlich kann es auch zu nur dezisionistisch behebbaren Notsituationen kommen: Dieser Fall wird gelegentlich bei der Entscheidung über Arbeits(un)fähigkeit eintreten. Häufiger geht es aber darum, für einen Unterbezirk der Vagheitszone eine Regulierung vorzunehmen: So wurde z.B. in der neueren Rechtssprechung der Prädikator '..ist-bezugsfertige-Eigentumswohnung'

so nachjustiert, daß das Fertiggestelltsein der Außenanlagen keine notwendige Bedingung für die Bezugsfertigkeit darstellt. – Die Prozedur der Nachjustierung wird in der Explikationslehre behandelt (↑12.).

Ü13 a) Geben Sie je drei weitere Beispiele für Sortale und Massenprädikatoren!

b) Zeigen Sie, daß [14] Konsequenz aus {[13]} ist!

c) Was sind Paradoxe der Vagheit? – Benutzen Sie Nachschlagewerke!

Zusatz: Zum Darstellungsrahmen

Die folgende methodologische Zwischenüberlegung rekapituliert die Darlegung der Absätze 6.2.2 bis 6.2.5 unter der Rücksicht der verwendeten Darstellungsmittel. Leitend ist dabei die Frage, ob sich nicht deutlich einfachere Artikulationsmöglichkeiten auffinden bzw. herstellen lassen.

In Absatz 6.2.2 werden Prädikatoren betrachtet unter der Rücksicht, ob sie auf Gegenstände zutreffen bzw. nicht zutreffen. In Absatz 6.2.3 werden Prädikatoren thematisiert mit Blick auf ihren Ort in Prädikatorensystemen d.h. mit Blick auf ihr Verhältnis zu anderen Prädikatoren. In Absatz 6.2.4 geht es vornehmlich um zweistellige Prädikatoren; diese werden untersucht unter strukturellen Gesichtspunkten wie etwa der Umkehrbarkeit einer Beziehung.

Im Zuge dieser Untersuchungen haben sich zwei Eindrücke herausgebildet und zunehmend verstärkt. Zum einen: Bei jedem Punkt hat sich ein Bedarf nach weiterer Thematisierung und Systematisierung eingestellt. Besonders deutlich war dies bei der Betrachtung der Ordnungsprädikatoren: Hier würde man gerne in methodisch kontrollierter Weise (und nicht nur intuitiv) von der untersten und obersten Schicht der Quasireihe bzw. von den untersten und obersten Elementen sprechen oder aber überhaupt von einer Schicht in der Quasireihe. Aber auch schon die Klassifikationsbegrifflichkeit verlangt (mit Blick auf die begriffliche Durchdringung der Klassifikationspraxis) nach weiteren Redemitteln: So will man etwa von Klassifikationsfolgen und -bäumen sprechen. Zum anderen: Die Darstellung wird durchweg als kompliziert empfunden, v.a. bei den gelegentlich versuchten Beweisskizzen. Dieser Eindruck dürfte v.a. deshalb entstehen, weil sich intuitiv bereits eine Alternative abzeichnet, die auch gebrauchssprachlich gut eingeschliffen ist.

Dieser doppelte Eindruck – Systematisierungsbedarf und Kompliziertheitsempfinden – veranlassen in ihrem Zusammenwirken die Frage danach, ob nicht einfachere Darstellungsmittel auffind- oder herstellbar sind.

Mit dem Prädikator '..ist-ein-Apfel' spricht man über konkrete Gegenstände der Lebenswelt; mit dem Prädikator '..ist-Vater-von..' setzt man Personen zueinander in Beziehung. Stellt man nun fest, daß der Prädikator '..ist-ein-Apfel' ein normaler Prädikator in der lebensweltlichen Sprache ist oder daß '..ist-Vater-von..' ein asymmetrischer Prädikator in der Verwandtschaftssprache ist, dann macht man diese Redemittel ihrerseits zum Gegenstand der Betrachtung bzw. der Rede. Dies geschieht einerseits durch Anführung bzw. durch qualifizierende Zusetzung, andererseits durch ausdrückliche Mitnennung der jeweiligen Sprache. In allgemeiner Rede treten die metasprachlichen Mitteilungsvariablen hinzu. Diese Form der Vergegenständlichung möge die metasprachliche Vergegenständlichung heißen. Das eben angezeigte Bemühen geht also, neu formuliert, auf Alternativen zur metasprachlichen Vergegenständlichung.

Zuvor ist jedoch ein Hinweis auf den Zweck der Vergegenständlichung hilfreich. Wozu verläßt man überhaupt die >untere< Ebene, das Reden über Äpfel und Väter, um zu weiteren Gegenständen >aufzusteigen<? Die Antwort lautet: Um unsere Rede- und Erkenntnisanstrengungen kürzer gestalten zu können. Der Abkürzungszweck soll an zwei Beispielen illustriert werden: Wenn man weiß, daß Hans Vater von Inge ist, und ferner weiß, daß '..ist-Vater-von..' Subprädikator zu '..ist-Elter-von..' ist, dieser Redeteil Subprädikator von '..ist-Vorfahr-von..', der letzterwähnte Ausdruck Subprädikator von '..ist-verwandt-mit..', dann kann man ohne weitere empirische Untersuchung darauf schließen, daß Hans Vorfahr von Inge ist. Weiß man, daß '..ist-Vater-von..' ein asymmetrischer Prädikator ist, dann braucht man nicht eigens zu untersuchen, ob er auch irreflexiv ist; denn dies ist als allgemeiner Zusammenhang bekannt. Damit erübrigt sich auch jede Frage dahingehend, ob Hans Vater von sich selbst ist.

Die Vergegenständlichung verdankt sich dem Abkürzungszweck und der metasprachliche Weg verlangt wegen allzu großer Kompliziertheit nach Alternativen. Die zu überwindende Kompliziertheit ist zunächst im Detail am Beispiel zu studieren; die Transitivität der Subprädikatorschaft hat, voll ausformuliert, folgende Gestalt:

[16] Für alle Φ, für alle X, für alle Ψ, für alle *S* (Wenn *S* eine so-und-so beschaffene Sprache erster Stufe ist und Φ, X, Ψ jeweils n-stellige Prädikatoren von *S* sind und wenn Φ Subprädikator von X in *S* ist und X Subprädikator von Ψ in *S* ist, dann ist auch Φ Subprädikator von Ψ in *S*)

Störend ist – schon auf den ersten Blick – die Bezugnahme auf Sprachen, und zwar sowohl im Sinne des dauernden >Mitschleppens< der Sprachvariablen '*S*' als auch im Sinne des die Mitspieler >vorstellenden< Antezedens.

Will man beide Umständlichkeiten vermeiden, so muß man die metasprachliche Vergegenständlichung durch objekt- bzw. innersprachliche Formen ersetzen. Hier bieten sich wiederum zwei Optionen an: Zum einen kann man Sprachen höherer Stufe als Darstellungsrahmen wählen: Vergegenständlichung durch Stufenerhöhung. Zum anderen kann man Sprachen erster Stufe um klassensprachliche Redemittel erweitern: Vergegenständlichung durch Klassenbildung. Dies geschieht dadurch, daß man Prädikatoren Klassen zuordnet, also z.B. dem Prädikator '..ist-rot' die Klasse '{z|z ist rot}' zuweist. Der Subprädikatorschaft korrespondiert dann die Teilklassenschaft, die meist durch '..⊆..' ausgedrückt wird. Die Transitivität der Teilklassenschaft hat dann folgenden Ausdruck:

[16]* Für alle x, Für alle y, Für alle z (Wenn $x \subseteq y$ und $y \subseteq z$, dann $x \subseteq z$)

Es liegt auf der Hand, daß die Klassenvergegenständlichung weitaus handlicher ist als die metasprachliche; sie ist aber auch der objektsprachlichen Vergegenständlichung durch Stufenerhöhung unter dem Einfachheitsgesichtspunkt überlegen. Will man also die in den drei vorangegangenen Abschnitten angerissenen Zusammenhänge weiter verfolgen, dann wird man in einen klassensprachlichen Rahmen überwechseln. Kern dieses Sprachtyps ist die oben erwähnte Zuordnung von Klassen zu Prädikatoren, die in der Folge an mehreren Stellen beschäftigen wird (↑6.4 sowie (ausführlich) 14.).

6.3 Die elementare Prädikation

Die Prädikation konnte vorbereitend im Ensemble der Redehandlungen plaziert werden; ferner war eine prädikatorbildende Operation bereitzustellen (6.1). Der zweite Schritt galt der formalen und der (angedeuteten) materialen Sortierung der Prädikatoren, der Redemittel also, mit deren Verwendung Autoren Prädikationen vollziehen (6.2). – In der Folge geht die Aufmerksamkeit auf die elementare Prädikation, d.h. auf die Art des Prädizierens, die durch Äußerung von Sätzen mit elementaren Aussagen realisiert wird. Zunächst ist die elementare Prädikation auszugrenzen und nach Innen in Formen zu differenzieren (6.3.1). Sodann kann, in Aufnahme des Korrektheitsgesichtspunktes, von der Wahrheit elementarer Aussagen gehandelt werden (6.3.2). Schließlich ist das Universalienproblem (im Ansatz) darzustellen, die Frage nach Funktion, Existenz und Natur von Begriffen, Eigenschaften und Klassen (6.3.3).

Zur Erinnerung: Die dargelegte Prädikationslehre zählt zu den klassischen, zweiteiligen Prädikationskonzeptionen; dreiteilige Ansätze, die neben Prädikator und Nominator noch eigene (affirmative, negative und gegebenenfalls neutrative) Prädikationsoperatoren

vorsehen, finden in dieser Vorschule keine Darstellung (↑3.3.5 und 6.4). Gleichwohl sei hervorgehoben, daß sich auch derartige Sichtweisen nach entsprechender Anpassung der grammatischen Vorgaben in die entwickelte Makroperspektive einfügen lassen.

6.3.1 Elementare Prädikation – Substantielle Prädikation – Zu-/Absprechung

Ein Autor prädiziert in einer Sprache (hier und in der Folge stets: erster Stufe), wenn er einen Satz dieser Sprache äußert, der einen Prädikator zum Teilausdruck hat, in dessen Aussage also ein Prädikator Teilausdruck ist. Wer etwa die Sätze:

[17] a) Mutmaßlich sind alle Philosophen Vampire.

b) Trifft es zu, daß einige Vampire ängstlich sind?

c) Ich bezweifle, daß Dracula cool ist.

äußert, vollzieht in einer vampirkundlichen Sprache Prädikationen. In a) werden 'Philosoph' und 'Vampir' prädiziert, in b) 'Vampir' und 'ängstlich' und in c) der Redeteil 'cool'. Diese Prädikationen sind eingebettet in die Redehandlungen a) des Vermutens, b) des (Ob-) Fragens, c) des Bezweifelns. Wer immer prädiziert, vollzieht eine Redehandlung. Variiert: Nur wer redehandelt, prädiziert. Kontraponiert und rhetorisch modalisiert: Wer keine Redehandlung vollzieht, kann auch gar nicht prädizieren. Umgekehrt wird aber auch mit jeder Redehandlung eine Prädikation vollzogen. Insoweit genügt zur Charakterisierung des Prädizierens auch schon das Element des Äußerns eines Satzes; die Eingangsbestimmung ist redundant (↑6.1.1). Insgesamt gilt: Ein Autor vollzieht genau dann eine Redehandlung, wenn er prädiziert.

Dieses generelle Prädikationskonzept wird nun in zweifacher Weise eingeschränkt, und zwar in grammatischer und in performativer (semantischer) Hinsicht. Die grammatische Einschränkung betrifft die Satzaussage: Insoweit nur elementare Aussagen als Hauptoperand des geäußerten Satzes auftreten, liegt eine elementare Prädikation vor. Die semantische Einschränkung betrifft den Performator und damit den Redehandlungstyp: Insoweit nur die für substantielle Redehandlungen charakteristischen Performatoren als Hauptoperator des geäußerten Satzes auftreten, liegt eine substantielle Prädikation vor. – Ausdifferenzierungen innerhalb der substantiellen Prädikation nach ihrer alethischen >Stärke< und nach ihrer alethischen >Richtung< sowie die Kombination von elementaren und substantiellen Prädikationsformen führen zu weiteren Untertypen.

Vier vorbereitende Bemerkungen sind angezeigt: Zunächst ist an die Definition der elementaren Aussage zu erinnern (↑3.2.3): Es ist Γ eine elementare Aussage genau dann, wenn Γ eine atomare Aussage oder die Negation einer atomaren Aussage darstellt; atomare Aussagen entstehen aus der Anwendung eines n-stelligen Prädikators Φ auf n Nominatoren $\vartheta_1,..., \vartheta_n$, besitzen also die Form $\Phi(\vartheta_1,...,\vartheta_n)$. Die nicht-atomaren elementaren Aussagen sind Negationen von atomare Aussagen.

Sodann ist auf eine Vereinfachung hinzuweisen: Die Explikationen beziehen sich auf einfache atomare Aussagen, also auf atomare Aussagen der Form $\Phi(\vartheta)$; die Berücksichtigung der übrigen Typen atomarer Aussagen erforderte einen erheblichen technischen Mehraufwand. Demgegenüber ist die intuitiv-exemplarische Übertragung auf diese Fälle unschwer nachvollziehbar und wird auch am Ende des Abschnitts vorgenommen.

Ferner: In der Folge wird das Standardverständnis des Prädizierens aufgenommen. Dieses lautet (in der berühmten Formulierung des Aristoteles) darauf, daß etwas von etwas (ti kata tinos) prädiziert wird: Ein Prädikator wird von einem Gegenstand, einem Ding, einem Objekt, einer Gegebenheit usf. ausgesagt. Dieser Gegenstand ist in der Rede durch einen entsprechenden Nominator vertreten. Aus der Lehre von der Nomination wird die Wendung 'das..-Nominatum in..' benötigt.

Endlich ist auf die gerade erwähnte Nomination vorwegnehmend einzugehen (↑7.); denn elementare Prädikationen sind an den Vollzug von Nominationen geknüpft. Eine exemplarische Intuition lautet: Wer 'Ich bezweifle, daß Dracula cool ist' äußert, bezieht sich in einer vampirkundlichen Sprach*e* innerhalb des geäußerten Satzes mit dem Eigennamen 'Dracula' auf den Fürsten der Nacht. Die beispielübergreifende Explikation liest sich so: Ein Autor *A* nominiert (bezieht sich auf, referiert auf usf.) *x* innerhalb Σ mit ϑ in *S* genau dann, wenn *S* eine Sprache erster Stufe ist, Σ ein Satz und ϑ ein Nominator von *S* ist und ferner gilt: ϑ ist Teilterm der Aussage von Σ und *x* ist das ϑ-Nominatum in *S* und *A* äußert Σ. Durch Wegbinden der Variablen entstehen geläufigere Referenzbegriffe wie etwa '..referiert auf..', '..referiert mit..auf..'. Es gilt (unter Vernachlässigung des Sprachbezugs): Wenn ein Autor einen Nominator in einem Satz verwendet, dann und nur dann referiert er mit diesem Nominator innerhalb des Satzes auf den diesem Nominator zugeordneten Referenten.

Der Begriff der elementaren Prädikation ist denkbar weit angelegt: Ein Autor *A* prädiziert elementar Φ innerhalb Σ mit ϑ von *x* in *S* genau dann, wenn *S* eine Sprache erster Stufe ist, Φ ein einstelliger Prädikator, ϑ ein Nominator und Σ ein Satz von *S* ist und ferner gilt: Die Aussage von Σ ist das Ergebnis der Anwendung von Φ auf ϑ oder die Negation des Ergebnisses der Anwendung von Φ auf ϑ und *x* ist das ϑ-Nominatum in *S* und *A* äußert Σ. –

Wer etwa die Sätze ‘Ich bezweifle, daß Dracula cool ist’, ‘Trifft es zu, daß Dracula cool ist’, ‘Also: nicht (Dracula ist cool)’, ‘Es gilt: Dracula ist cool’ äußert, prädiziert ‘..ist cool’ innerhalb der erwähnten Sätze mit Hilfe von ‘Dracula’ von dem Fürsten der Nacht; die Prädikation ist dabei eingebettet in die Redehandlung des Zweifelns, des Ob-Fragens, des Folgerns und des Behauptens.

Durch Wegbinden von Stellen entstehen geläufigere Prädikationskonzepte: So prädiziert etwa A von x elementar Φ genau dann, wenn es eine Sprache S, einen Satz Σ und einen Nominator ϑ gibt, so daß A innerhalb Σ Φ von x mit ϑ in S elementar prädiziert. So prädiziert ein Autor elementar genau dann, wenn es eine Sprache, einen Satz, einen Gegenstand und einen geschlossenen Term gibt, so daß der Autor in der Sprache den Prädikator mit Hilfe des Nominators von dem Gegenstand elementar prädiziert. Aus der Definition und den grammatischen Festlegungen ergibt sich: Ein Autor prädiziert genau dann elementar, wenn er einen Satz äußert, dessen Hauptoperand eine elementare Aussage ist.

Unmittelbar aus den Definitionen des Nominierens und des Elementarprädizierens resultiert: Die Nomination ist eine notwendige Bedingung der Elementarprädikation. Ausführlich: Wenn ein Autor A elementar Φ innerhalb Σ mit ϑ von x in S prädiziert, dann nominiert A x innerhalb Σ mit ϑ in S. Am Beispiel: Um von Dracula ‘..ist cool’ elementar zu prädizieren, muß man mit ‘Dracula’ oder einem bezeichnungsgleichen Nominator auf den Fürsten der Nacht referieren. Umgekehrt ist die Nomination jedoch nicht an die elementare Prädikation gebunden: Mit der Äußerung von ‘Es ist zu bestreiten, daß alle Kinder Dracula lieben’ bezieht der Autor sich ebenfalls auf Dracula, jedoch ohne in diesen Zweifelsakt eine elementare Prädikation einzubetten.

Wenn ein Autor elementar prädiziert, dann prädiziert er auch. Die Umkehrung gilt jedoch nicht: Nur in [17]c), also in ‘Ich bezweifle, daß Dracula cool ist’, wird elementar prädiziert; mit der Äußerung von [17]a), ‘Mutmaßlich sind alle Philosophen Vampire’, und [17]b), ‘Trifft es zu, daß einige Vampire ängstlich sind?’, werden hingegen nicht-elementare Prädikationen ausgeführt. Ein Autor <u>prädiziert nicht-elementar</u> genau dann, wenn er einen Satz äußert, dessen Hauptoperand eine nicht-elementare Aussage darstellt, also eine molekulare Aussage, die aber nicht die Negation einer atomaren Aussage ist. Eine Redehandlung, die eine elementare Prädikation umfaßt, enthält nicht mehr als gerade diese elementare Prädikation, also genau eine elementare Prädikation; hingegen können, wie die Beispiele [17]a) und b) zeigen, mehrere nicht-elementare Prädikationen in eine Redehandlung eingelassen sein. – Alle Aufmerksamkeit gilt in der Folge den Formen der elementaren

Prädikation. In terminologischer Hinsicht ist hervorzuheben, daß in der Literatur 'Prädikation' häufig wie 'elementare Prädikation' verwendet wird.

Es macht einen Unterschied, ob eine elementare Prädikation in eine Frage oder eine Folgerung einerseits oder aber in eine Vermutung oder Bestreitung andererseits eingebettet ist. Mit der Äußerung einer Frage oder einer Folgerung möchte man nicht auch schon wissen lassen, daß der Prädikator von dem Nominatum wahr/falsch ist. Bei einer Vermutung oder Bestreitung gibt man hingegen der Auffassung Ausdruck, daß der Prädikator auf das Nominatum zutrifft oder ihm abgeht. In der ersten Fallgruppe soll von nicht-substantieller, in der zweiten soll von substantieller Prädikation die Rede sein.

In Hinführung zu diesen Begriffen ist an eine früher gegebene Sortierung der (kognitiven) Redehandlungen zu erinnern (↑2.4.2). Erkenntnishandlungen zerfallen in die interrogativen und die nicht-interrogativen Akte. Letztere lassen sich in die subsidiären oder Hilfshandlungen (wie das Annehmen oder das Folgern) und die substantiellen Handlungen aufteilen. Letztgenannte wiederum gliedern sich in die stark qualifizierenden oder alethischen (wie das Behaupten oder das Bestreiten) und in die schwach qualifizierenden oder präalethischen Akte (wie das Vermuten oder das Bezweifeln). Die alethischen wie die präalethischen Erkenntnishandlungen umfassen eine affirmative und eine negative Untergruppe. Demzufolge sind einerseits stark affirmative Akte (wie Behaupten oder Feststellen) von schwach affirmativen Akten (wie Vermuten oder hypothetisch Setzen) zu unterscheiden, andererseits stark negative Handlungen (wie Bestreiten oder kategorisch Verwerfen) von schwach negativen Handlungen (wie Bezweifeln oder hypothetisch Verwerfen) zu trennen. – Prinzipiell läßt sich das Konzept der elementaren Prädikation auch auf nicht-kognitive Redehandlungen erweitern.

Diese Einteilung der Erkenntnishandlungen ist nun mit der elementaren Prädikation in Bezug zu setzen. Ein Autor *A* <u>prädiziert substantiell</u> Φ <u>innerhalb</u> Σ <u>mit</u> ϑ <u>von</u> *x* <u>in</u> *S* genau dann, wenn *A* prädiziert elementar Φ innerhalb Σ mit ϑ von *x* in *S* und der Performator von Σ ist ein substantieller Performator. Mit der Äußerung von 'Vermutlich: nicht(Ist-cool(Dracula))' oder von 'Ich stelle fest: Ist-cool(Dracula)' wird 'Ist-cool(..)' vom 'Dracula'-Nominatum substantiell prädiziert.

Ein Autor *A* <u>prädiziert nicht-substantiell</u> Φ <u>innerhalb</u> Σ <u>mit</u> ϑ <u>von</u> *x* <u>in</u> *S* genau dann, wenn *A* prädiziert elementar Φ innerhalb Σ mit ϑ von *x* in *S* und der Performator von Σ ist ein nicht-substantieller Performator. Mit der Äußerung von 'Trifft es zu: nicht(Ist-cool(Dracula))' oder von 'Also: Ist-cool(Dracula)' wird 'Ist-cool(..)' vom 'Dracula'-Nominatum nicht-substantiell prädiziert.

Ein Autor prädiziert demnach substantiell genau dann, wenn er elementar prädiziert und der Performator des geäußerten Satzes ein substantieller Performator ist; substantielle Prädikationen sind also in substantielle Redehandlungen eingebettet. Ein Autor prädiziert hingegen nicht-substantiell genau dann, wenn er elementar prädiziert und der Performator des geäußerten Satzes ein nicht-substantieller, also ein subsidiärer oder ein interrogativer Performator ist; nicht-substantielle Prädikationen sind also in subsidiäre oder interrogative Erkenntnishandlungen eingelassen. – Setzt man voraus, daß die Einteilung in substantielle und nicht-substantielle Redehandlungen bzw. Performatoren disjunkt und exhaustiv ist, dann trifft dies auch auf die Zerlegung der elementaren Prädikationen in substantielle und nicht-substantielle zu, also auf die zweite Verzweigung von Schaubild [18].

Substantielle Prädikationen können – will man Feinheiten außer acht lassen (↑6.3.2) – eine affirmative oder eine negative Ausrichtung gewinnen: Ein Autor *A* prädiziert affirmativ Φ innerhalb Σ mit ϑ von *x* in *S* bzw. ein Autor *A* spricht Φ innerhalb Σ mit ϑ *x* in *S* zu genau dann, wenn *A* prädiziert elementar Φ innerhalb Σ mit ϑ von *x* in *S*, die Aussage von Σ ist das Ergebnis der Anwendung von Φ auf ϑ und der Performator von Σ ist ein affirmativer Performator. Kurz und variiert: Ein Autor prädiziert affirmativ bzw. spricht zu genau dann, wenn er einen affirmativen Satz äußert, dessen Aussage atomar ist; affirmative Prädikationen resp. Zusprechungen sind also substantielle Prädikationen, wobei der geäußerte Satz aus einen affirmativen Performator und einer atomaren Aussage aufgebaut ist. Mit der Äußerung von 'Vermutlich: Ist-cool(Dracula)' oder von 'Ich stelle fest: Ist-cool(Dracula)' sprechen Autoren dem Fürsten der Nacht den Prädikator 'Ist-cool(..)' zu; die Wendungen 'beilegen' und 'zuschreiben' mögen als Synonyme zu 'affirmativ prädizieren' bzw. 'zusprechen' gelten.

Ein Autor *A* prädiziert negativ Φ innerhalb Σ mit ϑ von *x* in *S* bzw. ein Autor *A* spricht Φ innerhalb Σ mit ϑ *x* in *S* ab genau dann, wenn *A* prädiziert elementar Φ innerhalb Σ mit ϑ von *x* in *S* und (i) die Aussage von Σ ist das Ergebnis der Anwendung von Φ auf ϑ und der Performator von Σ ist ein negativer Performator oder (ii) die Aussage von Σ ist die Negation der Anwendung von Φ auf ϑ und der Performator von Σ ist ein affirmativer Performator. Kurz und variiert: Ein Autor prädiziert in zwei Fällen negativ bzw. spricht ab: Wenn er einen Satz mit negativem Performator äußert, dessen Aussage atomar ist, oder wenn er einen Satz mit affirmativem Performator äußert, dessen Aussage die Negation einer atomaren Aussage darstellt. Mit der Äußerung von 'Vermutlich: nicht(Ist-cool(Dracula))' oder von 'Ich bestreite: Ist-cool(Dracula)' sprechen Autoren dem Fürsten der Nacht den Prädikator 'Ist-cool(..)' mit unterschiedlicher Stärke ab. – Enthält eine Sprache keine negativen Redehandlungen bzw. Performatoren, dann tritt der Fall (i) nicht ein; das Absprechen kann sich dann nur des

Negators und eines affirmativen Performators bedienen. Ist eine Sprache hingegen negatorfrei, dann muß sie negative Performatoren enthalten, falls das Absprechen als Handlung möglich sein soll.

Zusprechungen und Absprechungen stellen substantielle Prädikationen dar; und keine substantielle Prädikation ist sowohl Zu- als auch Absprechung. Allerdings wird der Bereich der substantiellen Prädikationen durch die beiden unterschiedenen Sorten nicht ausgeschöpft. Man betrachte den Satz 'Ich bestreite: nicht(Ist-cool(Dracula))'. Da die Satzaussage elementar ist, handelt es sich um eine elementare Prädikation. Da die Prädikation in das Bestreiten, eine stark negative Redehandlung, eingebettet ist, liegt eine substantielle Prädikation vor. Nun ist die Aussage nicht atomar; daher ist keine Zusprechung gegeben. Ferner ist der Performator negativ; es kann sich also auch nicht um eine Absprechung handeln. Damit ist das Gebiet der substantiellen Prädikationen nicht erschöpfend in Zu- und Absprechungen eingeteilt; also ist die dritte Verzweigung von [18] nicht exhaustiv.

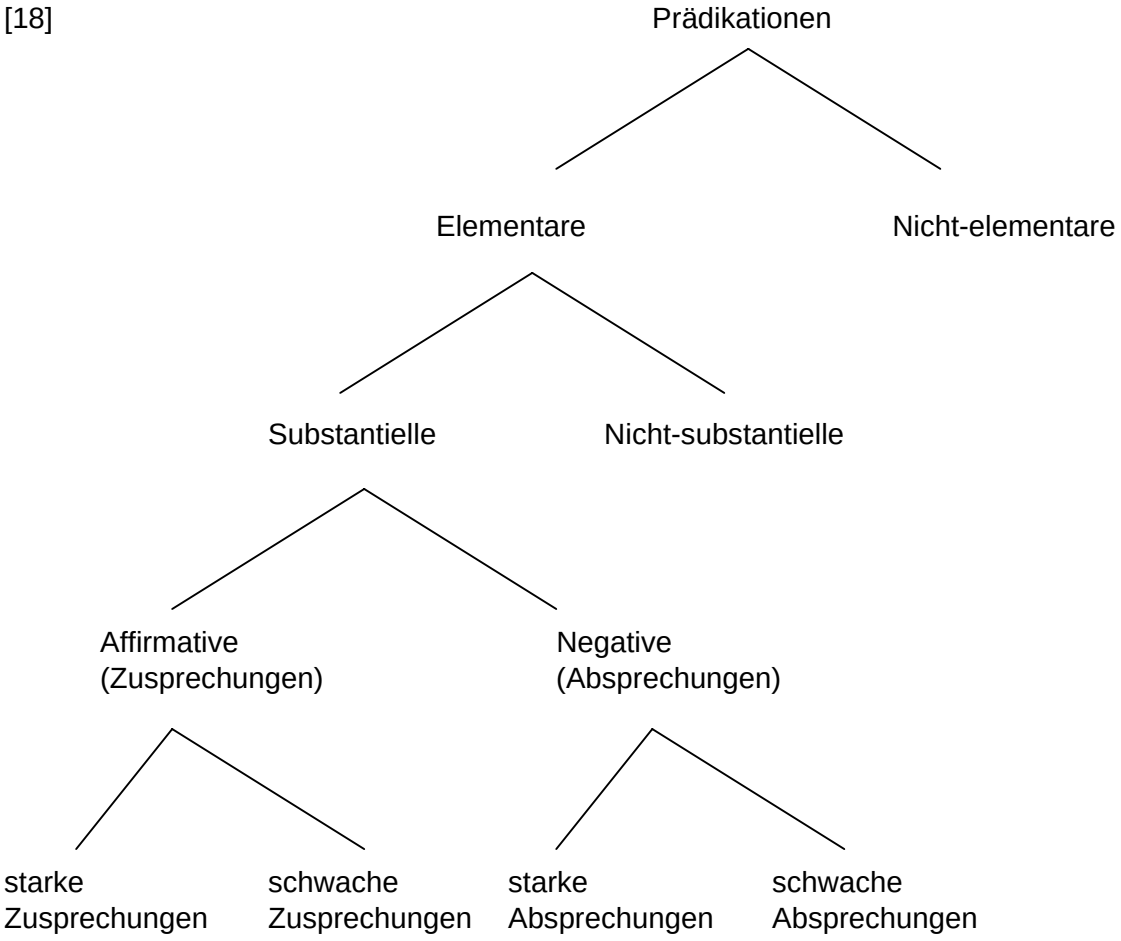
Bezüglich der inhaltlichen Erörterung dieser dritten Kategorie substantieller Prädikationen ist die intendierte Bedeutung des Negators und des negativen Performators ausschlaggebend: Wenn die Bestreitung einer Aussage Δ (hier: 'nicht(Ist-cool(Dracula))') erlaubt ist, falls es einen Beweis für die Negation von Δ (hier: 'nicht(nicht(Ist-cool(Dracula)))') gibt, also die Behauptung der Negation von Δ erlaubt ist, falls ferner der Negator klassisch reguliert ist, wird man die Beispieläußerung als Zusprechung ansehen wollen und entsprechende Subsumtionsmöglichkeiten schaffen. – Zur Nicht-Exhaustivität gelangte man im übrigen auch, wenn man neben affirmativen und negativen auch neutrative Redehandlungen und Performatoren für eine Sprache vorsieht.

Substantielle Prädikationen können ferner nach ihrer >Stärke< unterschieden werden; diese Unterscheidung betrifft die affirmative wie auch die negative Seite. Ein Autor *A* <u>prädiziert stark/schwach affirmativ</u> Φ <u>innerhalb</u> Σ <u>mit</u> ϑ <u>von</u> *x* <u>in</u> *S* bzw. ein Autor *A* <u>spricht</u> Φ <u>innerhalb</u> Σ <u>mit</u> ϑ *x* <u>in</u> *S* <u>stark/schwach zu</u> genau dann, wenn *A* spricht Φ innerhalb Σ mit ϑ von *x* in *S* zu und der Performator von Σ ist ein stark/schwach affirmativer Performator. Ein Autor *A* <u>prädiziert stark/schwach negativ</u> Φ <u>innerhalb</u> Σ <u>mit</u> ϑ <u>von</u> *x* <u>in</u> *S* bzw. ein Autor *A* <u>spricht</u> Φ <u>innerhalb</u> Σ <u>mit</u> ϑ *x* <u>in</u> *S* <u>stark/schwach ab</u> genau dann, wenn *A* spricht Φ innerhalb Σ mit ϑ von *x* in *S* ab und der Performator von Σ ist im Fall (i) ein stark/schwach negativer Performator und im Fall (ii) ein stark/schwach affirmativer Performator.

Mit der Äußerung von 'Es gilt: Ist-cool(Dracula)', 'Vermutlich: Ist-cool(Dracula)', 'Ich bestreite: Ist-cool(Dracula)', 'Vermutlich: nicht(Ist-cool(Dracula)' vollzieht der Autor eine starke

Zusprechung, eine schwache Zusprechung, eine starke Absprechung, eine schwache Absprechung. Wenn die affirmativen resp. negativen Redehandlungen/Performatoren vollständig in starke und schwache zerfallen, dann lassen sich auch Zu- und Absprechungen vollständig in starke und schwache gliedern. – Die bisherige Entwicklung läßt sich in folgender Tafel von Prädikationstypen darstellen:

[18]



Zur exemplarischen Festigung der entwickelten Begrifflichkeit ist die folgende Tabelle zu betrachten:

[19] a) Vermutlich: Ist-schlechtbeweibt(Sokrates)

b) Es-gilt: Ist-schlechtbeweibt(Sokrates)

c) Ich-bezweifle: Ist-schlechtbeweibt(Sokrates)

d) Ich-suspiziere: nicht(Ist-schlechtbeweibt(Sokrates))

e) Ich-bestreite: Ist-schlechtbeweibt(Sokrates)

f) Es-gilt: nicht(Ist-schlechtbeweibt(Sokrates))

g) Also: Ist-schlechtbeweibt(Sokrates)

h) Ob: Ist-schlechtbeweibt(Sokrates)

Wer a) äußert, spricht 'Ist-schlechtbeweibt' dem Lehrer Platons schwach zu. Diese schwache Zusprechung ist zugleich ein Beispiel für Zusprechungen, für substantielle und für elementare Prädikationen. Es ist ein Gegenbeispiel für nicht-elementare und nicht-substantielle Prädikationen sowie für Absprechungen und auch für starke Zusprechungen. – Wer b), äußert spricht dem Gatten der Xanthippe den Prädikator 'Ist-schlechtbeweibt(..)' stark zu. Diese starke Zusprechung ist ein Beispiel für Zusprechungen, für substantielle und elementare Prädikationen. Es ist damit ein Gegenbeispiel für nicht-elementare und nicht-substantielle Prädikationen, für Absprechungen und für schwache Zusprechungen. Mit c) und d) werden schwache Absprechungen, mit e) und f) starke Absprechungen vollzogen. g) und h) exemplifizieren die nicht-substantiellen elementaren Prädikationen.

Die (intuitive!) Übertragung auf elementare Aussagen mit mehrstelligen Prädikatoren versteht sich von selbst: Mit der Äußerung von [20]a) wird der zweistellige Prädikator 'Ist-größer-als(..,..)' Hans und Inge (in dieser Reihenfolge) abgesprochen. Mit der Äußerung von [20]b) wird der dreistellige Prädikator 'Liegt-zwischen-und(..,..,..)' von Köln, Bonn und München (in dieser Reihenfolge) nicht-substantiell prädiziert. Mit [20]c) schließlich wird der sechsstellige Prädikator 'Spricht-innerhalb-mit-in(..,..,..,..,..,..)' Hans, 'Ist-cool(..)', 'Es gilt: Ist-cool(Dracula)', 'Dracula', dem Fürst der Nacht und der vampirkundlichen Sprache (in dieser Reihenfolge) zugesprochen:

[20] a) Mutmaßlich: nicht (Ist-größer-als(Hans, Inge))

b) Also: Liegt-zwischen-und(Köln, Bonn, München)

c) Es gilt: Spricht-zu-innerhalb-mit-in(Hans, 'Ist-cool(..)', 'Es gilt: Ist-cool (Dracula)', 'Dracula', der Fürst der Nacht, die vampirkundliche Sprache)

Die detaillierte und vergleichsweise formelle Darlegung der Prädikationsbegrifflichkeit verdankt sich hauptsächlich dem Um- bzw. (besser) Mißstand, daß die überkommene Prädikationslehre meist nicht zwischen der Redehandlung als ganzer und der Teilhandlung des Prädizierens unterscheiden. So wird das Zu- und das Absprechen selbst eine Redehandlung und nicht eine Teilhandlung einer so und so beschaffenen Redehandlung. Dieser Umstand führt dann häufig zu Konfusionen, insbesondere dann, wenn es um die bisher ausgeblendeten, aber sogleich zu behandelnden Fragen des korrekten Prädizierens geht.

6.3.2 Die Wahrheit elementarer Aussagen

Das Prädizieren in allen seinen Spielarten ist in (hier stets: kognitiven) Redehandlungen eingebettet. Diese Vollzüge können nun regelgemäß bzw. korrekt oder regelwidrig bzw. inkorrekt ins Werk gesetzt werden; entsprechend sind korrekte von inkorrekten Prädikationen zu unterscheiden. Der Maßstab der Korrektheit wird dabei stets von den einschlägigen Redehandlungsregeln gebildet.

Angenommen, eine z.B. philosophiehistorische Sprache wäre so eingerichtet, daß man Kennzeichnungen (↑7.) nur dann verwenden dürfte, wenn für die Kennzeichnungsformel die Einzigkeitsbedingung erfüllt wäre, dann würde man mit ‘Ob: Ist-Empirist(der Verfasser der „Principia Mathematica“)’ oder mit ‘Wäre: Ist-Empirist(der Verfasser der „Principia Mathematica“)’ eine inkorrekte nicht-substantielle Prädikation vollziehen. Hingegen führte man mit Äußerung von ‘Ob: Ist-Empirist(Russell)’ oder mit ‘Wäre: Ist-Empirist(Russell)’ korrekt nicht-substantielle Prädikationen aus. So ist ferner jede Folgerung und damit auch jede Prädikation der Art ‘Also: Russell=Russell’ korrekt; und auch die subsidiäre Prädikation von ‘Ist-schlechtbeweibt(..)’ von Sokrates, die mit ‘Also: Ist-schlechtbeweibt(Sokrates)’ vollzogen wird, ist korrekt, wenn für eine Folgerungsregel im voranstehenden Diskurs ein passendes Anwendungsszenario bereitsteht, z.B. eine Subjunktion mit der betrachteten Aussage als Sukzedens und ferner das Antezedens dieser Subjunktion.

Vollständig analog ist im Bereich des substantiellen Prädizierens, des Zu- und des Absprechens, zu verfahren. Angenommen, die Regel des Vermutens verlangt u.a. Verträglichkeit mit den schon als wahr etablierten Aussagen, dann wäre mit der Äußerung von ‘Vermutlich: nicht(Ist-Philosoph(Sokrates))’ eine inkorrekte Vermutung und damit eine inkorrekte schwache Absprechung ausgeführt. Verlangt man für das Bezweifeln Unverträglichkeit mit schon als wahr oder als mutmaßlich wahr etablierten Aussagen, dann

vollzöge man mit ‘Ich bezweifle: Ist-gutbeweibt(Sokrates)’ eine korrekte schwache Absprechung.

Im alethischen Bereich soll das starke Zu- und Absprechen betrachtet werden, insoweit es in affirmative Redehandlungen eingebettet ist; mit negativen Redehandlungen ist analog zu verfahren. Ausgangspunkt ist folgende Liste:

[21] a) Axiom: Ist-eine-natürliche-Zahl(0)

b) Feststellung: Ist-größer-als(Hans, Inge)

c) Es-gilt: nicht(Ist-größer-als(Inge, Hans))

d) Definition: 1 = der-Nachfolger-von(0)

Mit der Äußerung von a) wird dem ‘0’-Nominatum der Prädikator ‘Ist-eine-natürliche-Zahl(..)’ korrekt zugesprochen: Die Regel für das axiomatische Setzen, die lediglich Verträglichkeit mit schon gesetzten Aussagen fordert, wird bei dieser (unterstellterweise) ersten Setzung trivial befolgt. Ein inkorrektes Absprechen läge demzufolge dann vor, wenn die Reihe der Setzungen mit der Äußerung von ‘Axiom: nicht(Ist-eine-natürliche-Zahl(0))’ fortgesetzt würde. – Insoweit mit a) eine korrekte starke Zusprechung vollzogen wird, trifft der Prädikator ‘Ist-eine-natürliche-Zahl(..)’ auf das ‘0’-Nominatum zu bzw. er ist wahr von dem ‘0’-Nominatum.

Mit der Äußerung von b) wird dem ‘Hans’-Referenten und dem ‘Inge’-Referenten der Prädikator ‘Ist-größer-als(..,..)’ nach Ausführung einer (z.B. messenden) Vergleichsoperation (unterstellterweise) korrekt zugesprochen. Die einschlägige Konstatierungsregel ist (unterstellterweise) erfüllt. Ein inkorrektes Zusprechen oder auch Absprechen läge vor, wenn das Konstatieren einer elementaren Aussage nicht durch eine entsprechende Konstatierungsregel abgedeckt wäre. – Insoweit mit b) eine korrekte starke Zusprechung vollzogen wird, trifft der Prädikaor ‘Ist-größer-als(..,..)’ auf Hans und Inge zu bzw. ist wahr von Hans und Inge.

Mit der Äußerung von c) wird eine Absprechung vollzogen. Es möge folgende Begründung vorgelegt werden: Da: Ist-größer-als(Hans, Inge). Da: Für alle *x*, *y* (Ist-größer-als(*x*, *y*) → nicht(Ist-größer-als(*y*, *x*))). Also: Ist-größer-als(Hans, Inge) → nicht(Ist-größer-als(Inge, Hans)). Also: nicht(Ist-größer-als(Inge, Hans)). Es gibt also eine einschlägige Begründung für die behauptete Elementaraussage. Insoweit liegt eine korrekte Absprechung vor: Der Prädikator ‘Ist-größer-als(..,..)’ geht fehl von bzw. ist falsch von Inge und Hans. – Wird eine Behauptung einer Elementaraussage vorgetragen, für die es keine Begründung gibt, dann entspricht dieser Vollzug nicht der Behauptungsregel und ist damit inkorrekt; es kann weder eine korrekte Zu- noch eine korrekte Absprechung vorliegen.

Mit der Äußerung von d) wird der Identitätsprädikator (im unterstellten üblichen Aufbau einer arithmetischen Sprache) korrekt zugesprochen. Inkorrekt wäre (in einem solchen Aufbau) etwa die definitorische Setzung von '0 = der-Nachfolger-von(1)': Die Definitionsregel läßt es nicht zu, daß ein schon etablierter Ausdruck, hier: die Individuenkonstante '0', neuerlich etabliert wird. – Insoweit in d) eine korrekte Zusprechung des Identitätsprädikators stattfindet, trifft der Identitätsprädikator auf 1 und den Nachfolger von 0 zu bzw. ist von diesen beiden Gebilden in dieser Reihenfolge wahr.

Mit der Betrachtung dieser Beispiele ist bereits die Perspektive zur Behandlung der Wahrheit von elementaren Aussagen eingerichtet. Sie unterscheidet sich nicht von der alethiologischen Generalperspektive bzw. läßt keine Modifikation dieses Sichtungsrahmens als angezeigt erscheinen: Eine Aussage Δ ist in einer Sprache *S* wahr genau dann, wenn sie zufolge einer Wahrheitsregel (= einer Behauptungsregel, einer Konstatierungsregel, einer Setzungsregel, einer Definitionsregel usf.) korrekt als wahr klassifiziert werden kann, wenn sie also Theorem, Empirem, Axiom oder Definition usf. ist. Eben dies gilt, wie exemplarisch vorgeführt, auch für elementare Aussagen.

Die Wendung '..ist wahr von..' bzw. '..trifft zu auf..' läßt sich im Rückgriff auf den allgemeinen Wahrheitsbegriff erklären: Ein Prädikator Φ ist wahr von den resp. trifft zu auf die $\vartheta_1,...,\vartheta_n$-Nominata genau dann, wenn die Aussage $\Phi(\vartheta_1,...,\vartheta_n)$ wahr ist. Die Wendungen '..ist wahr von..' bzw. '..trifft zu auf..' besitzen zahlreiche Synonyme, z.B. diese: '..gilt von..', '..ist (mit Recht) anwendbar auf..', '..ist .. (mit Recht) zuschreibbar', '..ist..(mit Recht) zusprechbar' '..ist..beilegbar'. – Die Wendung '..ist falsch von..' wird entsprechend charakterisiert: Φ ist falsch resp. geht fehl von den $\vartheta_1,...,\vartheta_n$-Nominata bzw. ist diesen mit Recht absprechbar genau dann, wenn die Aussage $\Phi(\vartheta_1,...,\vartheta_n)$ falsch ist (oder die Negation von $\Phi(\vartheta_1,...,\vartheta_n)$ wahr ist); für die Charakterisierung der Falschheit bestehen, ist Wahrheit einmal bestimmt, verschiedene Möglichkeiten (↑).

Die Frage nach der Wahrheit bzw. Falschheit von elementaren Aussagen führt (wie die generelle Frage nach Wahrheit und Falschheit von Aussagen) zu den Regeln für die alethischen Vollzüge, genauer: in das Antezedens dieser Regeln und damit auf die Bedeutung der an der Aussage beteiligten Ausdrücke. Um in einer Sprache über die Wahrheit/Falschheit von Aussagen zu befinden bzw. um diese Befindungsverfahren zu analysieren, rekurriert man hingegen nicht auf Eigenschaften oder Begriffe oder Ideen oder Klassen, die den Nominata zukommen oder abgehen bzw. unter oder neben die die Nominata fallen bzw. an denen die Nominata teilhaben oder auch nicht bzw. von denen die Nominata Element sind oder nicht. Die Rede von Begriffen, Eigenschaften, Ideen oder

Klassen, vom Zukommen und Abgehen, vom Fallen-unter und Fallen-neben, vom Teilhaben und Nicht-Teilhaben, vom Element- oder Nicht-Element-Sein hat offenkundig eine andere Funktion (↑6.3.4).

Zur Erleichterung des Verständnisses der prädikationstheoretischen Literatur sind abschließend zwei Hinweise angezeigt. Erstens: Die keimzentrierte Auffassung der Sprache konzipiert Sprachen als einen Prozeß, dessen Ausgangs- und Rekurspunkt die >Keime< der elementaren Prädikation sind. Ausgehend von diesen Keimen können dann Zug um Zug logische Operatoren etabliert und motiviert/gerechtfertigt werden. Dabei wird die elementare Prädikation etwas anders konzipiert: Das Zusprechen und das Absprechen sind selbst eigenständige Redehandlungen; ein Negator ist auf dieser untersten Stufe noch nicht vorhanden. Anzunehmen sind dann also geeignete Performatoren und eigene Regeln für das Zu- und Absprechen: Als eigenständige Redehandlungen sind sie eben nicht in andere Redehandlungen eingebettet; das Behaupten ist auf dieser Entwicklungsstufe noch gar nicht vorhanden. – Hat man in einem späteren Stadium das Folgern und das Behaupten eingerichtet, dann ist darauf zu achten, daß das Zu- und Absprechen als autonome Redehandlungen nicht mit dem Zu- und Absprechen als Teilhandlung von Redehandlungen konfundiert wird.

Zweitens: Im Zuge der Erläuterung des Prädizierens spielen in der Literatur die Bezugnahme auf Tätigkeiten wie Charakterisieren, Einordnen, Klassifizieren, Rubrizieren, Bestimmen, Subsumieren, Vergleichen, Gleichsetzen, Unterscheiden, Ab- bzw. Ausgrenzen und viele andere eine Rolle. Bezüglich solcher Versuche ist eine Warnung angezeigt: Die erläuternde Funktion kann nur dann erfolgreich wahrgenommen werden, wenn die aufgezählten Handlungen ihrerseits ohne Rückgriff auf das Prädizieren charakterisiert worden sind bzw. (in einem bestimmten Rahmen) charakterisierbar sind. Prima facie scheint eher der umgekehrte Weg aussichtsreich. So könnte man etwa den Unterscheidungsprädikator so explizieren: Ein Autor *A* unterscheidet *x* von *y* mittels Φ genau dann, wenn er Φ *x* korrekt im starken Sinne zuspricht und Φ *y* in starkem Sinne korrekt abspricht, oder umgekehrt; so läßt sich etwa mit ‘Ist-Philosoph(..)’ Aristoteles von Alexander dem Großen unterscheiden. Prädikatoren (oder die zugeordneten Begriffe oder Eigenschaften), mit denen man unterscheiden kann, könnte man als unterscheidende Prädikatoren, kurz: als Unterschiede, ansprechen. Die in einer Sprache vorhandenen Unterschiede fallen mit den normalen Prädikatoren dieser Sprache zusammen.

6.3.3 Universalien: Prädikator – Begriff – Eigenschaft – Klasse

Nach den bisherigen Erläuterungen gilt: Eine atomare Aussage $\Phi(\theta)$ ist wahr genau dann, wenn der Prädikator Φ auf den θ-Referenten zutrifft; falsch ist eine derartige Aussage genau dann, wenn der Prädikator Φ den θ-Referenten verfehlt. Da ‘Ist-Primzahl(2)’ wahr ist, trifft ‘ist-Primzahl(..)’ auf den ‘2’-Referenten, also auf 2, zu. Da ‘Ist-Primzahl(4)’ falsch ist, verfehlt ‘ist-Primzahl(..)’ den ‘4’-Referenten, also die 4. Die Erklärungsrichtung sollte dabei die sein, daß mit Hilfe der allgemeinen alethiologischen Prädikatoren ‘wahr’ und ‘falsch’ das spezielle alethiologische Sprechen vom Zutreffen und Verfehlen von Prädikatoren auf Nominata charakterisiert wird.

Mit den Prädikatoren (in bestimmungsbedürftiger Weise) >verbunden< sind nun Begriffe, Eigenschaften und Klassen; und die Rede von Zutreffen und Fehlgehen von Prädikatoren findet (in ebenfalls erläuterungsbedürftiger Weise) Übertragung auf Begriffe, Eigenschaften und Klassen. So spricht man davon, daß z.B. die 2 bzw. die 4 unter bzw. neben den Begriff der Primzahl fällt, daß die Primzahleigenschaft der 2 bzw. der 4 zukommt bzw. abgeht, daß die 2 bzw. die 4 Element bzw. Nicht-Element der Klasse der Primzahlen ist.

Zwischen diesen Redeweisen besteht ein Genau-dann-wenn-Zusammenhang, der unabhängig von der jeweiligen Auffassung von Begriffen, Eigenschaften und Klassen akzeptiert wird. Ausführlich sowohl für die Wahr- wie auch die Falsch-Seite formuliert: (i) Die Aussage ‘Ist-Primzahl(2)’ ist genau dann wahr, wenn der Prädikator ‘Ist-Primzahl(..)’ auf den-‘2’-Referenten zutrifft; der Prädikator ‘Ist-Primzahl(..)’ trifft genau dann auf den-‘2’-Referenten zu, wenn der-‘2’-Referent unter den-Begriff-zu ‘Ist-Primzahl(..)’ fällt; der-‘2’-Referent fällt unter den-Begriff-zu ‘Ist-Primzahl(..)’ genau dann, wenn die-Eigenschaft-zu ‘Ist-eine-Primzahl(..)’ dem-‘2’-Referenten zukommt; die-Eigenschaft-zu ‘Ist-eine-Primzahl(..)’ kommt dem-‘2’-Referenten genau dann zu, wenn der-‘2’-Referent Element der-Klasse-zu ‘Ist-Primzahl(..)’ ist. (ii) Die Aussage ‘Ist-Primzahl(4)’ ist genau dann falsch, wenn der Prädikator ‘Ist-Primzahl(..)’ den-‘4’-Referenten verfehlt; der Prädikator ‘Ist-Primzahl(..)’ verfehlt genau dann den-‘4’-Referenten, wenn der-‘4’-Referent neben den-Begriff-zu ‘Ist-Primzahl(..)’ fällt; der-‘4’-Referent fällt neben den-Begriff-zu ‘Ist-Primzahl(..)’ genau dann, wenn die-Eigenschaft-zu ‘Ist-eine-Primzahl(..)’ dem-‘4’-Referenten abgeht; die-Eigenschaft-zu ‘Ist-eine-Primzahl(..)’ geht dem-‘4’-Referenten genau dann ab, wenn der-‘4’-Referent Nicht-Element der-Klasse-zu ‘Ist-Primzahl(..)’ ist.

Der exemplarisch vorgeführte Zusammenhang zwischen Prädikator, Begriff, Eigenschaft und Klasse läßt sich allgemein und unter Berücksichtigung des Sprachbezugs zum (affirmativen

bzw. negativen) Hauptsatz der Universalienlehre verallgemeinern; die affirmative Variante lautet:

[22] Wenn *S* eine Standardsprache erster Stufe ist und Φ ein einstelligeR Prädikator von *S* ist und θ ein Nominator von *S* ist, dann gilt:

a) Die Aussage $\Phi(\theta)$ ist wahr in *S*

gdw

b) der Prädikator Φ trifft auf den-θ-Referenten in *S* zu

gdw

c) der-θ-Referent fällt in *S* unter den-Begriff-zu Φ

gdw

d) die-Φ-Eigenschaft kommt in *S* dem-θ-Referenten zu

gdw

e) der-θ-Referent ist in *S* Element der-Φ-Klasse

Die negative, der Falschheit gewidmete Variante besitzt entsprechend folgenden Wortlaut:

[23] Wenn *S* eine Standardsprache erster Stufe ist, Φ ein einstelliger Prädikator von *S* ist und θ ein Nominator von *S* ist, dann gilt:

a) Die Aussage $\Phi(\theta)$ ist falsch in *S*

gdw

b) der Prädikator Φ verfehlt in *S* den-θ-Referenten

gdw

c) der-θ-Referent fällt in *S* neben den-Begriff-zu Φ

gdw

d) die-Φ-Eigenschaft geht dem-θ-Referenten in *S* ab

gdw

e) der-θ-Referent ist in *S* Nicht-Element der-Φ-Klasse

Die Betitelung des notierten Satzes bedarf einer ausführlicheren (etymologischen und historischen) Erläuterung: Ein Universale ist dem Wortsinn nach ein Allgemeines; und Prädikatoren sind all den Einzelnen bzw. Singulären gemein(sam), auf die sie zutreffen. Deshalb gelten – zunächst und wenigstens an der Oberfläche – die Prädikatoren als

Universalien. Mit Prädikatoren verbunden werden aber, wie schon bemerkt, Begriffe, Eigenschaften und (historisch später) Klassen; und der überkommene, insbesondere im späten Mittelalter ausgetragene, aber immer wieder aufflammende Streit geht darum, ob nicht etwa Eigenschaften oder Begriffe (oder eine weitere Entitätensorte) in einem >ursprünglichen< oder >eigentlichen< Sinn Universalien sind.

In dieser Kontroverse kristallisierten sich (wenigstens) drei Problemgruppen heraus, die im Sinne der Startinformation so wiedergegeben werden können: (i) Fragen nach der Natur von Universalien: Was sind überhaupt Universalien? Wie soll der Prädikator '..ist-Universale(-in..)' expliziert werden? Stellen sich auf Basis einer derartigen Explikation Prädikatoren, Begriffe, Eigenschaften, Klassen oder andere, hier nicht aufgezählte Gebilde als Universalien heraus? (ii) Fragen nach der Existenz bzw. Existenzform: Existieren Universalien (>überhaupt<)? Wenn ja: Handelt es sich um sprachliche, sprachabhängige, mentale, geistabhängige, subjektive usf. oder um nichtsprachliche, sprachunabhängige, reale, geistunabhängige, objektive usf. Gebilde? (iii) Fragen der Zugänglichkeit: Sind die (so oder so bestimmten) Universalien der Erkenntnis >zugänglich<. Wenn ja: Worin besteht diese Zugänglichkeit?

An diesem Fragekatalog fällt zweierlei auf: Zum einen handelt es sich durchweg um Frageprovisorien; Antworten werden variieren je nachdem, wie die Eigenausdrücke der Fragen expliziert werden. Zum anderen – und in Konkretisierung des gerade namhaft gemachten Gesichtspunktes – sollten im Sinne der methodischen Ordnung die Fragen nach der Natur der Universalien als erste beantwortet werden.

Der Hauptsatz hat nun insofern eine Sonderstellung, als alle Parteien geeint sind in dem Willen, ihm in ihrem Ansatz als Theorem Geltung zu verschaffen. Dies kann freilich nur dadurch geschehen, daß den beteiligten Eigenausdrücken eine entsprechende Bedeutung verliehen bzw. in Anspruch genommen wird; für den Schritt von a) zu b) wurde dies bereits getan. – Ohne nun auf Vorzüge und Abträglichkeiten konkurrierender Ansätze einzugehen, sollen die Redeteile aus der Begriffs- und der Eigenschaftsgruppe so weit expliziert werden, daß die Übergänge nach c) und d) einsichtig werden. Dabei wird auch die Perspektive deutlich, in die die Universaliendebatte gestellt wird. Dadurch zeichnen sich Antworten auf einige Fragen des eben präsentierten Katalogs ab.

Die Mitglieder der um die Vokabel 'Begriff' gescharten Vokabelmannschaft haben meist mehrer Bedeutungen und zahlreiche Synonyme. Die folgende Erläuterungen verzichten auf die Behandlung des Ambiguitäts- und des Synonymitätssyndroms (und auch auf die Ausführung weiterer präexplikativer Sondierungen); dasselbe gilt für die anschließenden

Explikationsbemühungen zur Eigenschaftsrede (↑6.4); auch die Beschränkung auf einstellige Prädikatoren wird aufrechterhalten.

Jedem Benutzer von Gebrauchssprachen ist das Phänomen der Synonymie geläufig: Prädikatoren sind synonym resp. verwendungsgleich resp. bedeutungsgleich, wenn sie bei Wahrung der Korrektheit der jeweiligen Redehandlung, in deren Satz sie Teilausdruck sind, austauschbar sind. In der hier benutzen Sprache sind z.B. die zweistelligen Prädikatoren '..ist-verwendungsgleich-mit..', '..ist-bedeutungsgleich-mit..', '..ist-synonym-mit..' verwendungsgleiche Redeteile. In der kulinarischen Sprache wären etwa '..ist-Kirschtomate', '..ist-Cherrytomate', '..ist-Cocktailtomate' synonyme einstellige Prädikatoren. In einer mathematischen Sprache könnten '..ist-leere-Menge', '..ist-leere-Klasse', '..ist-Nullmenge', '..ist-Nullklasse' als bedeutungsgleiche einstellige Prädikatoren auftreten.

Die genauere Charakterisierung der Synonymiebeziehung kann nur relativ auf eine entsprechend scharf umrissene Sprache erfolgen. Für die weiteren Überlegungen ausschlaggebend ist nur dies: '..ist-synonym-mit..(in..)' ist als Gleichheitsprädikator auf '..ist-einstelliger-Prädikator(-in..)' erklärt (↑6.2.4.6). Eigenschaften wie Einstelligkeit, Exemplifizierbarkeit, Subprädikatorschaft oder Sortalität (und viele andere) sind nun in folgendem Sinn invariant bezüglich der Synonymiebeziehung: Ist ein Prädikator einstellig, exemplifizierbar, Subprädikator (von diesem oder jenem Prädikator), ein Sortal, dann ist auch jeder zu ihm synonyme Prädikator einstellig, exemplifizierbar, Subprädikator oder Sortal. So ist etwa '..ist-Cherrytomate' einstellig, exemplifizierbar, Subprädikator z.B. von '..ist-Tomate' und überdies sortaler Prädikator; selbiges trifft auch auf alle Synonyme zu. Es ist ferner '..ist-leere-Klasse' exklusiv-exemplifizierbar; auch dieses trifft auf die Synonyme zu. Will man nun markieren, daß man über einen Prädikator synonymieinvariant redet, dann kann man dies durch Vorsetzung des Funktors 'der-Begriff-zu..(in..)' zu verstehen geben: 'der-Begriff-zu '..ist-Cocktailtomate'' meint dann dasselbe wie das an '..ist-Cocktailtomate' Invariante bezüglich Synonymie.

Um diese Intuition genauer formulieren zu können, muß zunächst die Beziehung zwischen dem Prädikator und seiner Invariante von der strukturellen Seite her gestaltet werden: (i) Nach dem Existenzpostulat soll jeder Prädikator wenigstens eine Invariante (= einen Begriff) bedeuten. (ii) Nach dem Korrelationspostulat gilt: Prädikatoren Φ, Ψ sollen genau dann synonym sein, wenn sie dasselbe bedeuten. (iii) Nach dem Differenzpostulat wird kein Prädikator seinerseits bedeutet.

Vor dem Hintergrund der so verfaßten Bedeutungsrelation läßt sich dann die Funktionskonstante 'der-Begriff-zu..in..' in folgender Weise bedingt definieren: Wenn *S* eine

Sprache erster Stufe ist und Φ ein einstelliger Prädikator von *S* ist, dann gilt für beliebige *x*: der-Begriff-zu Φ in *S* = *x* gdw Φ bedeutet *x.* Kurz: Begriffe sind das von Prädikatoren Bedeutete. Eine unmittelbare Konsequenz lautet: Sind Prädikatoren in ihrem Begriff identisch, so sind sie synonym – und umgekehrt.

Will man den Unterschied zwischen Prädikatoren und (ihren) Begriffen wahren, dann müssen die invarianten Redeteile an die Begriffe adjustiert werden. So sollen z.B. die Prädikatoren '..ist-leer' und '..ist-erfüllbar' als Adjustierungen der Redeteile '..ist-exempelfrei' und '..ist-exemplifizierbar' in folgender Weise etabliert werden: *x* ist leer bzw. erfüllbar genau dann, wenn es einen Prädikator Φ gibt, so daß *x* = der-Begriff-zu Φ und Φ ist exempelfrei bzw. exemplifizierbar. Der Prädikator '..ist-Unterbegriff-von..' wird als Adjustierung von '..ist-Subprädikator-von..' definiert: *x* ist Unterbegriff von *y* dann und nur dann, wenn es Prädikatoren Φ, Ψ gibt, so daß x = der-Begriff-zu Φ und *y* der-Begriff-zu Ψ und Φ ist Subprädikator zu Ψ.

Die Rede vom Fallen-unter-einen-Begriff und vom Fallen-neben-einen Begriff lassen sich nun gerade als Adjustierungen des Zutreffens bzw. des Fehlgehens bezüglich der zweiten Stelle definieren: *x* fällt unter resp. neben *y* genau dann, wenn es einen Nominator θ und einen Prädikator Φ gibt, so daß *x* = der-Referent-von θ und *y* = der-Begriff-zu Φ und Φ trifft zu auf bzw. geht fehl von dem-Referent-von θ. Aus diesen Festlegungen folgt unmittelbar der Übergang von b) zu c): Φ triff zu auf bzw. geht fehl von dem-θ-Referenten genau dann, wenn der-θ-Referent unter bzw. neben den-Begriff-zu Φ fällt.

Die Funktionskonstante 'der-Begriff-zu..in..' wurde im Rückgriff auf die Gleichheitsbeziehung der Synonymie etabliert. Zwischen Prädikatoren bestehen aber noch andere Äquivalenzen, u.a. die früher bereits definierte und mit Beispielen versehene Koextensionalität: Prädikatoren Φ, Ψ sind genau dann koextensional in einer Sprache, wenn Φ Sub- und Superprädikator von Ψ ist. So sind z.B. in der arithmetischen Sprache die Prädikatoren 'Ist-Primzahl(..)' und 'λx(Ist-Teilbar-durch(x,x) $\wedge$ Ist-Teilbar-durch(x,1))(..)' koextensional. In der biologischen Sprache sind die Prädikatkonstanten 'Ist-Lebewesen-mit-Herz(..)' und 'Ist-Lebewesen-mit-Nieren(..)' koextensional. Es handelt sich ersichtlich um einen Gleichheitsprädikator, auf dem Bereich der Prädikatoren, der wiederum die Etablierung eines Abstraktums, in diesem Fall, die Etablierung von Eigenschaften ermöglicht.

Um Eigenschaften als das an Prädikatoren Invariante bezüglich Koextensionalität darstellen zu können, ist es wiederum nötig, zwischen den Prädikatoren und dieser Invariante eine Relation, die Bezeichnungsbeziehung, gemäß den von der Synonymie her bekannten Postulaten zu gestalten: (i) Jeder Prädikator hat wenigstens ein Bezeichnetes. (ii)

Prädikatoren Φ, Ψ bezeichnen genau dasselbe, wenn sie koextensional sind. (iii) Kein Bezeichnetes ist seinerseits Prädikator. – Damit läßt sich definieren: Wenn *S* eine Sprache erster Stufe ist und Φ ein einstelliger Prädikator von *S* ist, dann gilt für beliebige *x*: die-Eigenschaft-zu Φ in *S* = *x* gdw Φ bezeichnet *x.* Kurz: Eigenschaften sind das von Prädikatoren Bezeichnete. Eine unmittelbare Konsequenz lautet: Sind Prädikatoren in ihrer Eigenschaft identisch, so sind sie koextensional – und umgekehrt.

Wiederum können, ganz analog zum Vorgehen bei den Begriffen, invariante Redeteile adjustiert werden: So sollen z.B. die Prädikatoren '..ist-instanzenfrei' und '..ist-instanziierbar' als Adjustierungen der Redeteile '..ist-exemplefrei' und '..ist-exemplifizierbar' in folgender Weise etabliert werden: *x* ist instanzenfrei bzw. instanziierbar genau dann, wenn es einen Prädikator Φ gibt, so daß *x* = die-Eigenschaft-zu Φ und Φ ist exempelfrei bzw. exemplifizierbar. Unter Einbezug der analogen Adjustierungen in der Begriffsrede gilt dann: Ein Prädikator Φ ist exempelfrei bzw. exemplifizierbar genau dann, wenn der bedeutete Begriff leer bzw. erfüllbar ist; und das ist wiederum genau dann der Fall, wenn die bezeichnete Eigenschaft instanzenfrei bzw. instanziierbar ist.

Die Rede vom Zukommen und vom Abgehen einer Eigenschaft läßt sich wiederum als Adjustierungen des Zutreffens bzw. des Fehlgehens bezüglich der zweiten Stelle definieren: *x* kommt *y* zu resp. geht *y* ab genau dann, wenn es einen Nominator θ und einen Prädikator Φ gibt, so daß *x* = der-Referent-von θ und *y* = die-Eigenschaft-zu Φ und Φ trifft zu auf bzw. geht fehl von dem-Referent-von θ. Aus diesen Festlegungen folgt unmittelbar der Übergang von b) zu d): Φ trifft zu auf bzw. geht fehl von dem-θ-Referenten genau dann, wenn die-Eigenschaft-zu Φ dem-θ-Referenten zukommt bzw. abgeht. Damit läßt sich insgesamt auch der Zusammenhang zwischen c) und d) klären: Die-Eigenschaft-zu Φ kommt dem-θ-Referenten genau dann zu bzw. geht ihm genau dann ab, wenn der-θ-Referent unter bzw. neben den Φ-Begriff fällt.

Mit der Skizzierung (eines Teils) der Begriffs- und der Eigenschaftsrede zeichnen sich auch schon Möglichkeiten ab, sog. abstrakte singuläre Terme ordnungsgemäß zu etablieren. So könnte etwa 'Röte' durch Setzung der Aussage 'Röte = die-Eigenschaft-zu 'Ist-rot(..)'' und 'Rotheit' durch Setzung der Aussage 'Rotheit = der-Begriff-zu 'Ist-rot(..)'' definiert werden. Es gilt dann: Der Prädikator 'Ist-rot(..)' trifft auf einen geeigneten Referenten genau dann zu bzw. geht von ihm genau dann fehl, wenn ihm Röte zukommt bzw. abgeht; das ist wiederum genau dann der Fall, wenn er unter bzw. neben Rotheit fällt.

Ob man nun Prädikatoren, Begriffe oder Eigenschaften – oder vielleicht andere Abstrakta von Prädikatoren – als Universalien wählt, mag hier offenbleiben. Ebensowenig soll

entschieden werden, ob man die (platonische) Rede von Ideen und der Teilhabe von Einzeldingen an Ideen mit der Etablierung von Begriffen und Eigenschaften und den entsprechenden Adjustierungen als bereits rekonstruiert ansieht oder ob man dazu eigene (, aber analoge) Anstrengungen unternimmt. Entscheidend ist für den vorgetragenen Ansatz lediglich zweierlei: Zum einen sind die allgemeinen Wahrheitsprädikatoren in der Explikationsordnung ein Explikans für die abstraktiven Vokabeln – und nicht umgekehrt. Zum anderen verdanken sich die Begriffs- und die Eigenschaftsrede dem Interesse an der bezüglich Synonymie oder Koextensionalität invarianten Rede über Prädikatoren; sie werden hingegen nicht von davon verschiedenen >ontologischen< Interessen auf die Bahn gebracht.

Im vorgegebenen Rahmen und bei Deutung der Existenzrede im Sinne des Partikularquantors lassen sich einige der Fragen nach der Existenz von Begriffen oder Eigenschaften unschwer affirmativ beantworten. Insoweit Begriffe und Eigenschaften von Prädikatoren verschiedene Gebilde sind, könnte man sie als nichtsprachliche Entitäten auffassen. Insoweit jedoch nur von Prädikatoren bedeutete oder bezeichnete Gegebenheiten Begriffe resp. Eigenschaften sind, wären sie als sprachgebunden anzusehen. – Begriffe und Eigenschaften sind ferner insofern der Erkenntnis zugänglich, als man, wie gesehen, mit den entsprechenden Redeteilen, z.B. mit den Funktionskonstanten ‘der-Begriff-zu..in..’ und ‘die-Eigenschaft-zu..in..’, Einsichten formulieren kann, also z.B. Behauptungen aufstellen und begründen kann, die die erwähnten Zeichenverbindungen zum Teilausdruck haben.

Angenommen, ein Autor behauptet Aussagen wie ‘2 ist ein Primzahl’ oder ‘Eutyphron ist cool’. Damit stellt er diese Aussage bzw. den bedeuteten Gedanken bzw. die bedeutete Proposition als wahr hin. Es wäre nun nicht fernliegend, die Eigenschaftsrede so weiterzubilden und das Konzept des Etwas-an-etwas-erkennen so zu explizieren, daß das bei Frege gelesene Kapitelmotto zum Theorem würde: „Immerhin gibt es zu denken, daß wir an keinem Dinge eine Eigenschaft erkennen können, ohne damit zugleich den Gedanken, daß dieses Ding diese Eigenschaft habe, wahr zu finden“.

6.4 Literatur

Kamlah/Lorenzen: Logische Propädeutik, 1.Kapitel „Die elementare Prädikation“. – Beispiel für eine dreiteilige Prädikationskonzeption, die den Redehandlungsaspekt erst im nachhinein (in der zweiten Auflage im VI. Kapitel) >einmontiert< hat.

Kraml: Sprachphilosophie II, 3.2. „Prädikatoren“. – Kraml bietet eine Genese der sprachlichen Einrichtungen aus konstruktiver Perspektive; er ist (auch) als Beispiel für eine keimzentrierte Sprachauffassung zu lesen. Enthält ferner eine hilfreiche Übersicht zu materialen Prädikatorentypen.

Siegwart: Vorfragen zur Wahrheit, §18. – Bietet formale Distinktionen zum Prädizieren, insbesondere Desambiguierungen und ausführliche Synonymenlisten; enthält auch Hinweise zu nichtklassischen (dreiteiligen) Prädikationskonzepten und zu keimzentrierten Sprachkonzeptionen; einschlägig für 6.3.1 und 6.3.2.

Siegwart: Begriff. – Entwickelt auf Handbuchniveau die im Text dargelegte Charakterisierung des Begriffs unter Beachtung der üblichen Anforderungen an Explikationen; einschlägig für 6.3.3.

Siegwart: Moderne Abstraktionstheorie. – Stellt auf Handbuchniveau das Verfahren der Abstraktion unter einer Gleichheit dar; einschlägig für 6.3.3.

Sinowjew/Wessel: Logische Sprachregeln. Siebentes Kapitel „Einfache Aussagen“. – Entwickelt eine dreiteilige Konzeption der atomaren Aussage mit einem Operator der Unbestimmtheit.

Tugendhat/Wolf: Logisch-semantische Propädeutik, Kapitel 8. – Klare Schilderung der Prädikationskonzeption(en) in der analytischen Philosophie vor ihrem historischen Hintergrund.